ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Erster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1884.

Inhalts-Verzeichniss

des ersten Teils.

№ der Abhandlung. Heft. Seite

Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.

№	Titel	Heft	Seite
I.	Mechanisch-graphische Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen. Von Carl Bartl	I.	1
IV.	Grundzüge zu einer combinatorischen Darstellung der höheren Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen. Von Julius Vollers	I.	64
V.	Ueber allgemeine und absolute Permutationen. Von P. Seelhoff	I.	97
V.	Beweis für den von Herrn Dr. Sanio mitgeteilten Satz, betreffend die combinatorische Definition der Zahl e. Von Seelhoff	I.	102
V.	Darstellung der Zahl e als unendliches Product. Von Johann Hermes	I.	103
V.	Beweis für den in T. LXX. S. 224 gegebenen Ausdruck der Zahl e. Von Th. Sanio	I.	105
XVII.	Die Auflösung dreigliedriger Gleichungen nach Gauss. Von A. M. Nell	III.	311

Integralrechnung.

№	Titel	Heft	Seite
V.	Integration einer Differentialgleichung. Von Simon Spitzer	I.	90

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
V.	Zusatz zum Aufsatze: „Integration einiger partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung". Von F. Vályi	I.	109
X.	Zur Transformation der Thetafunctionen. Von Ferdinand Müller	II.	161
XIX.	Elliptische Integralfunctionen und ihre geometrische, analytische und dynamische Bedeutung. Von Emil Oekinghaus	IV.	337

Geometrie der Ebene.

III.	Ueber die Bestimmung der Unterscheidungscharaktere für die Kegelschnitte, wenn die Gleichungen derselben in trimetrischen Liniencoordinaten gegeben sind. Von A. Ehlert	I.	51
V.	Die Sectionscurven. Von E. Oekinghaus	I.	87
V.	Ueber einen geometrischen Ort. Von Emil Hain	I.	94
V.	Geometrische Aufgabe nebst Lösung. Von P. Seelhoff	I.	96
V.	Krümmungsradius der Ellipse. Von Stammer	I.	107
VI.	Ueber ein Curvographon. Von Emil Pirani	II.	113
VII.	Zur elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. Von Karl Lauermann	II.	126
VIII.	Eigenschaften der Punkte mit reciproken Dreieckscoordinaten und deren Anwendung auf das Dreieck. Von Max Greiner	II.	130
XI.	Zur Polaritätstheorie des Dreiseites. Von Emil Hain	II.	220
XI.	Bemerkung zu einer Dreiecksaufgabe. Von Heinrich Simon	II.	222
XII.	Ueber Projectivität und partielle Differentialgleichungen in der Geometrie. Von Th. Sanio	III.	225
XV.	Perspectivische Dreiecke die einem Kegelschnitt einbeschrieben sind. Von Leopold Klug	III.	292
XVI.	Einige Sätze über das Viereck und Kegelschnittbüschel. Von Leopold Klug	III.	304
XVIII.	Eine Verallgemeinerung der Sätze von Pascal und Brianchon und das Problem von Castillon. Von R. Sporer	III.	333

№ der Abhandlung. Heft. Seite.

XVIII. Ueber die Lage des Schwerpunkts im Viereck. Von Stoll . . . . III. 334

Geometrie des Raumes.

II. Ueber ein Problem der Curventheorie. Von R. Hoppe . . . . I. 46

IX. Ein Problem über berührende Kugeln. Von R. Hoppe . . . . II. 148

XIV. Bedingungen einer Canalfläche nebst einigen Bemerkungen an Canalflächen. Von R. Hoppe . III. 280

Mechanik.

V. Einfacher Beweis der Existenz eines Mittelpunkts paralleler Kräfte. Von R. Hoppe . . . . . . I. 111

Optik.

XIII. Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei orthogonaler und bei perspectivischer Darstellung. Von Josef Bazala . . . III. 266

Litterarische Berichte.

I. Kromann (Naturerk.). Wundt (Logik). Tilšer (krit. Bemk.). Cohen (Princ. Inf. Meth.). Spitzer (Diff. Gl.). Lissner (Elektromot.). Kareis (Ztschr.). Uppenborn (Kal. Elektr.) N. Arch. (X).

II. Köstler (eb. Geom.). Glinzer (el. Geom.). Claussen (Phys.). Spieker (Geom.). Brockmann (Comp.). Finger (Mech.). Schubert (Aufg.). Harms u, Kallius (Rechb.), Jansen (phys. Aufg.). Bardey (geg. Sinram). Benoist (6st. Log.). Greve (5st. Log.). Rex (5st. Log.). Mittag-Leffler (Acta S.). Bull. Soc. M. de Fr. (XI.).

III. Schobloch (B u. Γ F.). Reuschle (graph. Aufl.). Galopin-Schaub (Approx.). Genocchi (Menabrea — Γ F.). Hellwig

(qudr. u. kub. Gl.). Weyr (proj. Geom.). Franz Meyer (Apol.). Kummell (align. cv. — th. err.). Fuhrmann (Kegschn.). Tamchyna (Beisp. Kegschn.). Böklen (anal. G.). Peschka (darst. G.). Marx (darst. G.).

IV. Bierens de Haan (Girard — Stevin — Spinoza). Mailly (Ac. Brux.). Heller (Gesch. Phys. II.). Fischer (Kepler). Lukas (Farr.). Geer (Snell). Boncompagni (Bull. XVI.). Günther (Geophys.). Wenz (m. Geogr.). Vodusek (Plan.). Peters Fixst.). Becker (Sonne). Valentiner (Kom.). Landenberger (Erdb.). Littrow (Kal. 84). Köppen (Ztschr. I.).

Berichtigungen
im LXX. Teile.

Seite 66 Zeile 4 v. ob. hinzuzufügen (15a)
„ 68 „ 8 v. unt. statt (14) setze (15a)
„ 102 „ 2 „ „ „ die „ der

I.

Mechanisch-graphische Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen.

Von

Carl Bartl,

weiland Lehrer an der Landesbürgerschule zu Hartberg (Steiermark).

Einleitung.

Lässt man bei geometrischen Constructionen nur die gegenseitigen Schnittpunkte von Geraden und Kreisen, und Kreisen untereinander als zulässig gelten (weil Gerade und Kreis die einzigen Gebilde sind, die sich nach ihrer Definition graphisch in continuo „genau" darstellen lassen), so sind die auf Ermittlung solcher Punkte gestützten Aufgaben mit ausschliesslicher Anwendung des Zirkels und Lineals gelöst. — Schon Descartes stellte in seiner 1637 erschienenen analytischen Geometrie für das Kriterium solcher in dieses Gebiet gehörigen Aufgaben die Bedingung auf, dass es möglich sein müsse, die Construction, unter zu Grundelegung eines Massstabes, auf die elementaren der vier Grundrechnungsoperationen, sowie jener des Quadratwurzelzeichens zurückführen zu können.

Dieser Bedingung wird Genüge geleistet bei Aufgaben 1ter, 2ter oder auch 2^nten Ordnung dann, wenn Letztere in solche 2ter Ordnung zerfallen, also die betreffende Bestimmungsgleichung 2^n Grases sich in lauter Gleichungen 2ten Grades spalten lässt *). Hierzu

---

*) Diese müssen selbstverständlich solche sein, deren Coefficienten rational sind, oder höchstens Quadratwurzeln enthalten.

gehören z. B. schon die Elementaraufgaben der Construction gemeinsamer Construction gemeinsamer Kreistangenten und jene von berührenden Kreisen an drei Geraden — mit 4 Lösungen — ; dann die sogenannte ebene Berührungsaufgabe für Kreise — mit 8 Lösungen. Aus dem Gebiete der neueren Geometrie sind hieher zu rechnen die Collineationsaufgaben der Verzeichnung von Kegelschnittslinien aus 5 gegebenen Umfangsbestimmungsstücken,wenn darunter 2 Paare getrennter Punkte und Tangenten vorkommen mit 4 Lösungen etc. etc.

Aber jenes oben charakterisirte Gebiet der mit ausschliesslicher Anwendung des Zirkels und Lineals zu lösenden Aufgaben schliesst so manches nahe liegende, interessante, historische Problem aus (wie z. B. die Trisection des Winkels, das graphische Cubikwurzelziehen aus Streken und die damit zusammenhängenden Aufgaben aus der Stereometrie, Normalenprobleme für Kegelschnitte u. s. w.

Die Vorteile der Uebersichtlichkeit und Unmittelbarkeit jeder guten graphischen Lösung, gegenüber jener des Calculs, lassen selbst den bedeutenden und wesentlichen Nachteil, der auch bei den besten Zeicheninstrumenten und deren sorgfältigsten Behandlung auftretenden unvermeindlichen Fehler noch immer in den Hintergrund treten. Dieser Nachteil hat daher nur eine Aneiferung der Construction zur Folge, die graphischen Methoden zu verbessern und zu vereinfachen. Hieher gehören auch die Bestrebungen der Mechaniker, Instrumente herzustellen mit denen sich wenigstens annähernd so einfach und unmittelbar‘ wie der Kreis mittelst des Zirkels, nun auch die Kegelschnittslinien graphisch verzeichnen liessen (man hat solche Instrumente wohl nicht ganz richtig mit dem Namen „Kegelschnittszirkel“ bezeichnet). Würden solch vollkommene Instrumente erfunden, so hätte man nun allerdings jenes Gebiet von Aufgaben, die sich nach mathematisch genauen Principien lösen lassen — als bedeutend erweitert anzusehen. Die Anforderungen aber, die man in Bezug auf Einfachheit, Genauigkeit und Verwendbarkeit für die verschiedensten Achsenverhältnisse der zu beschreibenden Kegelschnitte an solche Instrumente zu stellen hat, sind viel zu grosse, als dass sie so leicht zu erfüllen wären; und in der Tat hat sich auch bis jetzt noch keines der vorgeschlagenen mechanischen Hilfsmittel als für eine allgemeine Einführung brauchbar erwiesen, obwohl ein ziemlich vollkommener Ellipsograph, als für eine geschlossene Curve geltend, die meiste Aussicht hiezu hätte.

Das Bedürfniss einer graphischen Lösung der für die praktischen Zwecke mit genügender Genauigkeit zu construirenden Aufgaben dritter und vierter Ordnung macht sich immer noch fühlbar; dass

diess aber durch eine mechanische Beschreibung der Kegelschnitte zu erreichen sein wird, könnte wohl noch lange ein Wunsch der Constructeure bleiben.

Aufstellung des Grundverfahrens.

Führt man nebst dem Lineal und Zirkel noch den rechten Winkel (oder einen starren Winkel überhaupt) als neues Constructionsvehikel ein, so muss hiemit schon die Möglichkeit einer graphischen Behandlung von Aufgaben höherer Ordnung geboten sein. Denn, verwendet man einen rechten Winkel auf der Zeichenebene in der Weise, dass man ihn solange verschiebt bis gleichzeitig der eine Schenkel durch einen Fixpunkt K gehe, der Scheitel auf einer Leitgeraden LL sich befindet, während der andere Schenkel einen Grundkreis K berührt, so lässt sich der Effect dieses Anlegens eines rechten Winkels an die genannten Grundfactoren in zweierlei Weise interpretiren. Es bilden nämlich die Tangentenschenkel der „angelegten" rechten Winkel die vier gemeinschaftlichen Tangenten zwischen dem Grundkreis K und der durch Leitgerade L als Scheiteltangente und Fixpunkt F als Brennpunkt gegebenen Parabel; oder es repräsentiren die Lagen der Scheitelpunkte der rechten Winkel auf der Leitgeraden L die Durchschnittspunkte derselben mit der durch den Grundkreis K und den Fixpunkt F als Mittelpunkt der Lotstrahlen gegebenen, bekannten Kreisfusspunktscurve; (solche Tangenten an K beziehungsweise Schnittpunkte auf L können begreiflicher Weise paarig imaginär werden). Beide Erklärungen aber verificiren die eingangs gemachte Behauptung.

Die vorhin charakterisirte mechanische Verwendung des rechten Winkels zur graphischen Lösung von Aufgaben kann nur dann einen praktischen Wert erlangen, wenn in Folge der Einfachheit und Unmittelbarkeit der Methoden das Resultat mit jenem gewünschten Grad von Genauigkeit erhalten wird, welcher einem solchen nicht nachsteht, der bei den „nach mathematisch genauen" Principien gelösten Aufgaben erreicht wird. Dass dies möglich ist, lässt sich ohne Anstellung von Berechnungen über die Genauigkeitsverhältnisse selbst bei solchen Fällen, welche eine für die Anwendung des Grundverfahrens ziemlich ungünstige gegenseitige Lage der Grundfactoren aufweisen, durch Ausführung von Beispielen einfach und praktisch zeigen. In der Tat sind die Elementaroperationen, aus denen sich das Grundverfahren des „Anlegens eines rechten Winkels" zusammensetzt, sowohl einzeln, wie im Zusammenhange, als mechanische Operation genommen, leicht genau auszuführen.

Der rechte Winkel steht uns jederzeit zur Verfügung in einem geprüften Dreieckswinkel, welcher also die Winkelfläche der Zeichenebene deckt, oder indem man einen rechten Winkel an ein Lineal anlegt, wodurch sich ein solcher mit freigelassener Winkelfläche ergibt. Die passendste Form für vorliegenden Zweck kann aber leicht hergestellt werden, indem man auf einem Blatte gut transparenten Bauspapiers sich ein genaues rechtwinkliges Achsenkreuz verzeichnet, dessen Schnittpunkt durch ein Punktringelchen scharf markirt ist. In diesem primitiven Instrumente, das man beliebig auf dem Zeichenblatt verschieben kann, hat man alle vier Quadranten des Achsenkreuzes als „freie" rechte Winkel zur Verfügung. — Im Grundverfahren hat man nun zunächst als Elementaroperation das Anlegen des einen Winkelschenkels an den Fixpunkt F — die primitivste Zeichenoperation; dann jene Bedingung der Berührung des zweiten Schenkels an den Grundkreis K, welche als Anlegen des Lineals an einen Punkt berührend an einen Kreis betrachtet werden muss. Diese letztere, in der Praxis von den Constructeuren nicht mit Unrecht stillschweigend als zulässig anerkannte und häufig angewendete Elementaroperation ist nichts anderes als die duale Operation zur Schnittbestimmung einer Geraden mit einem Kreise, und sollte deshalb wohl gebilligt werden *). Endlich als dritte Elementaroperation muss angesehen werden die Erfüllung der Bedingung, dass der Scheitelpunkt auf der Leitgeraden LL sich befinde — allerdings eine neue mechanische Operation, welche aber mit „guten" rechten Winkeln (die man wohl ebenso berechtigtigt ist voraus zu setzen, als „gute" Lineale, gute Zirkel), am besten jedoch mit dem früher erwähnten, „verschiebbaren" Achsenkreuz mit der gewünschten Präcision gewiss leicht ausgeführt werden kann. Uebrigens ist das „Anlegen" des rechten Winkel an die Grundfactoren immer noch eine einfachere, weniger Uebung erforderliche Operation als jene (auch zu den mechanischen Operationen zu rechnende) des Ablesens an einem Rechenschieber bei gegenteiliger Schieberstellung oder jene beim Gebrauche der graphischen Rechentafeln vorkommenden.

---

*) Hieher gehört auch das Anlegen eines Lineals berührend an zwei Kreise, dem dual gegenüber der Schnitt zweier Kreise steht, welch' letztere wieder zu den primitivsten Zeichenoperationen gehört. Der den ersteren der genannten Operationen zu machende Einwurf, dass dieselben unsicher werden, wenn der Punkt und Kreis, respective die beiden Kreise zum Anlegen eines Lineals zu nahe aneinander gelegen sind, trifft ganz in derselben Weise auch den allgemein zulässigen dualen Verfahren der Schnittbestimmung, wenn die schneidende Gerade eine dem Kreisradius nahe gleiche Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises besitzt oder beziehungsweise die beiden Schnittkreise sehr nahe aneinander liegende Mittelpunkte mit wenig verschieden langen Radien aufweisen.

Wie später gezeigt werden soll, besitzt das besprochene Grundverfahren auch Modificationen, welche für den Fall einer (für dessen Anwendung) ungünstigen Lage der Grundfactoren, die Genauigkeit des Resultats zu erhöhen im Stande sind — ein Kriterium, das jede zum graphischen Calcul gut verwendbare Methode besitzen soll.

Erweiterung des Grundverfahrens.

Eine nahe liegende Erweiterung für das bis nun besprochene Grundverfahren unter Voraussetzung obiger Grundfactoren besteht darin, dass man die Leitgerade LL durch einen Leitkreis L_k ersetzt. Dies muss consequenterweise gestattet sein, weil ein Kreis, so gut wie die gerade Linie, als scharf zu zeichnendes Gebilde anzusehen ist. Während also der eine Schenkel des „angelegten" rechten Winkels durch den Fixpunkt F geht, befinde sich der Scheitel auf dem Umfange des Leitkreises L_k und berühre der andere Schenkel den Grundkreis K. Die Tangentenschenkel der möglichen Winkellagen repräsentiren nun hier die gemeinschaftlichen Tangenten zwischen dem Grundkreis und jenem Kegelschnitte, der den Fixpunkt F zu einem Brennpunkt und den durch F gehenden Durchmesser von L_k zur Hauptachse hat. Liegt F innerhalb des Kreises L_k, so ist dieser Kegelschnitt eine Ellipse; für F ausserhalb gelegen — eine Hyperbel. Es gibt dann stets einen zu F bezüglich des Mittelpunktes von L_k symmetrisch gelegenen Punkt F', der in derselben Weise wie F als Fixpunkt verwendet werden kann und nun dieselben Tangentenschenkellagen wie F liefert. — Die zweite Interpretation des erweiterten Verfahrens ist auch wieder jener des Grundverfahrens analog. Es bilden nämlich hier die auf dem Leitkreis L_k erhaltenen Lagen der Scheitelpunkte der an die Grundfactoren angelegten rechten Winkel die Schnittpunkte von L_k mit der durch den Grundkreis K und Fixpunkt F als Mittelpunkt der Lotstrahlen gegebenen Kreisfusspunktscurve.

Es ist nun für das ursprüngliche und erweiterte Verfahren die Frage sehr nahe liegend, ob vielleicht durch Anwendung eines beliebig verschiebbaren starren Winkels φ (in derselben Weise wie bis jetzt der rechte Winkel benutzt wurde) sich nun Aufgaben von einem höheren Grade als die für das bisherige Verfahren angedeuteten — graphisch behandeln liessen.

Diese Frage beantwortet sich sofort als verneinend, wenn man nachstehende, einfache Betrachtung anstellt.

In Fig. 1. sei eine beliebige Leitcurve L_c gegeben, auf welcher sich der Scheitel S des Winkels φ bewege, während der eine Schenkel

stets durch den Fixpunkt F gehe, und der andere in einem beliebigen Momente der Bewegung die Lage TT angenommen hätte. Denkt man sich auf alle möglichen Lagen des zweiten der genannten Schenkel aus F die Perpendikel FR gefällt, so lässt sich der geometrische Ort der Punkte R sofort angeben. Während der Bewegung des Winkels φ beschreiben nämlich die Strahlen FS und FR zu einander congruente Strahlenbüschel um F als Träger. Da ferner die Strecken FS und FR für alle homologen Punkte der L_c und der in Rede stehenden Curve der R in dem constanten Verhältnisse $\frac{1}{\sin\varphi}$ stehen, so müssen die Punkte R eine zu L_c ähnliche Curve durchlaufen, deren homologen Punkte gegen jene der L_c um F als Centrum in der Winkelgrösse $(90^0 - \varphi)$ verdreht erscheinen. Das Aehnlichkeitsverhältniss von L_c zur Curve der R ist offenbar $\frac{1}{\sin\varphi}$. Es können demnach die Lagen der freien Schenkel TT auch erhalten werden in jenen eines beweglichen rechten Winkels, dessen einer Schenkel stets durch F geht, während der Scheitel die der Lage nach oben näher definirte, zu L_c ähnliche Curve der R durchläuft.

Dies Ergebniss für unsere mechanischen Verfahren angewendet, in welchen statt der allgemeinen Leitcurve L_c entweder Leitgerade oder -Kreis vorliegen, hat es also hier die Bedeutung des Ersatzes eines allgemeinen Winkels φ durch einen rechten, wenn nur Leitgerade respective Kreis „entsprechend" geändert werden. Diese Aenderung geschieht in dem Uebergange auf ein ähnliches Gebilde im Verhältnisse $1 : \sin\varphi$ bezüglich des Fixpunktes F als Centrum, und nachheriger Verdrehung um dasselbe in der Winkelgrösse $(90 - \varphi)$ nach der Seite, wohin das Perpendikel aus F auf eine der Lagen des freien Schenkels von φ fällt, unter φ immer den spitzen von den bei S auftretenden Nebenwinkeln verstanden.

Umgekehrt lässt sich aber das hier gewonnene Resultat recht gut für eine Hilfsmethode bei unseren mechanischen Verfahren verwerten.

Denken wir uns, dass Leitgerade respective Leitkreis, dann Fixpunkt und Grundkreis in einer für das „Anlegen" eines rechten Winkels verhältnissmässig ungünstigen gegenseitigen Lage gegeben seien, so kann man stets die Anwendung des rechten Winkels durch jene eines beliebigen Winkels φ ersetzen, für welchen die neuen Leitfactoren gegen K und F günstiger gelegen sind. Die neuen Leitfactoren für φ ergeben sich aus jenen für den rechten Winkel nach der bereits oben aufgestellten Regel mit reciprokem Aehnlichkeitsverhältniss und entgegengesetztem Drehungssinn. Dabei kann der Winkel φ in seiner zweckmässigsten Form als das auf einem gut

transparenten Bauspapiere verzeichnete, schiefwinkelige, mit der Neigung φ versehene Achsenkreuz zur Ausführung der mechanischen Verfahren benutzt werden.

Man ersieht indes leicht, dass die besprochene Modificirung der Leitfactoren sich auf den, auch durch unser Resultat gewonnenen, bekannten Satz stützt, dass für einen Kegelschnitt der geometrische Ort der Fusspunkte der aus einem Brennpunkte auf dessen Tangenten unter constantem Winkel gezogenen Strahlen ein Kreis, respective für die Parabel eine Gerade (Tangente) ist.

Wenn nun auch eine solche Modificirung der gegebenen Leitfactoren behufs Anwendung eines Winkes φ aus Genauigkeitsrücksichten sich selten als gar so notwendig herausstellen wird *), so ist es doch als ein bedeutender Wert der mechanischen Verfahren anzusehen, wenn sie wie die anderen auf mathematisch genaue Principien basirbaren graphischen Methoden, Modificationen zur Verbesserung der Genauigkeit des zu erzielenden Resultates aufweisen.

Zum Schlusse mag noch auf eine weitere Consequenz hingewiesen werden, die sich aus dem Grundverfahren ableiten lässt. Ersetzt man nämlich von den bisher gegebenen Grundfactoren auch den Fixpunkt F durch einen Fixkreis F_k, so dass noch Grundkreis und Leitgerade oder Kreis als Grundfactoren gegeben sind, so wird entsprechend dem früheren der rechte Winkel an dieselben nun so „anzulegen" sein, dass, während seine Scheitel sich auf der Leitgeraden oder dem Leitkreis befindet, seine beiden Schenkel Tangenten an F_k und K sein müssen. Die sich ergebenden Lagen des Scheitels des rechten Winkels auf den Leitfactoren müssen demnach angesehen werden als die Durchschnittspunkte der letzteren mit einer Art Fusspunktscurve, die sich aus Fixkreis F_k und Grundkreis K in der Weise ableitet, dass für jede Tangente des einen dieser Kreise, die Fusspunkte der hiezu senkrechten Tangenten des andern Kreises Punkte der Curve bilden. Diese Art der Verallgemeinerung des Grundverfahrens involvirt in der Tat die Behandlung von Aufgaben von einem höheren als dem vierten Grade.

*) Die Betrachtungen der Lagen- und Grössenverhältnisse der Grundfactoren unter Rücksicht auf die Genauigkeit des durch unsere mechanischen Verfahren zu erzielenden Resultates führen zu einem für dieselben recht günstigen Ergebniss. Während zuweilen der eine Schenkel des „angelegten" rechten Winkels wegen zu schiefer Neigung zur Leitgeraden die Lage des Scheitels auf derselben nicht präcis genug angibt, ersetzt diesen Mangel sofort der andere, auf ihm senkrechte Schenkel. Die ungünstigste Stellung scheint einzutreten, wenn der Fixpunkt sehr nahe der Leitgeraden, beziehungsweise dem Leitkreise zu liegen kommt.

Da das hier gesetzte Ziel nur in einer graphischen Behandlung der kubischen und biquadratischen Gleichungen besteht, so genügt hiezu die Anwendung des ursprünglichen Grundverfahrens, wobei nur eine Leitgerade als Leitfactor gegeben ist, in ausreichender Weise, so dass es nicht notwendig wird, von dem ausführlich besprochenen erweiterten Verfahren oder der zum Schlusse angedeuteten Consequenz in der Folge einen Gebrauch zu machen.

Bemerkungen zur Behandlungsart des Themas.

Die Inangriffnahme des gestellten Problems erheischt vor Allem die Auffindung jener Beziehungen, welche zwischen den Bestimmungsstücken der Lagen- und Grössenverhältnisse unserer Grundfactoren und den mittelst der Anwendung des mechanischen Grundverfahrens erzielten Resultate, analytisch ausgedrückt, bestehen, um jene einfachsten auswählen zu können, die zu einem Vergleiche mit den zu lösenden Gleichungen sich am besten eignen. Aus solchen Vergleichungen sind die nötigen Daten zur Verzeichnung der Grundfactoren abzuleiten, auf welche das mechanische Verfahren angewendet, die verlangte Lösung der ursprünglich gegebenen Gleichungen erhalten werden muss.

Wenn nun durch diese Methode im Principe jedes Problem 3ter und 4ter Ordnung behandelt werden kann, nachdem bloss die hiezu nötigen analytischen Gleichungen aufzustellen sind, so wird man auch bei den zumeist eleganteren synthetischen Lösungen von Constructionsaufgaben, die in letzter Linie auf die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte basirt sind, für die graphische Behandlung den rechten Winkel gemäss dem Grundverfahren in Anwendung bringen können. Man hat dann im Allgemeinen das System besagter Hilfskegelschnitte in ein solches collinear verwandtes über zu führen, wo einem der Kegelschnitte ein Kreis entspricht (der dann als Grundkreis K zur Geltung kommt) und von der dem anderen verwandten Curve die Hauptachsen (beziehungsweise Brennpunkte) anzugeben sein werden. Die gemeinsamen Tangenten zwischen Kreis und dem letzt genannten Kegelschnitt sind dann in das ursprüngliche System zurückzuführen. Häufig gelingt durch zweckentsprechende Wahl von Collineationsachse und Centrum eine derartige Ausführung dieser Transformation, dass, während dem einen der ursprünglichen Kegelschnitte im neuen System ein Kreis entspricht, dem andern eine Parabel homolog ist, wodurch dann die Ermittlung der gemeinsamen Tangenten im ersten System auf das „Anlegen" eines rechten Winkels an Fixpunkt, Leitgerade und Grundkreis im zweiten System zurückgeführt erscheint.

Als ein hieher gehöriges Beispiel möge die graphische Bestimmung von $\sqrt[3]{y}$, unter y eine beliebige reelle Zahl oder eine Strecke verstanden, im Folgenden etwas näher besprochen werden.

Trägt man in Fig. 2. $Of = 1$ und $OF = y$ auf die Achsen auf, und wäre man im Stande den Linienzug $FGHf$ anzugeben, der bei G und H rechte Winkel aufweist, so erhielte man in der Strecke OH sofort die $\sqrt[3]{y}$. GH stellt aber nichts anderes vor als eine gemeinsame Tangente jener zwei Parabeln, die in O ihren gemeinschaftlichen Scheitel haben und deren Achsen respective Brennpunkte in Ox, Oy, resp. f, F sich befinden. GH steht nämlich gleichzeitig auf den Strahlen GF und HF senkrecht, welche man aus den Brennpunkten zu den Schnittpunkten der ersteren mit den Scheiteltangenten der Parabeln ziehen kann. Denkt man sich eine der Parabeln, z. B. jene mit dem Brennpunkt f, sehr genau construirt, so könnte mit Hilfe derselben und durch „Anlegen" eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel durch F gehe, während der Scheitel auf der Ox sich befinde und der andere Schenkel die Parabel berühre, sofort die Lage der gemeinsamen Tangente GH und damit $OH = \sqrt[3]{y}$ erhalten werden. Bei Benutzung einer schon vorhandenen, sehr genau verzeichneten Parabel, deren Abstand des Brennpunktes vom Scheitel als Constructionseinheit genommen werden muss, lässt sich auf diese Weise für beliebige Werte von y unmittelbar die $\sqrt[3]{y}$ mit einer für das graphische Rechnen ausreichenden Genauigkeit herstellen. Graphische Methoden setzen ja oft Curven höherer Ordnung voraus, die erst mühsam construirt werden müssen, während hier nur eine genau verzeichnete Parabel verlangt wird.

Die oben definirte Lage der GH kann auch noch in anderer Weise aufgefasst werden.

Sind F und f die Träger zweier congruenter Strahlenbüschel, deren homologe Strahlen zu einander parallel laufen, so werden dieselben durch Ox und Oy in projectivischen Punktreihen geschnitten, deren Erzeugniss eine gleichseitige Hyperbel ist, die Ox und Oy zu Asymptoten hat, und deren reelle Achse, den Winkel FOf halbirend, die Länge $2a = \sqrt{2y}$ besitzt. Die Lage der Geraden GH bildet nun auch eine Tangente an diese Hyperbel und nach früher auch eine solche der oben bezeichneten Parabeln. Ersetzt man die Bedingung, dass GH Parabeltangente sein muss, durch jene des „Anlegens" eines rechten Winkels ganz in derselben Weise wie früher, wobei also jetzt die gleichseitige Hyperbel von dem einen Winkelschenkel berührt werden muss, so erhält man in demselben die Lage von GH

und damit $\sqrt[3]{y}$. Dass auch hier wieder jede vorliegende gleichseitige Hyperbel zweckmässig verwendet werden kann, ist selbstverständlich; die Achse derselben repräsentirt dann die Strecke $\sqrt{2y}$, woraus sich die Massstabeinheit zum Messen von $\sqrt[3]{y}$ ableitet.

Wie sich die Bestimmung der gemeinsamen Kegelschnittstangente GH in beiden besprochenen Auffassungen zurückführen lässt auf jene zwischen einem Kreis und einen Kegelschnitt wurde schon für den allgemeinen Fall erörtert. — Die Durchführung derselben in dem vorliegenden, wo die gegebenen Kegelschnitte eine besonders günstige gegenseitige Lage besitzen, kann weiter keine Schwierigkeiten bieten.

Wird die Bestimmung der Hauptachsen (respective Brennpunkte) jenes Kegelschnitts des transformirten Systems, für welchen eben die gemeinsamen Tangenten mit dem Kreise durch „Winkelanlegen" erhalten werden, umständlich, so leidet hierunter die Genauigkeit des Schlussresultates wesentlich. Dies wird schon in unserm speciellen Fall bei Ermittlung von GH merklich fühlbar.

Nachdem die zur Ausführung von solchen Kegelschnitts-Transformationen nötigen Constructionen längst zu den bekannten gehören, das Problem des graphischen Kubikwurzelziehens aber später ohnehin durch zweckmässigere Verfahren gelöst wird, so kann die constructive Durchführung eines hieher gehörigen Beispieles demnach füglich unterbleiben.

Behandlung der kubischen Gleichungen.

Schneidet man die zwischen einem Kreise und einer Parabel möglichen vier Tangenten durch eine beliebige Transversale, so repräsentiren die Strecken von einem gegebenen Punkte derselben bis zu den erhaltenen Schnittpunkten mit den ersteren die vier Wurzeln einer biquadratischen Gleichung, die sich zur Berechnung jener Strecken aus den Tangentenbedingungen unter Voraussetzung der die Grösse und Lage des Kreises gegen Parabel und Transversale bestimmenden Dimensionen aufstellen lässt. Kreis, dann Scheiteltangente und Brennpunkt der Parabel bilden beziehungsweise Grundkreis, Leitgerade und Fixpunkt für Anwendung des Grundverfahrens, wobei also die Tangentenschenkel der rechten Winkel jene gemeinsamen Curventangenten darstellen werden.

Soll nun aber durch einen solchen Transversalschnitt die Lösung von kubischen Gleichungen erzielt werden, so ist entweder eine jener vier gemeinschaftlichen Tangenten selbst als die bekannte Trans-

versale der übrigen drei zu nehmen, oder aber allgemeiner eine beliebig gelegte Transversale mit den vier gemeinschaftlichen Tangenten zu schneiden, von welchen jedoch eine, als durch die specielle Lage der Grundfactoren bekannt oder gegeben vorausgesetzt werden muss. Der dieser letzteren entsprechende Wurzelwert auf der Transversalen ist nun gleichfalls bekannt und repräsentiren die den übrigen entsprechenden, solche einer kubischen Gleichung. Zum vorliegenden Zwecke werden nur jene Transversalen brauchbar sein, für welche die aufgestellten Gleichungen der Schnittpunkte Coefficienten der Unbekannten aufweisen, die sich in einfachst möglicher Form aus den Grössen- und Lagendimensionen der Grundfactoren zusammensetzen. Der Spielraum in der Wahl bei der Lage der Grundfactoren und Transversalen ist wohl bedeutend und lässt sich von vorneherein auf die Existenz von mehr als einer Lösungsmethode einer Gleichung schliessen, so dass man für einen Specialfall mit Rücksicht auf Einfachheit und Genauigkeit wird auswählen können.

In der Theorie der kubischen Gleichungen bildet die Lösung der einen kubischen Gleichung

$$y^3 - a = 0, \quad \text{d. i.} \quad x = \sqrt[3]{a}$$

den Ausgangspunkt für jene der reducirten; bei der graphischen Behandlung ergiebt sich die Methode des Kubikwurzelziehens als ein specieller Fall der Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung oder indirect aus jener der reducirten. Die vollständigen Gleichungen können sofort in ihrer gegebenen Form zur Behandlung gelangen, ohne dass es nötig wird, wie dies bei der Auflösnng in gewöhnlicher Weise zu geschehen pflegt, dieselben vorher auf reducirte zu transformiren.

Die allgemeinste Form der vollständigen kubischen Gleichungen möge durch

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

dargestellt sein, wobei unter a, b und c nicht blos die numerischen Werte der Coefficienten, sondern auch ihre Qualitätswerte miteinbegriffen sein sollen. Bekanntlich hat diese Gleichung, je nachdem der Coefficienten-Ausdruck

$$\begin{vmatrix} (3b - a^2) & (9c - ab) \\ (9c - ab) & 4(3ac - b^2) \end{vmatrix} \begin{matrix} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{matrix}$$

ist, beziehungsweise 1 reelle und 2 imaginäre, dann 3 reelle, darunter 2 gleiche oder 3 reelle von einander verschiedene Wurzeln (irreducibler Fall). Diese Unterscheidung wird jedoch bei der graphischen

Behandlung im Allgemeinen die Methode nicht beeinflussen. Alle kubischen Gleichungen besitzen wenigstens eine reelle Wurzel und muss dieselbe stets durch das mechanische Verfahren erhalten werden können, während die beiden anderen, wenn reell — auch direct, wenn imaginär — aber durch Lösung einer weiteren Aufgabe von der 2ten Ordnung sich ergeben müssen. In dem Falle zweier gleicher Wurzeln, lassen sich übrigens die Werte der Wurzeln rational durch die Coefficienten ausdrücken. Unter Voraussetzung, dass obiger Determinantenausdruck verschwindet, wird also die gleiche Wurzel

$$y_1 = y_2 = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{9c - ab}{3b - a^2}$$

und die davon verschiedene dritte Wurzel

$$y_3 = -(2y_1 + a) = \frac{9c - a(4b - a^2)}{3b - a^2}.$$

Liefern diese Ausdrücke die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, so ist dies ein Zeichen vom Vorhandensein dreier gleicher Wurzeln, deren Bestehen also an die Bedingungen geknüpft ist, dass

$$9c = ab \quad \text{und} \quad 3b = a^2$$

wird, womit das Gleichungspolynom in einen vollständigen Kubus übergeht, und die gleiche Wurzel den Wert

$$y_1 = y_2 = y_3 = -\frac{a}{3}$$

besitzt.

Behufs Aufstellung der analytischen Ausdrücke für die Transversalschnitte wird folgende Wahl des Achsensystems zweckentsprechend sein.

Wir haben nach früher eine gemeinschaftliche Kreis-Parabel-Tangente als bekannt vorauszusetzen und nehmen dieselbe (Fig. 3.) gleich zur y Achse, während wir den zum Berührungspunkt des Kreises gehörigen Durchmesser als Lage der x Achse wählen. Der Fixpunkt F, darauf bezogen, hätte die Coordinaten e und f, und die Leitgerade L muss in der Höhe f über dem Ursprung die y Achse schneiden, ist aber sonst in der unabhängigen Neigung φ gegen die x Achse vorauszusetzen. Der Kreisradius sei mit r bezeichnet.

Eine unbestimmte Kreistangente

$$\frac{y}{n} + \frac{x}{m} - 1 = 0$$

mit den Achsenabschnitten n und m, hat sich mit dem aus F darauf errichteten Lote

$$\frac{y}{m} - \frac{x}{n} + \left(\frac{e}{n} - \frac{f}{m}\right) = 0$$

auf der Leitgeraden L

$$y - \operatorname{tg}\varphi \, . \, x - f = 0$$

bedingungsweise in einem Punkte zu schneiden. Dies ist sofort in dem Verschwinden der Resultante dieses Gleichungssystems, also in

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n}, & \frac{1}{m}, & -1 \\ \frac{1}{m}, & \frac{-1}{n}, & \frac{e}{n} - \frac{f}{m} \\ 1, & -\operatorname{tg}\varphi. & -f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \frac{n}{m}, & -n \\ \frac{n}{m}, & -1, & e - f\frac{n}{m} \\ 1, & -\operatorname{tg}\varphi, & -f \end{vmatrix} = 0$$

ausgedrückt. Nach leichter Reduction und Auswertung der Determinante findet man für $\frac{a}{m}$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{n}{m} + \operatorname{tg}\varphi, & f - n \\ \frac{n}{m}\operatorname{tg}\varphi - 1, & e \end{vmatrix} = (e - f\operatorname{tg}\varphi + n\operatorname{tg}\varphi)\frac{n}{m} + e\operatorname{tg}\varphi + f - n = 0$$

Daraus und aus der Bedingung, dass n und m einer Kreistangente angehören, ergeben sich (zur Elimination von m) die beiden Werte für $\frac{n}{m}$ in

$$\frac{n}{m} = \frac{f + e\operatorname{tg}\varphi - n}{f\operatorname{tg}\varphi - e - n\operatorname{tg}\varphi} = \frac{n^2 - r^2}{2rn}$$

Ordnet man die letzte Gleichstellung nach n, so ergibt sich zunächst eine Bedingung hiefür in

$$n^3 - (f - e.\operatorname{ctg}\varphi + 2r.\operatorname{ctg}\varphi)n^3 + r(2f\operatorname{ctg}\varphi + 2e - r).n + r^2)(f - e\operatorname{ctg}\varphi) = 0 \quad (1)$$

Eine zweite resultirt durch Einführung der beiden Werte von $\frac{n}{m}$ in die Tangentengleichung

$$y + x\frac{n}{m} - n = 0$$

und erscheint nach Ordnung für n in der zweifachen Form

$$\left.\begin{array}{l}(x-2r)n^2+2ry.n-r^2.x=0\\ n^2-(y+x\operatorname{ctg}\varphi+f-e\operatorname{ctg}\varphi)n+[x(f\operatorname{ctg}\varphi+e)+y.(f-e\operatorname{ctg}\varphi)]=0\end{array}\right\} \quad (2)$$

Nimmt man daher obige Gleichung (1) am besten mit ersterer der letzten (2) zusammen und eliminirt daraus u, so muss sich als Ausdruck für die drei gemeinschaftlichen Tangenten zwischen Grundkreis und Parabel („LL, F") ergeben.

Es wird nun nicht nötig die Elimination für den allgemeinsten Fall durchzuführen, weil für zweckentsprechende Transversalschnitte die Ausdrücke durch einfache Substitutionen erhalten werden können. Solche Transversalen, für welche voraussichtlich bemerkenswerte Ausdrücke sich ergeben dürften, entnimmt man aus den Tangentengleichungen (2). Diese liefern für die Schnittgeraden

$$x=0, \quad x=2r \quad \text{und} \quad (f-e\operatorname{ctg}\varphi)y+(f\operatorname{ctg}\varphi+e)x=0$$

beziehungsweise die Werte für das zu eliminirende u in

$$n=y, \quad n=\frac{r^2}{y} \quad \text{und} \quad n=(y+x\operatorname{ctg}\varphi+f-e\operatorname{ctg}\varphi);$$

hievon wollen wir im Allgemeinen jedoch nur vom ersten, das ist dem Schnitt der y Achse Gebrauch machen und die letzteren nur für specielle Lagen von F und L später zur Anwendung bringen.

Die Gleichung für die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Kreis-Parabel-Tangenten (oder Tangenten-Schenkel der „angelegten" rechten Winkel) mit der y Achse ist demnach, obige (1) in y geschrieben:

$$y^3-(f-e\operatorname{ctg}\varphi+2r\operatorname{ctg}\varphi)y^2+r(2f\operatorname{ctg}\varphi+2c-r)y+(f-e\operatorname{ctg}\varphi)r^2=0 \quad (I)$$

Vergieicht man dieselbe mit der vollständigen kubischen, so ergeben sich zur Berechnung der Grössen r, $\operatorname{ctg}\varphi$, e und f nur die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= -(f-c\operatorname{ctg}\varphi+2r\operatorname{ctg}\varphi)\\ b &= r(2f\operatorname{ctg}\varphi+2e-r)\\ c &= r^2(f-e\operatorname{ctg}\varphi)\end{aligned}$$

wobei also eine Unbekannte noch willkürlich anzunehmen bleibt. Als diese wird offenbar der Grundkreisradius r zu wählen sein, und man findet aus der ersten und dritten den Wert von

$$\operatorname{ctg}\varphi=-\frac{c+ar^2}{2r^3}$$

wodurch sich zur Bestimmung von e und f aus den beiden letzten die Beziehungen herleiten

$$2r^3 e - (c + ar^2) f = (b + r^2) r^2 \qquad (g)$$

$$(c + ar^2) e + 2r^3 f = 2rc \qquad (g')$$

Statt dieselben nach e und f aufzulösen, kann man bemerken, dass sich $F(e, f)$ einfacher ergibt aus dem Schnitt der beiden durch die letzten Gleichungen repräsentirten, aufeinander senkrechten Geraden g und g'. Diese selbst werden am raschesten durch ihre Achsenschnitte $g_{x,y}$ und $g_{x,y}'$ zu verzeichnen sein. Um gleich für alle Fälle die Ausdrücke zusammenzustellen, hat man für die reducirten $a = 0$ und für die einen kubischen Gleichungen $a = 0$ und $b = 0$ zu setzen; ausserdem dürfte es in den meisten Fällen vorteilhaft sein, den Grundkreisradius r gleich der Constructionseinheit zu wählen, wofür die Ausdrücke noch angegeben werden mögen.

A. Vollständige kub. Gleichungen.

r allgemein	und $r = 1$
$g_x = \frac{b + r^2}{2r}, \quad g_y = -\frac{(b + r^2) r^3}{c + ar^2}$	$g_x = \frac{b+1}{2}, \quad g_y = -\frac{b+1}{a+c}$
$g_x' = \frac{2rc}{c + ar^2}, \quad g_y' = \frac{c}{r^2}$	$g_x' = \frac{2c}{a+c}, \quad g_y' = c$

Für obigen Wert von $\operatorname{ctg} \varphi$ kann man demnach einführen

$$\operatorname{ctg} \varphi = -\frac{c + ar^2}{2r^3} = -\frac{c+a}{2} = \frac{g_x}{g_y} = -\frac{g_y'}{g_x'},$$

woraus man sogleich erkennt, dass die Leitgerade L entweder parallel läuft zu den bezüglich den Coordinatenachsen zur Geraden g zu verzeichnenden symmetrischen Linien oder aber auf jenen der Geraden g' senkrecht steht.

B. Reducirte kub. Gleichungen.

r allgemein	und $r = 1$
$g_x = \frac{b + r^2}{2r}, \quad g_y = -\frac{(b + r^2) r^2}{c}$	$g_x = \frac{b+1}{2}, \quad g_y = -\frac{b+1}{c}$
$g_x' = 2r, \quad g_y' = \frac{c}{r^2}$	$g_x' = 2, \quad g_y' = c$
$\operatorname{ctg} \varphi = -\frac{c}{2r^3}$	$\operatorname{ctg} \varphi = -\frac{c}{2}$

C. Reine kub. Gleichungen oder $y = \sqrt[3]{-c}$.

$g_x = \frac{r}{2}, \quad g_y = -\frac{r^4}{c}$	$g_x = \frac{1}{2}, \quad g_y = -\frac{1}{c}$
$g_x' = 2r, \quad g_y' = \frac{c}{r^3}$	$g_x' = 2, \quad g_y' = c$

$\operatorname{ctg}\varphi$ wie oben.

Das ganze Verfahren zur graphischen Lösung von kubischen Gleichungen besteht zuerst in der Verzeichnung der Grundfactoren, an welche dann der rechte Winkel „anzulegen" ist, dessen Tangentenschenkel auf der y Achse die verlangten Wurzelwerte abschneidet.

Nach zweckmässiger Wahl in der Grösse des Grundkreises wird man den Fixpunkt F durch den Schnitt der beiden Geraden g und g' darstellen. Von den letzteren verzeichnet man zuerst die, einfachere Ausdrücke der Achsenschnitte aufweisende g', während g durch den Punkt g_x auf g' senkrecht zu führen ist und F bestimmt. Wird dessen Ordinate auf der y Achse irgendwie übertragen, so ist durch den erhaltenen Punkt (y Achsenschnitt) die Leitgerade nach der oben näher angegebenen Richtung zu führen, oder man kann auch den x Achsenschnitt der letztern bestimmen, wenn man die Grösse g_x auf der x Achse vom Abscissenpunkt e des Punktes F nach der dem Vorzeichen von g_x entgegengesetzten Richtung abträgt. Die Construction der Ausdrücke wird selbst bei allgemeinen r, die nicht in Masszahlen ausgedrückt zu werden brauchen, verhältnissmässig einfach und soll deshalb hier nicht weiter darauf eingegangen werden. Ergeben sich die Grundfactoren in einer für die Anwendung des mechanischen Verfahrens ungünstigen Lage, so kann dieselbe bei Aenderung des Wertes von r stets leicht behoben werden, was als Vorzug der Methode bezeichnet werden muss.

Schleifende, ungenaue Schnitte der Tangentenschenkel mit der y Achse werden eintreten bei extrem kleinen oder grossen Wurzelwerten (in Bezug auf die Grösse von r genommen). Um in solchen Fällen die Schnittpunkte genauer zu erhalten, wird man im ersteren den scharf bestimmten Berührungspunkt des Tangentenschenkels und Grundkreises mit dem Punkte $x = 2r$ verbinden und hiezu die Parallele durch den Kreismittelpunkt ziehen, welche nun unter sehr günstigem Winkel die y Achse im verlangten Punkte trifft. Im zweiten Falle — bei grossen Wurzelwerten — verzeichne man sich den zum Coordinatenursprung bezüglich des Tangentenschenkels symmetrisch gelegenen Punkt und hat dann durch denselben auf dessen Verbindungslinie mit dem x Achsenschnittpunkt des Tangentenschen-

kels eine Senkrechte zu errichten. Diese wird nun in einem doppelt so grossen Winkel als eben der Tangentenschenkel mit der y Achse einschliesst, die letztere im verlangten Punkte treffen. Sollte selbst dieser Winkel für die Genauigkeit des Schnittes noch zu klein sein, so ist er nach demselben Verfahren weiter zu verdoppeln u. s. f.

Zur Construction von $\sqrt[3]{-c}$ soll noch bemerkt werden, dass bei grossen Radicanden die Wahl von $r = 1$ unzweckmässig wird, und r als beliebig grosse ganze Zahl zu nehmen ist, wodurch ein genaueres Resultat erzielt werden kann. Die Fixpunkte F für sämmtliche Werte des Radicanden von $-\infty$ bis $+\infty$ liegen alle auf einem Kreise, der über die Punkte $x = \frac{r}{2}$ und $x = 2r$, als Durchmesserenden, beschrieben werden kann. Gleichzeitig wird man hier stets die graphische Probe über die Richtigkeit des Resultates durchführen (Fig. 4). Man hat behufs dessen den Punkt $y = \sqrt[3]{-c}$ mit Punkt $x = +1$ zu verbinden und hiezu durch den Punkt $y = +c$ die Parallele bis zur x Achse zu ziehen. Diese wird die Strecke $x = -\sqrt[3]{c^2}$ daselbst abschneiden. Bei richtiger Construction wird dann letztere Parallele lotrecht stehen auf der Verbindungslinie dieses Punktes $x = -\sqrt[3]{c^2}$ mit dem Punkte $y = \sqrt[3]{-c}$.

Ein Verfahren für das graphische Kubikwurzelziehen, bei welchem für beliebige Werte des Radicanden immer derselbe Fixpunkt für das mechanische „Winkelanlegen" zur Benutzung kommt, soll später indirect aus der Lösung einer reducirten Gleichung abgeleitet werden.

Darstellung der imaginären Wurzelwerte.

Einer wesentlichen Ergänzung bedarf vorstehende Lösungsmethode dann, wenn die gegebene kubische Gleichung nur eine reelle Wurzel hat, indem es sich um die Darstellung der beiden übrigen imaginären Wurzeln handeln wird. Das Kriterium dieses Falles wurde schon oben angegeben und hiezu bemerkt, dass letztere Aufgabe nur mehr eine solche 2ter Ordnung ist, den reellen Wurzelwert, der immer durch das mechanische Verfahren gefunden werden kann, als bekannt voraussetzend. Werde derselbe mit w_1 bezeichnet, so ist das Gleichungspolynom durch $(y - w_1)$ teilbar, und der Quotient der Division ist die betreffende Gleichung 2ten Grades, deren Wurzeln die fehlenden der kubischen sind. Man hat also:

$$(y^3 + ay^2 + by + c) : (y - w_1) = y^2 + (w_1 + a)y + [w_1(w_1 + a) + b] = 0$$

da voraussetzungsgemäss

$$w_1^3 + aw_1^2 + bw_1 + c = 0$$

sein muss. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung, deren Coefficienten wir mit

$$w_1 + a = 2\alpha \quad \text{und} \quad (2w_1\alpha + b) = \beta^2$$

bezeichnen wollen, finden sich als complexe Zahlen, in Punkten der Ebene dargestellt, in welchen der Kreis aus dem Ursprung als Mittelpunkt mit dem Radius β beschrieben von der durch den Punkt $y = -\alpha$ zur x Achse gezogenen Parallelen geschnitten wird. In Fig. 3. ist das Beispiel der graphischen Lösung von

$$y^3 - y^2 + 5y - 33 = 0$$

durchgeführt und wurde nach Verzeichnung von F und L (bei der Annahme von $r = 2$) die reelle Wurzel $w_1 = +3$ erhalten. Somit ist

$$\alpha = +1, \quad \beta = \sqrt{11} \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} w_2 \\ w_3 \end{matrix}\right\} = -1 \mp \sqrt{-10}$$

Für reducirte Gleichungen wird

$$\alpha = \frac{w_1}{2}, \qquad \beta = \sqrt{w_1^2 + b}$$

Für die reinen kubischen oder die Kubikwurzel ist dann

$$\alpha = \frac{w_1}{2}, \qquad \beta = w_1$$

d. h. die Punkte w_1, w_2, w_3, welche die gleichnamigen Wurzelwerte darstellen, sind die Punkte der Dreiteilung des Kreises mit dem Radius w_1 aus O. In Fig. 4. kamen sie gleichfalls zur Verzeichnung.

Eine zweite Methode der Darstellung imaginärer Wurzelwerte, die mehr wissenschaftliches Interesse hat, soll an demselben Gleichungsbeispiele der obigen Fig. 3. nun in Fig. 5. durchgeführt werden. Man gelangt hiezu durch folgende Betrachtungen.

Nachdem durch das mechanische Verfahren aus K, L und F der reelle Wurzelwert, also Punkt w_1 abgeleitet wurde, hat man zu bedenken, dass die noch fehlenden Werte in den Schnittpunkten des imaginären Tangentenpaares zwischen Grundkreis und Parabel (LF) mit der transversalen y Achse repräsentirt sind. Dieses heisst mit anderen Worten, sucht man zuerst den reellen Contingenzpunkt dieser conjugirten Tangenten, so sind die Punkte, welche die imaginären Wurzelwerte darstellen, die beiden imaginären Doppelpunkte jener Punkteinvolution, die auf der y Achse durch eine Strahleninvolution erzeugt wird, welche für jenen Contingenzpunkt als Träger in Bezug auf einen der Kegelschnitte (Kreis oder Parabel) gegeben erscheint.

Die imaginären Doppelpunkte aber ersetzen sich durch reelle der Ebene, die zu beiden Seiten des Trägers (y Achse) als Mittelpunkte von rechtwinkligen Strahleninvolutionen auftreten, die zur Punkteinvolution perspectivisch liegen. Es kommt also zunächst darauf an jenen reellen Contingenzpunkt der beiden imaginären gemeinsamen Kreis-Parabeltangenten — wir wollen ihn mit ω bezeichnen — aus dem bekannten Contingenzpunkt w_1 abzuleiten.

Behufs dessen suche man den Schnittpunkt P der homologen (Berührungspunktsverbindungen) OT und O_pT_p, so ist derselbe der Schnittpunkt jener beiden gemeinschaftlichen Kreis-Parabel-Secanten, die als Collineationsachsen sowohl zu w_1 als auch ω als Centra einer collinear verwandten Zuordnung von Kreis und Parabel genommen werden können. Es muss daher die gemeinsame Polare pp des Punktes P in Bezug auf Kreis und Parabel jenen Punkt ω enthalten. Zieht man eine jener gemeinschaftlichen Kreis-Parabel-Secanten durch P, deren Richtung AX_∞ durch die Gegenachse uAX_∞ bestimmt ist (welche eine Kreistangente zu dem dem unendlichfernen Punkte u_∞ der Parabel entsprechenden Kreispunkte u sein muss), so schneidet dieselbe die vorhandenen Kreistangenten der w_1 in δ und δ'. Verzeichnet man sich die aus den letztern Punkten noch möglichen zweiten Kreistangenten und ordnet nun die Berührungspunkte s und q beziehungsweise jenen T_p und O_p zu, so müssen sich die Strahlen sT_p, s_pT, sowie qO_p auf der Polaren pp im fraglichen Contingenzpunkte ω schneiden; s_p ist nämlich der dem Kreispunkte s homologe Parabelpunkt und fällt hier zufällig mit dem Parabelscheitel zusammen.

Nachdem ω gefunden ist, gibt das rechtwinklig entsprechende Strahlenpaar der Involution d. i. ωoR, $\omega R'$ die beiden entsprechenden Punkte R und R', über welche als Durchmesserenden der Kreis $\varkappa$ zu verzeichnen kommt. Ein zweites Punktepaar würde gleichfalls einen solchen Kreis liefern, der wie $\varkappa$ jene imaginär ersetzenden, reellen Punkte der Ebene enthalten müsste. Einfacher werden dieselben aus dem Involutionscentrum J abgeleitet, da sie im Schnitte des Kreises $\varkappa$ mit der Senkrechten w_1Jw_2 durch J geführt, gleichfalls sich ergeben müssen. Das Involutionscentrum J aber bestimmt sich durch den Strahl Jwi, welcher dem durch ω zur y Achse parallel gezogenen Strahl der Involution homolog ist; der Punkt i auf der x Achse gelegen — ist der Pol dieses Strahles als Polare bezüglich des Kreises.

Die erhaltenen Punkte w_2 und w_3 sind die Träger jener rechtwinkligen, zur Punkteinvolution perspectivisch liegenden Strahleninvolution, und zugleich die graphische Darstellung der complexen Werte der noch fehlenden imaginären Wurzeln unserer gegebenen kubischen Gleichung.

Das vorstehende Verfahren kann auch in dem Falle angewendet werden, wenn die kubische Gleichung drei reelle Wurzeln hat und einer oder zwei dieser Werte sich durch das mechanische Verfahren ungenau ergeben würden.

Man kann jedoch in einem solchen Falle zur genaueren Bestimmung einer der Wurzeln eine aus der Theorie der kubischen, für reducirte Gleichungen geltende Relation benutzen. Verlegt man nämlich den Ursprung O, d. i. den Anfangspunkt der Zählung um die Grösse $\left(-\frac{a}{3}\right)$ nach O', so werden bekanntlich für den neuen Anfangspunkt O' die Wurzelwerte zu solchen einer reducirten Gleichung und für diese gilt der Satz, dass die algebraische Summe je zweier Wurzeln gleich ist dem Entgegengesetzten der dritten. Sind also zwei von den Wurzelwerten genau, so lässt sich darnach der dritte, unsichere corrigiren.

Transversalschnitte für specielle Lagen der Grundfactoren.

Obwohl im Vorstehenden das Problem der mechanisch-graphischen Lösung der kubischen Gleichungen im Allgemeinen und Speciellen durchgeführt erscheint, sollen hier doch noch einige Transversalschnitte hervorgehoben werden, welche bei besonderen Lagen von L und F gegen K bemerkenswerte Resultate liefern, die sich zwar weniger für vollständige, aber recht gut für reducirte kubische Gleichungen verwenden lassen.

Lässt man die Leitgerade L mit der y Achse zusammenfallen, so ist in obige Gleichung (1)

$$\operatorname{ctg}\varphi = 0$$

einzuführen, wodurch sie übergeht in

$$n^3 - fn^2 + r(2e - r)n + fr^2 = 0 \tag{3}$$

und mit

$$(x - 2r)n^2 + 2ryn - r^2x = 0 \tag{2}$$

zusammen zu nehmen ist, um die unbestimmte Grösse n zu eliminiren. Dies kann wieder im Besonderen geschehen für $x = 0$ und $x = 2r$, welche beziehungsweise liefern $n = y$ und $n = \frac{r^2}{y}$. Darnach werden die Ausdrücke für den y Achsenschnitt, respective den der parallelen Kreistangente

$$y^3 - fy^2 + r(2e - r)y + fr^2 = 0 \tag{4}$$

$$y^3 + (2e - r)\frac{r}{f}y^2 - r^2y + \frac{r^4}{f} = 0 \tag{5}$$

Mit ersterem lassen sich Gleichungen behandeln von der Form

$$y^3 - ay^2 \pm by + c = 0$$
$$y^3 + ay^2 \pm by - c = 0$$

mit letzterem die unter die Gruppen

$$y^3 \pm ay^2 - by \pm c = 0$$

gehörigen bei beliebiger Variation der Vorzeichen von a und c. Hiebei sind aber unter a, b und c nur die numerischen Werte der Coefficienten verstanden. Gleichzeitige Aenderung der Vorzeichen von a und c in die entgegengesetzten und die Beibehaltung des Zeichens von b involvirt nur den Uebergang zu einer Gleichung mit den numerisch gleichen aber entgegengesetzt bezeichneten Wurzeln der ursprünglichen.

Die Vergleiche der allgemeinen Formen mit (4) und (5) ergeben Relationen, aus denen sich die Bestimmungsgrössen r, e und f leicht durch die bekannten Coefficienten a, b und c reell ausdrücken lassen. Es möge jedoch nur darauf hingewiesen werden, da die Ausführung weiter keine Schwierigkeiten bietet. Uebrigens lassen sich diese Resultate nicht so zweckmässig anwenden, als jene, welche sich bei der allgemeinen Lage von L ergaben. Diese Bemerkung gilt übrigens auch für die wenigen noch später zu entwickelnden allgemeinern Fälle.

Specialisirt man die Abscisse des Fixpunktes F auf $e = \frac{r}{2}$, so ergibt sich für den Ausdruck (5) die reducirte kubische Gleichung

$$y^3 - r^2 y + \frac{r^4}{f} = 0 \qquad \text{(II)}$$

die für unsern Zweck sofort verwendbar ist.

Die Ausdrücke für andere Transversalschnitte leiten sich aus dem Eliminationsresultat von n aus obigen Gleichungen (3) und (2) ab. Dasselbe ist dargestellt in:

$$\begin{vmatrix} 1 & -f & r(2e-r) & fr^2 & 0 \\ 0 & 1 & -f & r(2e-r) & fr^2 \\ 0 & 0 & x-2r & 2ry & -r^2x \\ 0 & x-2r & 2ry & -r^2x & 0 \\ x-2r & 2ry & -r^2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & 0 & -e & f & 0 \\ 0 & e & 0 & 2e-r & f \\ 0 & y & r & 2y & -x \\ 0 & r & y & x & 0 \\ x-2r & y & r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder durch eine Determinante niedrigerer Ordnung ausgedrückt in

$$\begin{vmatrix} r & y & 2r-x \\ ex+fy & fr & rx \\ r(f+y) & (ex+fy)-r(2e-r) & 2ry \end{vmatrix} = 0$$

Für $y = 0$ bekommt man die Schnitte mit der x Achse in der Gleichung:

$$x^3 - 2\frac{r}{e}(2e-r)x^2 + \frac{r^2}{e^2}[(2e-r)^2 - f^2]x + 2\frac{r^3}{e^3}f^2 = 0$$

Transformirt man dieselbe von x auf $\frac{r}{e}\eta$, so folgt die einfachere

$$\eta^3 - 2(2e-r)\eta^2 - [f^2 - (2e-r)^2]\eta + 2ef^2 = 0 \qquad (6)$$

Die Wurzeln η sind dann die Ordinaten in den x Achsenschnittpunkten bis zu der durch den Ursprung gehenden Geraden

$$\eta = \frac{e}{r}x$$

Der Ausdruck (6) kann wieder dienen allgemeine Gleichungen von der Form

$$\eta^3 \pm a\eta^2 - b\eta \pm c = 0$$

zu behandeln, wobei beliebige Variation der Vorzeichen von a und c gestattet ist.

Setzt man in (6) wieder Abscisse $e = \frac{r}{2}$, so erhält man die reducirte Gleichung

$$\eta^3 - f^2\eta + f^2 r = 0 \quad \text{und} \quad \eta = \frac{x}{2} \qquad \text{(III)}$$

also für die x Achse:

$$x^3 - 4f^2x + 8f^2r = 0$$

Es mag noch der Ausdruck für die Schnittpunkte einer Transversalen aufgestellt werden, die durch den Mittelpunkt des Kreises gehend, senkrecht steht auf des letzteren Verbindungslinie mit dem Fixpunkte F; eine solche ist in Fig. 6. verzeichnet.

Die auf der Transversalen vom Mittelpunkt des Kreises als Anfangspunkt o zu zählenden, durch die Tangenten abgeschnittenen Strecken seien mit z bezeichnet, der Neigungswinkel der Transversalen zur x Achse mit α, die Strecke oF mit s und das Transversalenstück vom Mittelpunkt des Kreises bis zur y Achse mit t. Dann sind in obige Determinante folgende Substitutionen einzuführen:

$$y = z\sin\alpha, \quad r - e = f\sin\alpha, \quad f = s\cos\alpha$$

$$x = r + z\cos\alpha, \quad ex + fy = r(e + z\cos\alpha)$$

Hebt man die Factoren r weg und zieht die dritte von der ersten Colonne ab, so wird:

$$\begin{vmatrix} z\cos\alpha & z\sin\alpha & r - z\cos\alpha \\ -s\sin\alpha & s\cos\alpha & r + z\cos\alpha \\ s\cos\alpha - z\sin\alpha & s\sin\alpha + z\cos\alpha & 2z\sin\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & 0 & r - z\cos\alpha \\ 0 & s & r + z\cos\alpha \\ s & z & 2z\sin\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Führt man schliesslich noch

$$t = \frac{r}{\cos\alpha}$$

ein, so folgt die letzte Form und ihre Auswertung in

$$\begin{vmatrix} z & 0 & t-s \\ 0 & s & t+z \\ s & s & 2z\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{vmatrix} = z^3 + (t - 2s\,\mathrm{tg}\,\alpha)z^2 - s^2 z + s^2 t = 0 \qquad (7)$$

Aus t, s und α lässt sich sofort wieder

$$r = t\cos\alpha, \quad f = s\cos\alpha, \quad e = r - f\sin\alpha \quad .$$

durch Construction herstellen.

Der Ausdruck (7) kann wieder mit der allgemeinen Form

$$z^3 \pm az^2 - bz \pm c = 0$$

für beliebige Vorzeichen von a und c verglichen werden und liefert einen immer angebbaren Winkel α, sowie s und t reell durch a, b und c ausgedrückt.

Zum Uebergang auf eine reducirte Gleichung hat man wieder in (7)

$$t = 2s\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \text{oder} \quad r = 2s\sin\alpha = 2(r - e) \quad \text{d. i.} \quad e = \frac{r}{2}$$

zu specialisiren und erhält damit:

$$z^3 - s^2 z + s^2 t = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Zur Anwendung dieser Gleichung dürfte sich die Anordnung in Fig. 7. eignen, welche aus Fig. 6. durch Rechtsdrehung um den Winkel $(90 + \alpha)$ entstanden ist. In Fig. 7. ist also die y Achse Transversale, F liegt auf der x Achse, während eine Kreistangente von x Achsen-Neigung α als Leitgerade L auftritt. Bei der Construction wird man t und $2s$ auf die Achsen von O aus auftragen, um in der Verbindungslinie der erhaltenen Punkte die Leitgerade L darzustellen. An dieselbe ist der Grundkreis K berührend (aus dem Mittelpunkte O) zu beschreiben. F befindet sich im Abstande s vom Mittelpunkte.

Die bis jetzt erhaltenen reducirten Gleichungen haben als charakteristisches Merkmal den negativen Coefficienten der ersten Potenz der Unbekannten. Damit sind also alle Fälle erledigt, die unter die Form

$$y^3 - py \pm q = 0$$

gehören, wobei die doppelten Vorzeichen des letzten Teiles gleichen aber entgegengesetzt bezeichneten Wurzeln entsprechen. Da den

absoluten Werten von p und q keine Schranken gesetzt sind, so ist auch der Fall mit zwei gleichen, und der irreducible mit drei verschiedenen reellen Wurzeln miteinbegriffen. Die erhaltenen Gleichungen haben auch das Gemeinsame der vorauszusetzenden Bedingung, dass die Abscisse von F d. i.

$$e = \frac{r}{2}$$

zu nehmen ist.

Werden unsere Resultate der obigen Form, die als gegebene, aufzulösende Gleichung gilt, gegenüber gestellt, so bekommt man für die Construction der Grundfactoren folgende Werte der hiezu nötigen Dimensionen, und zwar

bei (II) $y^3 - r^2 y + \frac{r^4}{f} = 0, \qquad r = \sqrt{p}, \quad f = \frac{r^4}{q} = \frac{p^2}{q}$

bei (III) $\eta^3 - f^2 \eta + f^2 r = 0, \qquad f = \sqrt{p}, \quad r = \frac{q}{f^2} = \frac{q}{p}$

bei (IV) $z^3 - s^2 z + s^2 t = 0, \qquad s = \sqrt{p}, \quad t = \frac{q}{p}$

Eine zweite besondere Lage der Grundfactoren geht aus der allgemeinen hervor, indem man F in die x Achse versetzt. Darnach ist in Gleichung (1) das $f = 0$ zu setzen, wodurch sie übergeht in

$$n^3 - (2r - e)\operatorname{ctg}\varphi\, n^2 + r(2e - r)\, n - r^2 e \operatorname{ctg}\varphi = 0 \tag{8}$$

Diese haben wir wieder behufs Elimination von n mit obiger Gleichung (2) zusammenzuhalten.

Die einfachsten hervorzuhebenden Transversalschnitte sind auch hier wieder

für $x = 0$, wodurch $n = y$

„ $x = 2r$, „ $n = \frac{r^2}{y}$

einzusetzen kommt. Damit werden aus (8) die folgenden:

$$y^3 - (2r - e)\operatorname{ctg}\varphi\, y^2 + r(2e - r)\, y - r^2 e \operatorname{ctg}\varphi = 0 \tag{9}$$

$$y^3 + \frac{r - 2e}{e} r \operatorname{tg}\varphi\, y^2 + \frac{2r - e}{e} r^2 y - \frac{r^4}{e} \operatorname{tg}\varphi = 0 \tag{10}$$

Von diesen ist jedoch nur erstere (9) verwendbar zur Behandlung der vollständigen Gleichungen von der Form

$$\begin{matrix} y^3 + ay^2 + by - c = 0 \\ y^3 - ay^2 + by + c = 0 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} y^3 + ay^2 - by + c = 0 \\ y^3 - ay^2 - by - c = 0 \end{matrix}$$

Die andern Fälle bei positivem b sind nur bedingungsweise zu lösen möglich. Es muss nämlich numerisch genommen

$$c > ab$$

sein, damit das r aus dem Vergleiche der Coefficientenausdrücke sich ergeben kann. Die Ausdrücke für r, e und $\operatorname{ctg}\varphi$ durch a, b und c sind überhaupt weniger einfach zu construiren und das erste allgemeine Verfahren vorzuziehen.

Bei Specialisirung von $e = 2r$ folgt aus (9):

$$y^3 + 3r^2y - 2r^3 \operatorname{ctg}\varphi = 0 \tag{V}$$

und bei jener von $e = \frac{r}{2}$ aus (10):

$$y^3 + 3r^2y - 2r^3 \operatorname{tg}\varphi = 0 \tag{VI}$$

Diese reducirten Gleichungen sind für complementäre Winkel φ einander gleich, so dass für $e = 2r$ und einem bestimmten φ auf der y Achse dieselben Wurzelwerte erscheinen als für $e = \frac{r}{2}$ und dem Winkel $(90 - \varphi)$ auf der parallelen Tangente $x = 2r$. Es braucht demnach nur der Ausdruck (V) weiters berücksichtigt zu werden.

Derselbe löst nun die reducirten Gleichungen von der Form

$$y^3 + py \pm q = 0$$

mit charakteristisch positivem p, und erhält man beim Vergleiche mit (V) sofort:

$$r = \sqrt{\frac{p}{3}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2r^3}{q} = \frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}} \quad .$$

Die Gleichungen dieser Gruppe haben bekanntlich bei beliebigen numerischen Werten von p und q stets eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Von Interesse ist die Ausnützung der Gleichung (V) zur Aufstellung eines besonderen, indirecten Verfahrens des Kubikwurzelziehens aus einer beliebigen reellen Grösse, das gegenüber dem bereits oben durchgeführten zweckmässige Constructionsvorteile gewährt.

Graphisches Kubikwurzelziehen.

Zur Einfachheit der Ableitung des Verfahrens können wir im Folgenden den Grundkreisradius $r = 1$ setzen und erhalten damit

$$y^3 + 3y - 2 \operatorname{ctg}\varphi = 0 \tag{V'}$$

so dass

$$p = 3, \quad q = 2 \operatorname{ctg} \varphi$$

wird. Lösen wir diese Gleichung trigonometrisch auf und nennen den ersten Hilfswinkel χ, den zweiten ψ, so folgt bei unseren Coefficienten p und q nach bekannten Formeln:

$$\operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{d. i.} \quad \chi = \varphi$$

somit

$$\operatorname{ctg} \psi = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}$$

und die reelle Wurzel

$$w_1 = 2 \operatorname{ctg} 2\psi$$

Setzen wir φ in der Form

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = z$$

unter z eine beliebige reelle Zahl verstanden, voraus, so können wir w_1 sehr leicht durch das mechanische Verfahren erhalten und kennen also damit ψ. Darnach ist in

$$\operatorname{ctg} \psi = \sqrt[3]{z}$$

die verlangte Kubikwurzel gefunden.

Es ist demnach nur nötig die Construction so anzuordnen, dass man bei constantem Grundkreis und unverändertem Fixpunkt für beliebig viele gegebene Zahlen oder Strecken z sowohl die Wurzelwerte einfach finden, als auch gleichzeitig am Resultate eine graphische Genauigkeitsprobe anstellen kann. Diesen Zweck dürfte das Arrangement in Fig. 8. erfüllen.

An den Grundkreis, mit dem Radius $r = 1$ beschrieben, ziehen wir durch den Scheitel O die Achse der y oder wie sie in der Figur bezeichnet wurde, als jene der $\sqrt[3]{z}$ und durch den scharf markirten, höchsten Punkt H die zur x Achse parallele Horizontalachse der z. O und H sind die Anfangs-Zählpunkte für die bezeichneten Grössen ihrer Achsen. Nun trage man auf der obern Horizontal-Achse von H aus $+z$ nach rechts und, zum Zwecke der später durchgeführten Probe, dasselbe von O aus auf der y Achse nach abwärts auf. Hernach lege man die Tangente durch den ersteren Punkt $+z$ an den Kreis, so ist damit sofort der oben definirte Winkel φ bestimmt. Es ist also nur die Leitgerade L durch O parallel zur letzten Tangente zu ziehen. Zeichnet man überdies an den Grundkreis noch die parallele zweite Tangente, so schneidet diese offenbar $\frac{-1}{z}$ von H aus gerechnet links auf der Achse ab. Nun „legen" wir durch F

an L und K den rechten Winkel „an", so erhalten wir durch den Tangentenschenkel auf der y Achse sofort in $\overline{Ow_1}$ die Strecke $w_1 = 2 \operatorname{ctg} 2\psi$ markirt. Werden schliesslich zur Verbindungslinie $w_1 F$ die parallelen Tangenten an den Kreis gezogen, so liefern diese die Strecken $\operatorname{ctg}\psi = \sqrt[3]{z}$ und $-\operatorname{tg}\psi = -\sqrt[3]{\frac{1}{z}}$ auf der y Achse. Die Endpunkte der Strecken sind mit ihren Werten für den Anfangszählpunkt O benannt, daher obige Bezeichnung der y Achse. Behufs der Genauigkeitsprobe hat man den Punkt $\sqrt[3]{z}$ mit dem Kreismittelpunkt o zu verbinden und hiezu die Parallele durch den untern Punkt z (der y Achse) sowohl, als jenen $-\sqrt[3]{\frac{1}{z}}$ zu ziehen, welche auf der x Achse die Strecken $\sqrt[3]{z^2}$ und $\sqrt[3]{\frac{1}{z^2}}$, von O aus gerechnet, abschneiden müssen. Ist das Resultat genau, so muss die Verbindungslinie $(\sqrt[3]{z}, \sqrt[3]{z^2})$ auf diesen eben gezogenen Parallelen nun auch genau senkrecht stehen. Die Parallele, die man dann durch den Punkt $\sqrt[3]{\frac{1}{z^2}}$ zur obbenannten Verbindungslinie zieht, wird auf der y Achse $\frac{1}{z}$ markiren, von dessen Uebereinstimmung mit jenem der Horizontalachse man sich zu überzeugen hat. Da durch dieses Probeverfahren auf der x Achse die Quadrate der Kubikwurzeln erhalten wurden, so ist dieselbe in der Figur darnach bezeichnet worden.

Jene Punkte der Ebene, welche die noch fehlenden complexen Werte der Kubikwurzeln darstellen, liegen bekanntlich für alle $+z$ auf den beiden Strahlen, welche mit der $+y$ Achse als dritten die Dreiteilung des vollen Winkels um O bilden und zwar in einer Entfernung von O gleich dem reellen Werte von $\sqrt[3]{z}$.

Sind die gegebenen Werte von z numerisch sehr gross oder sehr klein, so wird auch φ sehr klein und L für das „Anlegen" des rechten Winkels ungünstig ausfallen. Man hat dann statt z nur $\frac{1}{n^3} z$ aufzutragen, unter n eine beliebige rationale, ganze oder gebrochene Zahl > 1 verstanden und erhält bei günstiger Wahl von n immer gute Verhältnisse für die Ausführung der Construction. Die daraus erhaltene Wurzel ist dann der $n$te Teil von $\sqrt[3]{z}$. Aber auch bei Werten von z, die sehr nahe der Einheit sind, wird eben φ sehr nahe an 90^0 und das Verfahren wieder unsicher, und wird man, um dem auszuweichen, den Coefficienten $n < 1$ zu nehmen haben.

Anmerkung. Mit dem graphischen Kubikwurzelziehen sind die Lösungen mancher Aufgaben aus der Stereometrie verknüpft: so die Verwandlungen von Polyedern in inhaltsgleiche Würfel, das verallgemeinerte Deli'sche Problem der Bestimmung einer Dimension jenes fraglichen Körpers, welcher bei beliebig normirtem Inhaltsverhältniss einem gegebenen Körper ähnlich sei, u. s. w.

Aus den Tafeln folgert man leicht die näherungsweisen trigonometrischen Tangenten der Centriwinkel einer 7, 11 und 13 Teilung des Kreisumfanges mit nachstehend angegebenen linearen Fehlern der Teilungssehnen:

Es ist $\operatorname{tg}\frac{360}{7} = \sqrt[3]{2}$ bei einem Sehnenfehler von $+\frac{1}{434}$

„ „ $\operatorname{tg}\frac{360}{11} = \sqrt[3]{\frac{1}{3\frac{1}{4}}}$ „ „ „ „ $-\frac{1}{645}$

„ „ $\operatorname{tg}\frac{360}{13} = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ „ „ „ „ $-\frac{1}{234}$

Die Radicanden sind eben für die Anwendung bei beliebigen Kreisen ohne Voraussetzung eines Massstabes leicht herzustellen.

Bei den vollständigen kubischen Gleichungen wurde noch auf einen besonderen Transversalschnitt hingewiesen, der dort durch die Gleichung

$$x(e+f\operatorname{ctg}\varphi)+y(f-e\operatorname{ctg}\varphi) = 1$$

charakterisirt ist und für u als Substitutionswert in (1) ergab:

$$u = f-e\operatorname{ctg}\varphi+y+x\operatorname{ctg}\varphi$$

Für unsere Specialisirung, wo F auf der x Achse liegt, hat man für die Transversale, da jetzt $f = 0$ ist, die Gleichung

$$y = x\operatorname{tg}\varphi$$

d. i. aber unsere Leitgerade L selbst.

Nennen wir die Strecken, die auf derselben durch die Scheitelpunkte der anzulegenden rechten Winkel — gezählt vom Ursprung aus — markirt werden, z, so hat man zunächst zu setzen

$$x = z\cos\varphi, \quad y = z\sin\varphi$$

und erhält damit

$$u = \frac{z-e\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

Für die folgenden Betrachtungen wollen wir die bisherige positive mit der negativen Seite der x Achse vertauschen, haben also in obiger Gleichung (8) das $+r$ durch $-r$ zu ersetzen, wodurch sie übergeht in

$$n^3+(2r+e)\operatorname{ctg}\varphi\, n^2-r(2e+r)n-r^2e\operatorname{ctg}\varphi=0 \qquad (8')$$

Entwickelt man von dem Substitutionsresultate der Grösse n nur die Teile mit z^2, so lassen sie sich in den Ausdruck zusammenziehen

$$\frac{2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}(r-e)z^2$$

woraus man die weitere Bedingung

$$e=+r$$

entnimmt, für welche der Ausdruck des Transversalschnittes sich in einer reducirten kubischen Gleichung darstellen wird. Darnach ist in (8′) zu setzen für

$$n=\frac{z-r\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

Nach leichten Reductionen folgt der einfache Ausdruck

$$z^3-3r^2z+2r^3\cos\varphi=0\ ^{*)} \qquad \text{(VII)}$$

der mit der allgemeinen Form

$$z^3-pz+q=0$$

verglichen für r und φ die Werte

$$r=\sqrt{\frac{p}{3}},\quad \cos\varphi=\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2:\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

---

*) Kürzer als durch alle diese Specialisirungen erhält man diesen Ausdruck durch die Auffassung, dass die Strecken z nichts anderes sind als die Radienvectoren für die Punkte der durch Grundkreis und Fixpunkt F gegebenen Kreisfusspunktscurve bezogen auf ein Polarcoordinatensystem. Die Polarachse desselben verbindet den Kreismittelpunkt mit F dem Mittelpunkt der Lotstrahlen, und der Pol des Systems ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreise. Für ein rechtwinkliges Achsensystem mit dem Pol des obigen Systems als Ursprung und der Polarachse als positiver Seite der x Achse wird die Gleichung der Kreisfusspunktscurve bekanntlich

$$[y^2+(x-e)^2]r^2=[y^2+(x+r)(x-e)]^2$$

woraus durch Uebergang auf das Polarsystem (z, φ) die Polargleichung — mit obiger übereinstimmend — sich in

$$z^3-3r^2z+2z^3\cos\varphi=0$$

ergibt.

liefert. Daraus erkennen wir aber sofort die Einschränkung in den Werten der Coefficienten durch die Bedingung

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

wenn ein Winkel φ möglich sein soll. Obiger Ausdruck (VII) eignet sich daher ausschliesslich zur Behandlung des **irreduciblen** Falles der reducirten kubischen Gleichungen. In Folge des einfachen Zusammenhanges dieses Falles mit der „Dreiteilung des Winkels" kann die erhaltene Gleichung (VII) mit Vorteil zur Behandlung dieses Problems ausgenützt werden.

Trisection des Winkels.

Setzt man wieder den Grundkreisradius $r = 1$ und führt den Winkel $\alpha = 180 - 2\varphi$ ein, so geht (VII) über in

$$z^3 - 3z + 2\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \qquad \text{(VII')}$$

$(-\alpha)$ ist dann, wie aus Fig. 9. ersichtlich, nichts anderes als der Centriwinkel des Grundkreises, der über jenen Bogen aufsteht, den die Leitgerade mit der Neigung φ von diesem Kreise abschneidet. Darnach sind die Wurzeln dieser Gleichung nach der bekannten trigonometrischen Lösung

$$w_1 = -\text{chord}\left(\frac{360+\alpha}{3}\right); \quad w_2 = \text{chord}\frac{\alpha}{3}; \quad w_3 = \text{chord}\left(\frac{360-\alpha}{3}\right)$$

Wir erhalten demnach direct von einem Winkel α die Sehnen seines dritten Teiles, des Drittels seines Explementes und des um einen ganzen Umfang vermehrten Winkels — für den Grundkreis. Da alle drei Wurzeln der reducirten kubischen Gleichung in diesem Falle reell sein müssen, so kann für den ungünstigen Fall einer sich ungenau ergebenden Wurzel, dieselbe nach der algebraischen Summe der beiden anderen corrigirt werden.

Verlängert man den schiefen Schenkel von α über den Mittelpunkt hinaus, so erhält man von der positiven x Achse an gerechnet den Winkel $180 - \alpha$, der nun ebenso behandelt werden kann, wie früher α, so dass der zugehörige Winkel φ jetzt in $(90 + \varphi)$ überging. Dann erhalten wir auf der neuen Leitgeraden L', welche den Endpunkt des Winkel-Schenkels $(180 - \alpha)$ mit O verbindet, offenbar sofort durch „Anlegen" des rechten Winkels die Wurzelwerte der Gleichung (VII') für diesen Winkel in

$$w_1' = \text{chord}\left(\frac{540-\alpha}{3}\right); \quad w_2' = -\text{chord}\left(\frac{180-\alpha}{3}\right)$$

$$w_3' = -\text{chord}\left(\frac{180+\alpha}{3}\right)$$

Um weitere Eigenschaften der Figur nachzuweisen, denke man sich in einem Halbkreise des Grundkreises aus den Endpunkten seines Durchmessers die erhaltenen Wurzelwerte w und w' als Sehnen aufgetragen, so müssen folgende Paare dieser Werte als (rechtwinklige) Supplementarsehnen sich zusammenfügen, nämlich

$\text{chord}\left(180-\frac{\alpha}{3}\right)$ und $\text{chord}\,\frac{\alpha}{3}$ d. i. w_1' und w_2

$\text{chord}\left(120+\frac{\alpha}{3}\right)$ „ $\text{chord}\left(60-\frac{\alpha}{3}\right)$ „ w_1 „ w_2'

$\text{chord}\left(120-\frac{\alpha}{3}\right)$ „ $\text{chord}\left(60+\frac{\alpha}{3}\right)$ „ w_3 „ w_3'

und die Winkel, welche dann diese Supplementarsehnen mit dem Durchmesser bilden, müssen dann beziehungsweise sein

für w_1' Winkel $\frac{\alpha}{6}$, für w_2 $\left(90-\frac{\alpha}{6}\right)$

„ w_1 „ $\left(30-\frac{\alpha}{6}\right)$, „ w_2' $\left(60+\frac{\alpha}{6}\right)$

„ w_3 „ $\left(30+\frac{\alpha}{6}\right)$, „ w_3' $\left(60-\frac{\alpha}{6}\right)$

Da aber in unserer Figur die beiden Leitgeraden L und L' aufeinander senkrecht stehen, ferner von O aus auf denselben, vermöge des mechanischen Verfahrens, die in Rede stehenden Wurzelwerte bis zu den gleichbezeichneten Punkten gerechnet, abgeschnitten erhalten werden, so müssen umgekehrt die von F ausgehenden Schenkel der „angelegten" rechten Winkel zwischen den rechtwinkligen Leitgeradenachsen L und L' Strecken gleich dem Durchmesser des Grundkreises aufweisen, das heisst, man hat

$$\overline{w_1'w_2} = \overline{w_1w_2'} = \overline{w_3w_3'} = 2r$$

und die Winkel in den entstandenen rechtwinkligen Dreiecken, deren Katheten die besagten Wurzelwerte sind und deren Hypotenuse stets gleich $2r$ vom Grundkreise ist, müssen die in der Figur eingezeichneten Werte haben, welche aus obiger Zusammenstellung zu entnehmen waren.

Aus den Dreiecken

$$(F, O, \text{ beziehungsweise } w_1, w_2, w_3, w_1', w_2', w_3')$$

entnehmen wir mit Rücksicht, dass $\varphi = 90 - \frac{\alpha}{2}$ ist, die Neigungen der aus F ausgehenden Schenkel der „angelegten" rechten Winkel zur x Achse, die in der Figur eingezeichnet wurden. Die zu ihnen parallel gezogenen Kreisdurchmesser verbinden die Berührungspunkte paralleler Tangentenschenkel und sind zugleich Teilungslinien für die Trisection der Winkel

$$(180-\alpha) \text{ und } (360+\alpha), \text{ dann } (360-\alpha) \text{ und } (180+\alpha),$$
$$\text{endlich } (540-\alpha), \alpha$$

von denen w und w' die Sehnen ihrer dritten Teile sind. Das Verfahren bietet gewiss ausreichend viele Genauigkeitsproben.

Die Anordnungen in Fig. 10 und 11 sind für die Trisection beliebig veränderlicher α und ihrer Supplemente getroffen, wenn zugleich sämmtliche Teilungslinien direct durch das „Winkelanlegen" sich ergeben sollen. Dazu bedarf es dreier Leitgeraden durch O. Die erste L_1 geht parallel zum schiefen Schenkel des gegebenen Winkels; die beiden anderen L_2, L_3 beziehungsweise durch die Endpunkte p_2, p_3 eines zu L_1 parallelen Kreisdurchmessers.

Zu den Verfahrungsweisen des graphischen Kubikwurzelziehens und der Trisection des Winkels möge die Bemerkung gestattet sein, dass nach verzeichneten Grundfactoren zur mechanischen Lösung der Aufgabe der Gebrauch des Zirkels entfällt und lediglich nur „Winkelanlegen" und Parallelverschiebungen angewendet werden, was zur Raschheit der Ausführung beiträgt.

Dass sich, sowie aus den letzten reducirten Gleichungen (V) und (VII) auch aus den früheren (II) bis (IV), Constructionsverfahren für das Kubikwurzelziehen und die Trisection des Winkels ableiten liessen, zeigen die Ausdrücke der trigonometrischen Lösung jener Gleichungen. Eben daraus wird man aber auch erkennen, dass die aus diesen Ausdrücken folgenden Constructionen niemals so einfach, als die oben durchgeführten sich gestalten können, weshalb deren Aufstellung nur ein müssiges Unternehmen wäre.

Anmerkung. Eine Trisection von $\varphi = 120^0$ führt zur 9 Teilung des Kreisumfangs.

Nützt man ferner eine ältere, bekannte Construction der näherungsweisen Verzeichnung eines regulären 11 Eckes aus einer Seite, welche auf die 6 Teilung des Winkels von 60^0 basirt ist, entsprechend

aus und umformt dieselbe, so ergibt sich die in Fig. 12. dargestellte näherungsweise Teilung des Kreisumfanges in 11 gleiche Teile. — Der mit $\frac{r}{2}$ zum gegebenen Kreise concentrisch beschriebene K ist Grundkreis, F Fixpunkt und L Leitgerade, welch letztere die verlängerte Sehne des Centriwinkels von 75^0 ist. „Legt" man an diese Grundfactoren den rechten Winkel „an", so trifft dessen Tangentenschenkel den unter 30^0 gezogenen Kreisdurchmesser in δ und die Verbindungslinie δF schneidet auf dem Kreise vom Anfangspunkte A gerechnet den angenäherten 11ten Teil des Kreisumfanges ab. Eine einfache Berechnung ergab einen linearen Sehnenfehler der Näherung von $\left(-\frac{1}{220}\right)$

Sieht man in obiger Fig. 9. die beiden Leitgeraden L und L_1 als rechtwinkliges Achsenpaar der Ebene an, so ist F ein beliebiger Punkt in einem Quadranten, und in der Figur ist die Lösung folgender planimetrischer Aufgage gegeben:

„Durch einen gegebenen Punkt sind drei Gerade so zu ziehen, dass sie innerhalb rechtwinkliger Achsen gleiche Strecken von der Länge der doppelten Entfernung des Punktes vom Achsenmittelpunkt aufweisen."

Die Halbirungspunkte jener Strecken liegen auf einem Kreise, der aus O, durch F gehend, beschrieben wird. Verbindet man einen derselben mit O, so ergibt sich durch Betrachtung der Winkel, die in dem rechtwinkligen Dreieck auftreten, das aus den Achsen und der betreffenden Strecke gebildet wird, der Zusammenhang unserer Aufgabe mit jener der Trisection des Winkels LOF.

Zu den Fig. 10 und 11 kann man noch die Bemerkungen machen, dass sich die Tangentenschenkel der obern und untern rechten Winkel bei Anwendung von L_1 beziehungsweise mit den Fixpunktschenkeln der rechten Winkel bei den Benutzungen von L_3 und L_2 respective in den Punkten u und v schneiden, welche auf dem Kreisdurchmesser — der Neigung α gegen die x Achse — liegen müssen. Diese Bedingung kann als Genauigkeitscontrolle des Verfahrens dienen. Es wird genügen dieselbe an Fig. 10. und Punkt u nachzuweisen.

Durch Anwendung der Leitgeraden L_3 ist der Winkel $(1'ox)$ in der Linie $(2'o)$ halbirt worden. Zu letzterer ist der Fixpunktschenkel der an L_3, F, K „angelegten" rechten Winkel parallel, somit hat man

$$ot \parallel O1' \parallel Fu \text{ und wegen } \overline{OF} = \overline{oO} \text{ auch } \overline{u1'} = \overline{1't}$$

Demnach ist

$$\text{Wkl.}\,(uo1') = \text{Wkl.}\,(1'ot),\ \text{also Wkl.}\,(uox) = 3\,.\,\text{Wkl.}\,(2'ox)$$

oder die Linie uo muss mit dem Schenkel Bo des gegebenen Winkels zusammenfallen, d. h. der durch den Fixpunktschenkel des rechten Winkels bei Anwendung von L_3 auf der Tangente in $2'$ erhaltene Punkt „u“ auf Bo liegen.

Man kann demnach die zweiten Teilungslinien auch aus u, v oder $1'$, 1 ableiten durch die Parallelen zu Fu, $1'O$ resp. Fr, $1O$, aber damit werden eben die Teilungslinien nicht von einander unabhängig erhalten wie bei Anwendung von L_3 und L_2.

Mit unseren Hilfsmitteln sind wir auch im Stande die Werte der Kubikwurzel einer gegebenen complexen Zahl darzustellen. Es ist dies in Fig. 13. durchgeführt.

Es sei eine complexe Zahl

$$P = y + ix$$

gegeben und der Punkt der Ebene, welcher sie repräsentirt, gleich bezeichnet. Dann kommt die Aufgabe der Darstellung der Kubikwurzeln aus dieser Zahl darauf hinaus, zwischen dem Anfangspunkte $y = +1$ und dem Punkte P gebrochene Linienzüge mit 2 Ecken so einzuschalten, dass die drei aufeinanderfolgenden Dreiecke, welche respective von den Seiten des Linienzuges und den Verbindungsstrahlen der Ecken sowie der Punkte $(+1)$ und P mit dem Mittelpunkte O gebildet werden, einander ähnlich sind. Hiebei sind die Seiten des Linienzuges zu einander, sowie jene Verbindungsstrahlen einander homolog. Der erste Eckpunkt eines solchen Linienzuges — von $+1$ gerechnet — stellt dann $\sqrt[3]{P} = p_1, p_2, p_3$, der zweite $\sqrt[3]{P^2} = p_1^2, p_2^2, p_3^2$ dar. Es ist möglich diese Bedingung der Linienzüge auf dreifache Weise zu erfüllen, die den drei Wurzelwerten entsprechen. Was zunächst die Mittelpunktsstrahlen anbelangt, auf denen die dieselben darstellenden Punkte liegen müssen, so wird durch jene der Werte p_1, p_1^2 der Winkel $yOP = \varphi$ in drei Teile geteilt, wie es der Bedingung entspricht. Um die Strahlen für die beiden andern Werte zu erhalten sind die dritten Teile des einmaligen und zweimal genommenen Umfangs d. i. $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ zweimal nacheinander an $\frac{\varphi}{3}$ und $\frac{2\varphi}{3}$ anzufügen. Die Entfernungen der fraglichen Punkte von O ergeben sich aber als

$$\sqrt[3]{OP} = Op_1 = Op_2 = Op_3 \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{OP^2} = Op_1^2 = Op_2^2 = Op_3^2$$

$$OP = \sqrt{y + ix}$$

d. h. sind auf den Kreisen der Punkte p_1, p_1^2 gelegen.

Sucht man dieselben Wurzelwerte zur conjugirten Zahl

$$P' = y - ix$$

von P, so erkennt man sofort, dass sich auch zu jedem der früheren Werte ein conjugirter findet, d. h. zu jedem Eckpunkt der Linienzüge ein ihm symmetrischer bezüglich der y Achse als Symmetrale.

Denkt man sich die beiden conjugirten Zahlen P und P' als Radicanden für die Wurzelausdrücke der Cardanischen Auflösungsformel einer kubischen Gleichung, so müssen zur Bildung der reellen Wurzeln dieser Gleichung bekanntlich die einander conjugirten Kubikwurzelwerte für P mit jenen für P' zusammen genommen werden. Dies gibt die doppelten reellen Grössenteile solcher Wertepaare. Wir können aber die Wurzeln einer solchen Gleichung direct durch unser mechanisches Verfahren erhalten, indem wir den Kreis durch p_1, p_2, p_3 als Grundkreis, F in der Distanz $\overline{OF} = 2\overline{Op_1} = 2\overline{OA}$ als Fixpunkt und die durch A zum Strahle OP parallel gezogene L als Leitgerade nehmen, worauf die mit den durch p_1, p_2 und p_3 erhaltenen Werte Aw_1, Aw_2 und Aw_3 übereinstimmen. Dieser Fall kann eben als ein Beispiel für die gegenseitige Prüfung der Fundamental-Constructionen des Kubikwurzelziehens und der Trisection des Winkels gelten.

Man könnte nun auch jede reducirte kubische Gleichung

$$y^3 + py + q = 0$$

bei beliebigen Vorzeichen und numerischen Werten von p und q, überhaupt durch die Construction der Cardanischen Formel lösen und hätte nur die Kubikwurzeln aus den Werten der Unbekannten von

$$x^2 + qx - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

zu bestimmen und die drei Werte der ersten mit jenen der zweiten entsprechend zusammen zu nehmen. Die beiden reellen geben auch die reelle Wurzel der kubischen Gleichung. Um auch die imaginären zu erhalten, dürfen nur jene complexen Werte der Kubikwurzeln zusammengefasst werden, deren Product gleich jenem der reellen Werte ist. Auch diese Untersuchung kann bekannter Massen graphisch vorgenommen werden.

Aber sowol letzt erwähnte Auflösungsart, als etwa jene der Construction der Wurzelausdrücke, wie sie sich aus einer trigonometrischen Lösung der kubischen Gleichungen ergeben, empfehlen sich weniger, als jene im Texte durchgeführten, die einfacher zum Ziele führen.

Behandlung der biquadratischen Gleichungen.

Sollen wir durch Transversalschnitte von den vier gemeinschaftlichen Kreis-Parabel-Tangenten die Wurzelwerte einer biquadratischen Gleichung erhalten, so können wir ein Achsensystem in Bezug auf Grundkreis und Fixpunkt ganz ebenso wie bei den kubischen Gleichungen wählen, wobei wir dieselbe Bezeichnung der Grössen beibehalten, und nur der Leitgeraden L haben wir eine allgemeine, durch keine Bedingung eingeschränkte Lage zu geben. Die Lagenverhältnisse der Grundfactoren zeigt darnach (Fig. 14.), in welcher L auf der y Achse $+k$ abschneidet und unter φ gegen die x Achse geneigt ist. Ihre Gleichung wird

$$y - x \operatorname{tg} \varphi - k = 0.$$

Damit ändert sich die dritte Zeile der bei den kubischen Gleichungen aufgestellten Bedingungsdeterminante auf

$$\left| 1, \quad -\operatorname{tg}\varphi, \quad -k \right|$$

und die Determinante geht über in:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{m} & -1 \\ \frac{1}{m} & \frac{-1}{n} & \left(\frac{e}{n} - \frac{f}{m}\right) \\ 1 & -\operatorname{tg}\varphi & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{n}{m} & -n \\ \frac{n}{m} & -1 & \left(e - f\frac{n}{m}\right) \\ 1 & -\operatorname{tg}\varphi & -k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{n}{m} + \operatorname{tg}\varphi & k - n \\ \frac{n}{m}\operatorname{tg}\varphi - 1 & \frac{n}{m}(k-f) + e \end{vmatrix} = 0$$

Da der Bedingung einer Kreistangente gemäss

$$\frac{n}{m} = \frac{n^2 - r^2}{2rn}$$

sein muss, und wir kürzehalber $(k - f) = \delta$ nennen wollen, so ergibt die Auswertung von

$$\begin{vmatrix} (n^2 - r^2) + 2rn \operatorname{tg}\varphi & 2rn(k - n) \\ (n^2 - r^2)\operatorname{tg}\varphi - 2rn & (n^2 - r^2)\delta + 2ern \end{vmatrix} = 0$$

die nach n geordnete Gleichung, die wir wegen Beibehaltung des y Achsenschnittes gleich in y schreiben wollen:

$$y^4 + 2r\frac{e - f\,\mathrm{tg}\,\varphi - 2r}{+2r\,\mathrm{tg}\,\varphi + \delta}y^3 + 2r^2\frac{2(e\,\mathrm{tg}\,\varphi + f) - r\,\mathrm{tg}\,\varphi + \delta}{2r\,\mathrm{tg}\,\varphi + \delta}y^2$$

$$-2r^3\frac{e - f\,\mathrm{tg}\,\varphi}{2r\,\mathrm{tg}\,\varphi + \delta}y + \frac{\delta r^4}{2r\,\mathrm{tg}\,\varphi + \delta} = 0 \qquad \text{(VIII)}$$

Behufs Behandlung der vollständigen biquadratischen Gleichung

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0,$$

in welcher wieder unter a, b, c und d nicht die numerischen, sondern auch die Qualitätswerte der Coefficienten verstanden sein sollen, hat man die letztern den entsprechenden von (VIII) gleichzusetzen und erhält vier Gleichungen für die 5 Grössen r, δ, φ, e und f, wobei wir wieder r willkürlich annehmen können. Das erhaltene Gleichungssystem ist ohne Schwierigkeiten aufzulösen und ergibt folgende rationalen Werte der obigen Bestimmungsgrössen:

$$\delta = \frac{-4d}{c + ar^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2(d - r^4)}{r(c + ar^2)}$$

während e und f wieder durch die Gleichungen

$$r(c + ar^2)f + 2(d - r^4)e = r[3d - r^2(b + r^2)] \qquad \text{(g)}$$

$$2(d - r^4)f - r(c + ar^2)e = -2r^2c \qquad \text{(g')}$$

sich darstellen lassen.

In einem concreten Falle wird man nach Annahme von r wieder zunächst $F(e, f)$ durch den Schnitt der beiden auf einander stehenden, durch (g) und (g') repräsentirten Geraden g und g' bestimmen. Hierauf sucht man δ und findet $k = f + \delta$, durch welchen Punkt der y Achse — wie aus $\mathrm{tg}\,\varphi$ ersichtlich — die Leitgerade L parallel, respective senkrecht zu den symmetrischen Linien der g beziehungsweise g' für die Coordinatenachsen als Symmetralen, zu legen sein wird. Die Geraden g und g' werden aber am einfachsten durch ihre Achsenschnittpunkte angegeben, wobei zu beachten ist, dass sie aufeinander senkrecht stehen. Die Werte für diese Achsenabschnitte sollen noch für vollständige und reducirte Gleichungen, bei allgemeinem r und für $r = 1$ im Folgenden angeführt werden:

A. Vollständige biquad. Gleichungen.

r allgemein und $r = 1$

$$g_x = \frac{3d - r^2(b + r^2)}{2(d - r^4)}r \qquad g_y = \frac{3d - r^2(b + r^2)}{c + ar^2}$$

$$g'_x = \frac{2rc}{c + ar^2} \qquad g'_y = \frac{-cr^2}{d - r^4}$$

$$g_x = \frac{3d - (b+1)}{2(d-1)} \qquad g_y = \frac{3d - (b+1)}{a+c}$$

$$g'_x = \frac{2c}{n+c} \qquad g'_y = \frac{-c}{d-1}$$

B. Reducirte biquad. Gleichungen.

$$g_x = \frac{3d - r^2(b+r^2)}{2(d-r^4)} r \qquad g_y = \frac{3d - r^2(b+r^2)}{c}$$

$$g'_x = 2r \qquad g'_y = \frac{-cr^2}{d-r^4}$$

$$g_x = \frac{3d - (b+1)}{2(d-1)} \qquad g_y = \frac{3d - (b+1)}{c}$$

$$g'_x = 2 \qquad g'_y = \frac{-c}{d-1}$$

Nachdem im Allgemeinen die Auffindung der reellen Wurzeln durch das mechanische Verfahren ermöglicht ist, werde noch zur Vervollständigung jene der imaginären Wurzeln besprochen. Das Vorhandensein von solchen, wollen wir consequenterweise auch graphisch ermitteln. Zu dem Zwecke verzeichne man sich separat eine möglichst genaue Parabel P, die für Untersuchung beliebig vieler Fälle genügt. Aus den gegebenen Gleichungen leite man die Grundfactoren her, und aus diesen übertrage man den Grundkreis K ähnlich so in die Figur der Parabel P nach k, wie er gegenüber jener durch Leitgeraden L und Fixpunkt F bekannter Massen gegebenen Parabel im Systeme der Grundfactoren gelegen ist. Ein Blick auf k und P belehrt uns, ob 4 reelle oder 1 Paar oder 2 Paare imaginärer Tangenten zwischen diesen Gebilden gemeinschaftlich zu legen möglich sind. Dem entspricht dann auch das Vorhandensein eben solcher Wurzeln der betreffenden biquadratischen Gleichung.

Ist ein Paar imaginärer Wurzeln vorhanden, so ist ihre Aufsuchung bekanntlich eine Aufgabe 2ter Ordnung.

Es sei das Trinom

$$y^2 + my + n = (y - w_1)(y - w_2)$$

d. i. dem Producte der Wurzelfactoren der erhaltenen reellen Wurzeln w_1 und w_2, wobei also

$$m = -(w_1 + w_2), \quad n = w_1 w_2$$

wird, so ist das gegebene Gleichungspolynom durch dieses Trinom teilbar und der Quotient wird einfach

$$y^2+(a-m)y+\frac{d}{n}=0$$

da in Folge der Voraussetzung dann

$$n(a-m)=e-m\frac{d}{n} \quad \text{und} \quad d=a[(b-n)-m(a-m)]$$

werden muss. Der gleich Null gesetzte Quotient liefert aufgelöst die fehlenden imaginären Wurzeln — wie es bei den kubischen Gleichungen der Fall war und durchgeführt wurde. Man kann aber auch — ganz in derselben Weise wie dort — die Ermittlung der imaginären Wurzeln auf jene der imaginären Doppelpunkte einer auf der Transversalen yO auftretenden Punkteinvolution zurückführen, wobei im Allgemeinen der Contingenzpunkt der reellen Tangenten nicht mehr auf der Transversalen zu liegen kommt. Die Anführung eines Beispieles kann wegen der völligen Gleichförmigkeit mit jenem bei den kubischen Gleichungen erledigten Falle hier füglich unterbleiben.

Sind nun 2 Paare imaginärer und zwar ungleiche Wurzeln vorhanden, so ist dies der einzige Fall, der sich direct nicht behandeln lässt.

Man wird der Ermittlung eines solchen Wurzelpaares durch die mühsam aufzustellenden Gleichungen für u und v, die sich aus dem Substitutionsresultate von $y=u+iv$ nach Trennung der reellen und imaginären Teile ergeben — jedenfalls das Zurückgehen auf die bekannte kubische Resolvente vorziehen. Nennen wir die Wurzeln der letzteren z_1, z_2 und z_3, so lässt sich die reelle durch das mechanische Verfahren finden, woraus sich die beiden imaginären bekanntermassen ableiten. Zur Aufstellung der Wurzelwerte der biquadratischen Gleichung sind die Quadratwurzeln aus obigen Werten nach dem Schema

$$w_1=\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}\mp\sqrt{z_3} \qquad w_3=-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}\pm\sqrt{z_3}$$
$$w_2=+\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}\pm\sqrt{z_3} \qquad w_4=-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}\mp\sqrt{z_3}$$

zusammenzunehmen, wobei entweder die oberen oder die unteren Zeichen des letzten Teiles gelten, wenn der Coefficient der ersten Potenz der Unbekannten jener aus der gegebenen vollständigen biquadratischen Gleichung abgeleiteten reducirten entweder positiv oder resp. negativ ist.

Sind die beiden Paare der imaginären Wurzeln aber gleich, so ist deren Aufsuchung eine Aufgabe 2ter Ordung, die später noch einmal berührt wird.

Noch besonders zu besprechen sind die

Fälle mit gleichen Wurzeln.

Durch die Behandlung dieser Fälle für biquadratische Gleichungen sind offenbar auch jene der kubischen erledigt, von denen betreffenden Ortes nur das analytische Kennzeichen ihres Vorhandenseins angegeben wurde.

Hat die gegebene biquadratische Gleichung

1) ein Paar gleicher Wurzeln, so berührt der Grundkreis die Parabel (LF) nur einmal nach 1ter Ordnung.

2) Für 2 Paare gleicher Wurzeln, die α) reell oder β) imaginär sein können, wird die Parabel vom Grundkreis doppelt berührt und zwar in reellen resp. imaginären Punkten *).

3) Der Grundkreis wird zum Osculationskreis der Parabel, wenn die gegebene Gleichung drei gleiche Wurzeln besitzt.

4) Endlich ist K Osculationskreis im Scheitel der Parabel, wenn die betreffende biquadratische Gleichung vier gleiche Wurzeln aufweist. K geht dann am Scheitel mit der Parabel eine Berührung dritter Ordnung ein.

Die Constatirung dieser Fälle wird auf graphischem Wege naturgemäss etwas unsicher, da Parabel und Kreis Berührungen 1ter, 2ter und 3ter Ordnung eingehen werden. Hier wird dann in bestimmter Weise das analytische Kriterium für die Gleichungscoefficienten den Fall entscheiden, und dann die graphische Darstellung die Auffindung der Wurzeln leicht ermöglichen.

Unter Voraussetzung der Normalform

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

wo unter a, b, c und d auch die Vorzeichen einbegriffen sind, bestehen für das Eintreten der einzelnen Fälle folgende analytische Kriterien für die Coefficienten, denen gleich die entsprechenden Bemerkungen über die graphische Bestimmung der Wurzelwerte angeschlossen werden mögen:

---

*) Ist statt einer Kreistangente eine Gerade in allgemeiner Lage als Transversale gegeben, so ist der Fall von 2 Paaren gleicher reeller Wurzeln auch möglich, wenn die Transversale mit einer der 3 Diagonalen des vollständigen Vierseits aus den gemeinsamen Kreis-Parabel-Tangenten zusammenfallen würde. In unserm Falle können gleiche Wurzelpaare nur für doppelte Berührung von Kreis und Parabel eintreten.

Ad 1). Ein Paar gleicher Wurzeln ist vorhanden für die Erfüllung der Bedingung

$$\begin{vmatrix} 8b-3a^2 & 6c-ab & 16d-ac \\ 6c-ab & (4d+2ac-b^2) & 6ad-bc \\ 16d-ac & 6ad-bc & 8bd-3c^2 \end{vmatrix} = 0$$

Sind die beiden ungleichen Wurzeln imaginär', so ist deren Bestimmung die bekannte Aufgabe zweiter Ordnung.

Ad 2). Bestehen die Wurzeln aus zwei Paaren gleichen, reellen oder imaginären Werten, so müssen die Gleichungen stattfinden:

$$a^3-4ab+8c=0$$
$$c^2-a^2d=0$$

und die Auffindung der Wurzeln reducirt sich auf eine Aufgabe zweiter Ordnung. Ihre Werte erscheinen in den Formen:

$$w_{1,3}=w_{2,4}=\tfrac{1}{4}[-a\pm\sqrt{3a^2-8b}]=\tfrac{1}{4}\left[-a\pm\sqrt{c\left(\frac{e}{d}-\frac{16}{a}\right)}\right],$$

woraus man sogleich die Bedingung für das Reell- oder Imaginärsein entnimmt.

In der graphischen Darstellung muss dann der Kreis der Parabel doppelt berührend einbeschrieben, also der Mittelpunkt auf der Parabelachse gelegen sein. Sei p der Halbparameter der Parabel, gleich der doppelten Entfernung des Fixpunktes von der Leitgeraden, dann r der Grundkreisradius, so muss

für reelle Wurzeln $r > p$
„ imaginäre „ $r < p$

sein. In beiden Fällen findet man die immer reelle Sehne der Berührungspunkte zwischen Kreis und Parabel, indem man in der Entfernung p vom Kreismittelpunkt (gegen den Parabelscheitel hin gemessen) eine Parallele zur Scheiteltangente L zieht. Der Pol dieser Sehne bezüglich Parabel oder Kreis ist auf der Parabelachse gelegen und zugleich Schnittpunkt der reellen oder imaginären gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspunkten. Um ihn zu erhalten, hat man nur vom Brennpunkt F die Entfernung bis zum Kreismittelpunkt in entgegengesetzter Richtung auf die Parabelachse zu übertragen. Die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten auf der transversalen y Achse stellen jeder ein Paar gleicher Wurzeln dar. Deren Auffindung ist in dem Falle, als sie imaginär sind, schon bei Gelegenheit der Darstellung der imaginären Wurzeln der kubi-

schen Gleichungen gezeigt worden. Unter Voraussetzung obiger Bedingungen ist das ursprüngliche Gleichungspolynom das vollständige Quadrat von:

$$y^2 + \frac{a}{2}y + \frac{c}{a}$$

und die Wurzeln dieses gleich Null gesetzten Ausdruckes sind zugleich die verlangten der gegebenen biquadratischen Gleichung

Ad 3). Die Gleichung 4ten Grades besitzt drei gleiche Wurzeln, wenn ihre Coefficienten die Bedingung erfüllen:

$$\begin{vmatrix} 10b - 3a^2 & 12c - ab & 12d \\ 3ab & 5b^2 - 36d & 6(bc - 3ad) \\ 6 & 3a & b \end{vmatrix} = 0$$

Die gleiche Wurzel $w_{1,2,3}$ hat dann den Wert:

$$w_{1,2,3} = \frac{3}{2}\,\frac{3a^2c - ab^2 - 2bc}{4b^2 - 9ac}$$

und steht mit der vierten, ungleichen Wurzel im einfachen Zusammenhang durch die Relation:

$$3w_1 + w_4 + a = 0$$

Da sich die Wurzeln aus den Coefficienten der Gleichung rational darstellen, so können selbe auf einfachem Wege ohne das mechanische Verfahren ermittelt werden.

Der Grundkreis K (Fig. 15.) ist in diesem Falle Osculationskreis der Parabel F, L, also sein Mittelpunkt o der Krümmungsmittelpunkt eines Parabelpunktes dessen Krümmungsradius r bekannt ist. Schneidet man mit der Grösse $\frac{3}{2}r$ aus o nach der entgegengesetzten Seite der Parabelachse auf der Directrix DD der Parabel den Punkt N ab (der auf der Figur nicht ausdrücklich bezeichnet ist), so erhält man in $0N$ die Parabelnormale für den Krümmungsmittelpunkt o und im Schnitte P mit dem Kreise K den betreffenden Berührungs- (resp. Schnitt-) Punkt des Osculationskreises und der Parabel. Die Tangente in P repräsentirt drei gemeinschaftliche Kreis-Parabel-Tangenten und schneidet auf der y Achse vom Ursprung genommen die dreifache Wurzel $w_{1,2,3}$ ab. Die Wurzel w_4 bestimmt sich daraus am einfachsten mit Hilfe obiger Relation.

Die nach folgender Bemerkung ermittelte 4te gemeinschaftliche Kreis-Parabel-Tangente mag zur Genauigkeitscontrolle des bisher Erhaltenen dienen. Der Grundkreis K und die Parabel F, L sind zueinander collinear verwandt für die Tangente im Osculationspunkte P

als Collineationsachse und ein noch unbestimmtes Centrum, das aber in diesem Falle bekanntlich auf der Collineationsachse gelegen sein muss. Ausserdem liegt es auf einem Verwandtschaftsstrahl. Der dem Osculationspunkte P des Kreises diametral gegenüberliegende Punkt u ist mit dem unendlich entfernten Punkt homolog, mithin schneidet die durch u auf die Leitgerade L errichtete Senkrechte auf der Tangente von P das fragliche Collineationscentrum ω ab. Durch ω lässt sich die letzte gemeinschaftliche Kreis-Parabeltangente genau legen und schneidet auf der y Achse w_4 ab.

Ad 4). Der äusserste Fall von vier gleichen Wurzeln tritt ein, wenn das Gleichungspolynom eine vollständige 4te Potenz des Wurzelfactors ist, also die Coefficienten die Bedingungen erfüllen:

$$8b = 3a^2, \quad 16c = a^3, \quad d = \left(\frac{a}{4}\right)^4,$$

wobei die Wurzel selbst den Wert

$$w_{1,2,3,4} = \frac{-a}{4} = w$$

besitzt. Der Grundkreis K berührt die Parabel im Scheitel nach 3ter Ordnung und hat den Radius

$$r = p,$$

während die Leitgerade L, als Scheiteltangente, die vier gemeinschaftlichen Kreis-Parabel-Tangenten repräsentirt und auf der y Achse den Wurzelwert w abschneidet.

Schlussbemerkungen.

1. Auf eine wesentliche Erweiterung der in vorliegender Arbeit ausgeführten Lösungsmethoden höherer Gleichungen soll im Folgenden noch aufmerksam gemacht werden.

Bis jetzt sind hauptsächlich jene Gleichungen 3ten und 4ten Grades hervorgehoben worden, deren Coefficienten der Potenzen der Unbekannten in Zahlenwerten gegeben waren. Bei der analytischen Behandlung von Aufgaben 3ter und 4ter Ordnung gelangt man aber zu solchen Gleichungen des entsprechenden Grades deren Coefficienten als Ausdrücke von der 1ten bis 3ten respective 1ten bis 4ten Dimension sich aus den Angabsstrecken darstellen.

Die entwickelten Lösungsmethoden können aber auch für solche, durchaus homogene Ausdrücke enthaltenen Gleichungen unverändert angewendet werden. Es ergibt sich dieses leicht aus der Betrachtung

der Ausdrücke für die Grundfactoren e, f, k (respective δ) und $\operatorname{ctg}\varphi$, welche bei wirklicher Wahl von r als Strecke, mit Rücksicht der Dimensionen der Gleichungscoefficienten durchaus homogene Ausdrücke der ersten, beziehungsweise nullten Dimension werden, sowie aus dem Umstande, dass bei der ganzen Ableitung die eingeführten Grössen sowohl Angabsstrecken einer Aufgabe 3ter oder 4ter Ordnung, als auch solche bedeuten können, die mit Zugrundelegung einer Massstabeinheit, die gegebenen Zahlenwerte einer Gleichung solchen Grades repräsentiren. Die Ausdrücke für die Grundfactoren setzen sich aus den Gleichungscoefficienten rational zusammen, sind also eindeutig bestimmbar, nachdem die Coefficienten aus den Angabsstrecken der Aufgabe hergestellt wurden.

Darnach kann man also die analytische Lösung jeder Aufgabe 3ter oder 4ter Ordnung constructiv ausführen. Dies ist in der Tat in der vorstehenden Abhandlung mit den beiden Fundamentalproblemen — der „Trisection des Winkels“ und des „graphischen Kubikwurzelziehens“ (welches ja geometrisch aufgefasst gleich ist der Verwandlung eines Parallelepipeds in einen volumgleichen Würfel) — in der einfachsten Weise durchgeführt worden. Der gleiche Weg dürfte noch für manche von derlei Aufgaben der passendste sein. Im Allgemeinen muss man jedoch zugestehen, dass diese Methode häufig an einer Umständlichkeit und geringen Uebersichtlichkeit leiden wird. Eine befriedigende, rein geometrische Lösung der Aufgaben 3ter und 4ter Ordnung vermögen nur die Lehren der neueren Geometrie zu liefern, mit deren Ausführungen man das in vorliegender Arbeit angewendete, mechanische Verfahren vereinen kann.

Eine auf rein geometrische Entwicklungen basirte Lösung des behandelten Hauptproblemes hat in genialer Weise Chasles in seiner Abhandlung „Construction des racines des équations du troisième et quatrième degré“ veröffentlicht im Journal des mathematiques, publié par Liouville t. XX. pag. 329 geliefert. Er führte die Aufgabe auf jene der Bestimmung der Schnittpunkte eines gezeichnet vorliegenden Kegelschnittes mit einem anderen, durch fünf Punkte gegebenen, zurück.

Auch Dr. Herm. Kortüm weist auf eine Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen mittelst Construction hin. Es geschieht dies in seinen „zwei Abhandlungen über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades“ (Bonn 1869), worin die Aufgabe gelöst wurde, die Bestimmung der Durchschnittspunkte zweier, durch je 5 Punkte gegebener Kegelschnitte zurückzuführen auf jene zwischen einem Kreise und einem ein für allemal gezeichnet vorliegenden Kegelschnitte. In den Lösungsmethoden vorstehender Arbeit ist der unbedingt notwendige Kegelschnitt stets eine Parabel, die dann durch

das angewendete, mechanische Grundverfahren ersetzt wurde. Dies ergab eben den für die praktischen Zwecke ziemlich directen Weg, der mit Berücksichtigung der beschriebenen Hilfsconstructionen auch immer ausreichend genaue Resultate liefern wird.

2. Will man das in vorliegender Arbeit angewendete mechanische Verfahren mittelst des rechten Winkels nicht als zulässig gelten lassen, so ist doch in der ganzen Durchführung auch schon die Lösung mittelst einer einfachen Hilfscurve mit inbegriffen.

Es wurde schon bei Aufstellung jenes Grundverfahrens bemerkt, dass der durch dasselbe auf der Leitgeraden erhaltene Scheitelpunkt des beweglichen rechten Winkels eben nichts anderes ist als der Durchschnitt jener Geraden mit der Kreisfusspunktscurve, die durch den Grundkreis K und Fixpunkt F als Strahlenmittelpunkt gegeben erscheint.

Das in der Nähe jenes fraglichen Schnittpunktes verlaufende Curvenstück kann mit grosser Schärfe, also der Punkt selbst ausreichend genau ermittelt werden und ist dann in der auseinandergesetzten Weise zur Bestimmung der fraglichen Wurzelwerte der gegebenen Gleichung entsprechend auszunützen.

II.

Ueber ein Problem der Curventheorie.

Von

R. Hoppe.

Das Problem, um welches es sich handelt, lautet folgendermassen.

Zwischen den Winkeln, welche die Tangente, Hauptnormale und Binormale einer gesuchten Curve mit irgendwelchen festen Geraden bilden, ist eine Relation gegeben; man soll, bei willkürlich bleibendem, beliebig zu ergänzendem Bogenelement, den entwickelten analytischen Ausdruck der Curve finden.

Die Relation kann eine primitive oder eine Differentialgleichung sein; dagegen darf sie das Bogenelement nicht enthalten, weil sonst 2 Relationen zur Bestimmung erfordert würden.

Die Aufgabe ist dann gelöst, wenn die Richtungscosinus der Tangente f, g, h als Functionen eines Parameters bekannt sind, indem alsdann für beliebiges Bogenelement ∂s die Werte der Coordinaten

$$x = \int f \partial s; \quad y = \int g \partial s; \quad z = \int h \partial s$$

daraus hervorgehen.

Die Lösung ist leicht und bekannt erstens, wenn nur die Neigung einer der 3 begleitenden Axen, d. h. der Tangente, Haupt- oder Binormale, gegen 2 feste Gerade in der Relation vorkommt, weil dann ihre Richtung vollständig bestimmt ist; zweitens, wenn die bestimmende Relation sich nur auf eine feste Gerade bezieht.

Seien bezeichnet die Richtungscosinus der

Tangente	durch	$f,\ g,\ h$
Hauptnormale	„	$f',\ g',\ h'$
Binormale	„	$l,\ m,\ n$

Nimmt man die feste Gerade zur x Axe, so ist gegeben die allgemeine Relation:

$$f^2+f'^2+l^2=1$$

die der besondern Aufgabe entsprechende

$$F(f, f', l)=0$$

und eine beliebig gewählte

$$af+bf'+cl=\varphi$$

wodurch f, f', l als Functionen des Parameters φ bestimmt sind und, wenn F linear oder rein quadratisch, so wie auch in manchen andern Fällen, dargestellt werden können. Kennt man dann entweder f', g', h' oder l, m, n oder f, f', l, so kann man, wie in T. LVI. S. 59 gezeigt, leicht f, g, h finden.

Die nächste Erweiterung der Aufgabe würde sein, wenn beide Schenkel der durch Relation verbundenen Winkel verschieden sind.

Zur Orientirung beschreiben wir um einen festen Punkt O mit der Linieneinheit als Radius eine Kugel und ziehen die Radien OT, OH, OB, OX, OM. in den Richtungen der Tangente, Hauptnormale, Binormale und der 2 festen Geraden, deren Ebene wir zur xy Ebene und deren erstere wir zur x Axe nehmen.

Die gegebene Relation denken wir aufgelöst durch Darstellung der 2 Winkel, welche zwei der 3 ersten Geraden mit je einer der 2 letzten bilden, als Functionen eines Parameters. Die Combination ergibt 3 verschiedene Aufgaben mit folgenden respectiven Daten:

	constant		variabel	
I.	$XM=\alpha$;	$TH=R$;	$\cos XT=f$;	$MH=\lambda$
II.	$XM=\alpha$;	$HB=R$;	$\cos XB=l$;	$MH=\lambda$
III.	$XM=\alpha$;	$TB=R$;	$\cos XT=f$;	$MB=\mu$

In allen 3 Fällen hat man ein sphärisches Viereck mit 4 gegebenen Seiten. Das fünfte Bestimmungsstück muss durch die Variationsgesetze, also durch Differentialrelationen ersetzt werden.

Wir beginnen mit der Bestimmung des Vierecks

$$THMX$$

darin sind

$$\cos XH = f' \text{ und } MT = \varphi$$

unbekannt. Trägt man auf dem (wo nötig verlängerten) Normalbogen XM den Quadranten $XY = R$ ab und zieht YT, YH, so wird

$$\cos YT = g; \quad \cos YH = g'$$

und man hat:

$$hf' - fh' = m$$

Multiplicirt man mit h und beachtet, dass

$$h^2 = 1 - f^2 - g^2; \quad -hh' = ff' + gg' \qquad (1)$$
$$m^2 = 1 - g^2 - g'^2$$

ist, so erhält man:

$$(1 - g^2)f' + fgg' = \pm\sqrt{1 - f^2 - g^2}\sqrt{1 - g^2 - g'^2} \qquad (2)$$

woraus:

$$\frac{\partial g}{\partial f} = \frac{g'}{f'} = \frac{(1 - g^2)g'}{-fgg' \pm \sqrt{1 - f^2 - g^2}\sqrt{1 - g^2 - g'^2}} \qquad (3)$$

Dies ist die Differentialgleichung für den Fall, wo $XM = R$ ist, wo also M mit Y zusammenfällt, so dass f und g' gegeben sind. Ihre Integration ergibt g, und nachher Gl. (2) f'; h und h' sind sodann nach Gl. (1) bekannt, und durch die Werte von f, g, h ist die Aufgabe gelöst.

Um von diesem Specialfall auf die allgemeine Aufgabe überzugehen, wo λ statt g' gegeben ist, betrachten wir die sphärischen Dreiecke

$$YMH, \quad YXT, \quad MXT, \quad TMH$$

in welchen folgende Winkel sich über XY zu 2R ergänzen:

$$XMT + TMH + HMY = 2R \qquad (4)$$

In Dreieck MXT und YXT hat man:

$$\cos(MXT) = \frac{\cos\varphi - f\cos\alpha}{\sqrt{1 - f^2}\sin\alpha} = \frac{g}{\sqrt{1 - f^2}}$$

woraus:

$$\cos\varphi = f\cos\alpha + g\sin\alpha$$

ausserdem:

$$\cos XMT = \frac{f - \cos\alpha\cos\varphi}{\sin\alpha\sin\varphi} = \frac{f\sin\alpha - g\cos\alpha}{\sin\varphi}$$

in Dreieck TMH:

$$\cos TMH = -\cot\lambda\cot\varphi$$

in Dreieck YMH:

$$\cos HMY = \frac{g' - \sin\alpha\cos\lambda}{\cos\alpha\sin\lambda} \tag{5}$$

woraus weiter:

$$\sin XMT = \frac{\sqrt{1-f^2-g_2}}{\sin\varphi}$$

$$\sin TMH = \frac{\sqrt{\sin^2\lambda - (f\cos\alpha + g\sin\alpha)^2}}{\sin\lambda\sin\varphi}.$$

und findet nach Gl. (5) mit Anwendung von Gl. (4):

$$g' = \sin\alpha\cos\lambda + \{(f\cos\alpha + g\sin\alpha)(f\sin\alpha - g\cos\alpha)\cos\lambda \tag{6}$$

$$+ \sqrt{1-f^2-g^2}\sqrt{\sin^2\lambda - (f\cos\alpha+g\sin\alpha)^2}\}\frac{\cos\alpha}{1-(f\cos\alpha+g\sin\alpha)^2}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für g' in Gl. (3), so geht sie in diejenige Gleichung über, deren Integration die erste der 3 Aufgaben löst. Sie ist demnach stets eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung, deren Coefficienten von beiden Variabeln f, g abhangen.

Das Vorzeichen der Quadratwurzeln muss in dem Sinne doppelt bleiben, dass die Lösung sich über beide Vorzeichen erstreckt. Da sich keine gegebene Grösse auf die z Axe bezieht, so besteht die Curve aus 2 symmetrischen Zweigen zu beiden Seiten der xy Ebene.

Die Lösung der ersten Aufgabe liefert zugleich die der zweiten: man braucht nur die Tangente mit der Binormale zu vertauschen, da beide in reciproker Beziehung stehen. Es ist also nur l, m für f, g zu substituiren, während f', g' unverändert bleiben. Einen Vorzeichenwechsel erleiden nur h, h', n, die nicht vorkommen.

Bei der dritten Aufgabe ist in Gl. (3) nur für g' der Wert

$$g' = \sqrt{1-g^2-m^2}$$

zu substituiren, so dass sie lautet:

$$\frac{\partial g}{\partial f} = \frac{1-g^2}{-fg \pm m\sqrt{\dfrac{1-f^2-g^2}{1-g^2-m^2}}}$$

Ist dann m als Function von f gegeben, so erhält man durch Integration g, also die fertige Lösung für den Fall $\alpha = R$, wo M in Y fällt.

In der allgemeinen Aufgabe III. ist μ statt m gegeben. Die für die erste Aufgabe construirte Figur nebst der trigonometrischen Rechnung passt vollkommen auch hier. Die Binormale tritt an die

Stelle der Hauptnormale, also in der Figur B an die Stelle von H, und in Gl. (6) m und μ an die Stelle von g' und λ.

Fassen wir die Resultate zusammen, so hat sich folgendes ergeben.

Sind die 2 Winkel, welche 2 begleitende Axen einer Curve einzeln mit 2 festen Geraden bilden, gegebene Functionen von einander, so hängt die Darstellung der Curve von der Integration einer Gleichung der Form

$$\frac{\partial g}{\partial f} = \psi(f, g)$$

ab, wo ψ eine algebraische Function bezeichnet, die im allgemeinen 3 irrationale Quadratwurzeln, zum Teil in einer vierten involvirt, enthält, während im Falle, wo die 2 festen Geraden normal zu einander sind, nur 2 irrationale, nicht involvirte Quadratwurzeln vorkommen.

Die drei, den Combinationen der 3 begleitenden Axen entsprechenden Aufgaben lassen sich wieder als Specialfälle einer allgemeinern Aufgabe betrachten, indem man statt der 2 begleitenden Axen zwei mit dem begleitenden Axensystem fest verbundene Gerade als Schenkel der gegebenen Winkel annimmt. Auch diese allgemeinere Aufgabe würde sich durch Substitution auf die Aufgabe I. zurückführen lassen, worauf ich hier nicht eingehe.

III.

Ueber die Bestimmung der Unterscheidungscharaktere für die Kegelschnitte, wenn die Gleichungen derselben in trimetrischen Liniencoordinaten gegeben sind.

Von

A. Ehlert.

In Salmon's „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" Artikel 318, Aufgabe 5 findet sich die Methode angedeutet, nach welcher man für eine in trimetrischen Liniencoordinaten gegebene Kegelschnittsgleichung die Unterscheidungscharaktere für die Ellipse, Hyperbel und Parabel feststellen kann. Dieselbe Methode dient aber auch, wie in der folgenden Darstellung gezeigt werden soll, zu einer sehr einfachen Ableitung der Bedingungen, unter welchen die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$\alpha_{11}\xi_1^2+\alpha_{22}\xi_2^2+\alpha_{33}\xi_3^2+2\alpha_{23}\xi_2\xi_3+2\alpha_{31}\xi_3\xi_1+2\alpha_{12}\xi_1\xi_2=0$$

ein Punktepaar, einen Kreis und eine gleichseitige Hyperbel repräsentirt.

Bezeichnen s_1, s_2 und s_3 die Seitenstrecken des Fundamentaldreiecks, so stellt die Gleichung:

$$s_1x_1\xi_1+s_2x_2\xi_2+s_3x_3\xi_3=0$$

für constante x_i und variabele ξ_i die Gleichung des x_i, dagegen für constante ξ_i und variabele x_i die Gleichung der Geraden ξ_i dar.

Soll der Punkt

$$\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3=0$$

auf der Curve

$$\Sigma\equiv\alpha_{11}\xi_1^2+\alpha_{22}\xi_2^2+\alpha_{33}\xi_3^2+2\alpha_{23}\xi_2\xi_3+2\alpha_{31}\xi_3\xi_1+2\alpha_{12}\xi_1\xi_2=0$$

liegen, so müssen die beiden von ihm ausgehenden Tangenten zusammenfallen d. h. die beiden Wurzeln der in Bezug auf $\xi_1:\xi_3$ quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned}&\frac{\xi_1^2}{\xi_3^2}(\alpha_{11}\alpha_2^2+\alpha_{22}\alpha_1^2-2\alpha_{12}\alpha_1\alpha_2)\\ &+2\frac{\xi_1}{\xi_3}(\alpha_{22}\alpha_1\alpha_3-\alpha_{23}\alpha_1\alpha_2+\alpha_{31}\alpha_2^2-\alpha_{12}\alpha_2\alpha_3)\\ &+(\alpha_{22}\alpha_3^2+\alpha_{33}\alpha_2^2-2\alpha_{23}\alpha_2\alpha_3)=0\end{aligned}$$

welche durch Elimination von ξ_2 aus jenen beiden Gleichungen entsteht, müssen gleich sein. Dies ist aber der Fall, wenn die Bedingung:

$$\begin{aligned}&(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}^2)\alpha_1^2+(\alpha_{33}\alpha_{11}-\alpha_{31}^2)\alpha_2^2+(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2)\alpha_3^2\\ &+2(\alpha_{31}\alpha_{12}-\alpha_{11}\alpha_{23})\alpha_2\alpha_3\\ &+2(\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{22}\alpha_{31})\alpha_3\alpha_1\\ &+2(\alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{33}\alpha_{12})\alpha_1\alpha_2=0\end{aligned}$$

erfüllt ist, wie sich nach einigen Umformungen leicht ergiebt.

Bezeichnen nun A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{31} und A_{12} die auf die respectiven Elemente α_{11}, α_{22}, α_{33}, α_{23}, α_{31} und α_{12} bezogenen Minoren oder Unterdeterminanten der Determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{31}\\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23}\\ \alpha_{31}, & \alpha_{23}, & \alpha_{33}\end{vmatrix}$$

so kann jene Bedingung, unter welcher der Punkt

$$\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3=0$$

auf dem Kegelschnitt $\Sigma=0$ liegt, in der bequemeren Form:

$$1)\quad A_{11}\alpha_1^2+A_{22}\alpha_2^2+A_{33}\alpha_3^2+2A_{23}\alpha_2\alpha_3+2A_{31}\alpha_3\alpha_1+2A_{12}\alpha_1\alpha_2=0$$

dargestellt werden, welches die bekannte Gleichung desselben Kegelschnitts in trimetrischen Punktcoordinaten ist.

Soll der Punkt

$$\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3=0$$

zugleich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene, für welche $\frac{\xi_1}{\xi_3} = 1$ und $\frac{\xi_2}{\xi_3} = 1$ ist, liegen, so muss

$$2) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \text{ sein.}$$

Man erhält also durch Elimination von α_3 aus den beiden Gleichungen 1) und 2) die quadratische Gleichung:

$$3) \quad (A_{11} + A_{33} - 2A_{31})\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 + 2(A_{33} - A_{23} - A_{31} + A_{12}).\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + A_{22} + A_{33} - 2A_{23} = 0$$

zur Bestimmung der beiden Punkte, welche zugleich dem Kegelschnitt $\Sigma = 0$ und der unendlich fernen Geraden der Ebene angehören. Diese beiden Schnittpunkte sind folglich reell, imaginär oder fallen in einen Punkt zusammen, je nach dem die beiden Wurzeln jener quadratischen Gleichung 3) reell, imaginär oder einander gleich sind, d. h. je nachdem

$$(A_{33} - A_{23} - A_{31} + A_{12}) - (A_{11} + A_{33} - 2A_{31})(A_{22} + A_{33} - 2A_{23}) > 0, \ < 0 \ \text{ oder } = 0 \text{ ist.}$$

Die Grösse:

$$(A_{33} - A_{23} - A_{31} + A_{12}) - (A_{11} + A_{33} - 2A_{31})(A_{22} + A_{33} - 2A_{23})$$

lässt sich aber umformen in

$$- [(A_{22}A_{33} - A_{23}^2) + (A_{33}A_{11} - A_{31}^2) + (A_{11}A_{22} - A_{12}^2) + 2(A_{31}A_{12} - A_{11}A_{23}) + 2(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{31}) + 2(A_{23}A_{31} - A_{33}A_{12})]$$

oder in

$$- [A_{11}' + A_{22}' + A_{33}' + 2A_{23}' + 2A_{31}' + 2A_{12}']$$

wo A_{11}', A_{22}', A_{33}', A_{23}', A_{31}', A_{12}' die auf die respectiven Elemente A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{31} und A_{12} bezogenen Minoren der Determinante des adjungierten Systems

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{31} \\ A_{12}, & A_{22}, & A_{23} \\ A_{31}, & A_{23}, & A_{33} \end{vmatrix}$$

sind. Nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Determinanten ist aber

$$\Delta' = \Delta^2$$

und

$$A_{11}' = \alpha_{11}.\Delta \qquad A_{23}' = \alpha_{23}.\Delta$$
$$A_{22}' = \alpha_{22}.\Delta \qquad A_{31}' = \alpha_{31}.\Delta$$
$$A_{33}' = \alpha_{33}.\Delta \qquad A_{12}' = \alpha_{12}.\Delta$$

Daher ist jene Grösse:

$$(A_{33} - A_{33} - A_{31} + A_{12})^2 - (A_{11} + A_{33} - 2A_{31})(A_{22} + A_{33} - 2A_{22})$$
$$= -\Delta(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12})$$

und es ergiebt sich:

Die allgemeine Gleichung in trimetrischen Liniencoordinaten $\Sigma = 0$ stellt

1) eine Hyperbel dar, wenn die Discriminante der gegebenen Gleichung und die Coefficientensumme entgegengesetzte Vorzeichen haben;

2) eine Ellipse dar, wenn die Discriminante der gegebenen Gleichung und die Coefficientensumme dieselben Vorzeichen besitzen.

Die beiden Schnittpunkte des Kegelschnitts $\Sigma = 0$ mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene fallen in einen Punkt zusammen, wenn

$$\Delta(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12}) = 0$$

d. h. wenn entweder

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12} = 0$$

oder wenn

$$\Delta = 0 \quad \text{ist.}$$

Da die unendlich entfernte Gerade der Ebene für alle Parallelen derselben Ebene Tangente ist, so muss die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts $\Sigma = 0$, wenn dieselbe eine Parabel repräsentiren soll, durch die Coordinaten der unendlich entfernten Geraden, für welche $\frac{\xi_1}{\xi_3} = 1$ und $\frac{\xi_2}{\xi_3} = 1$ ist, erfüllt werden, d. h. es muss

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12} = 0 \quad \text{sein.}$$

Die allgemeine Gleichung $\Sigma = 0$ stellt daher eine Parabel dar, wenn die Coefficientensumme der Gleichung den Wert Null hat.

Eine homogene Gleichung zweiten Grades in trimetrischen Liniencoordinaten kann überhaupt nur eine Hyperbel, Ellipse, Parabel oder ein Punktepaar repräsentiren. Geht man aber von der Gleichung eines Punktepaares in trimetrischen Liniencoordinaten

$$(\alpha_1'\xi_1 + \alpha_2'\xi_2 + \alpha_3'\xi_3).(\alpha_1''\xi_1 + \alpha_2''\xi_2 + \alpha_3''\xi_3) = 0$$

zur entsprechenden Gleichung in trimetrischen Punktcoordinaten über, so erhält man bekanntich das Quadrat der Gleichung der Verbindungsgeraden jener beiden Punkte α_i' und α_i''. Dies ist der analytische Ausdruck für die geometrische Wahrheit, dass durch ein nicht zusammenfallendes Punktepaar stets eine Gerade bestimmt ist, oder dass von solchen Punkten, die in der Verbindungsgeraden jenes Punktepaares liegen, die beiden an die Curve d. h. an das Punktepaar gezogenen Tangenten zusammenfallen. Das Punktepaar stellt also gleichzeitig ein anderes geometrisches Gebilde, nämlich seine Verbindungsgerade, dar. In diesem Sinne ist es gestattet, von den Durchschnittspunkten eines Punktepaares mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene zu sprechen. Es sind die beiden zusammenfallenden Punkte, in denen die zweimal gerechnete Verbindungsgerade die unendlich entfernte Gerade der Ebene schneidet. Dieser Schnittpunkt ist in der Tat der einzige Punkt auf der unendlich fernen Geraden, von welchen aus die beiden Tangenten an das Punktepaar zusammenfallen.

Das Zusammenfallen der beiden Schnittpunkte kann aber nur unter der Bedingung $\Delta = 0$ stattfinden, denn jenes andere Kriterium

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12} = 0$$

gilt, wie schon angezeigt wurde, nur für die Parabel.

Es stellt daher die allgemeine Gleichung $\Sigma = 0$ ein Punktepaar dar, wenn die Discriminante der Gleichung den Wert Null hat. Für die trimetrischen Coordinaten des Schnittpunktes dieses Punktepaares (d. h. seiner Verbindungsgeraden) mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene hat man daher aus der Gleichung 3)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{A_{23} + A_{31} - A_{33} - A_{12}}{A_{11} + A_{33} - 2A_{31}}$$

und

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1 = \frac{A_{31} + A_{12} - A_{11} - A_{23}}{A_{11} + A_{33} - 2A_{31}}$$

Daher ist die Gleichung dieses Durchschnittspunktes

$$(A_{23} + A_{31} - A_{33} - A_{12})\xi_1 + (A_{11} + A_{33} - 2A_{31})\xi_2$$
$$+ (A_{31} + A_{12} - A_{11} - A_{23})\xi_3 = 0$$

Diese Gleichung kann aber auch in den beiden Formen

$$(A_{12} + A_{23} - A_{22} - A_{31})\xi_1 + (A_{31} + A_{12} - A_{11} - A_{23})\xi_2$$
$$+ (A_{22} + A_{11} - 2A_{12})\xi_3 = 0$$

und

$$(A_{33} - A_{22} - 2A_{23})\xi_1 + (A_{23} + A_{31} - A_{33} - A_{12})\xi_2$$
$$+ (A_{12} + A_{23} - A_{22} - A_{31})\xi_3 = 0$$

geschrieben werden, da die früher bewiesene Identität

$$(A_{22} + A_{33} - 2A_{23})(A_{33} + A_{11} - 2A_{31})$$
$$- (A_{23} + A_{31} - A_{33} - A_{12})^2$$
$$\equiv \Delta(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12})$$

durch cyklische Vertauschung der Indices die drei Identitäten:

$$(A_{22} + A_{33} - 2A_{23})(A_{33} + A_{11} - 2A_{31}) - (A_{23} + A_{31} - A_{33} - A_{12})^2$$
$$\equiv (A_{33} + A_{11} - 2A_{31})(A_{11} + A_{22} - 2A_{12}) - (A_{31} + A_{12} - A_{14} - A_{23})^2$$
$$\equiv (A_{11} + A_{22} - 2A_{12})(A_{22} + A_{33} - 2A_{23}) - (A_{12} + A_{23} - A_{22} - A_{31})^2$$

nach sich zieht.

Dass die drei gefundenen Gleichungen wirklich den Durchschnittspunkt der Verbindungsgeraden des Punktepaares $\Sigma = 0$ mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene darstellen, kann direct bestätigt werden.

Für die trimetrischen Coordinaten $x_1\mathfrak{S}$, $x_2\mathfrak{S}$, $x_3\mathfrak{S}$ des Schnittpunktes einer beliebigen Geraden

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene

$$s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_4 = 0$$

hat man:

$$x_1\mathfrak{S} : x_2\mathfrak{S} : x_3\mathfrak{S} = (a_2s_3 - a_3s_2) : (a_3s_1 - a_1s_3) : (a_1s_2 - a_2s_1)$$

Ist die Gerade a_i die Verbindungsgerade der beiden Punkte x_i' und x_i'', so ist bekanntlich:

$$a_1 : a_2 : a_3 = (x_2'x_3'' - x_2''x_3') : (x_3'x_1'' - x_3''x_1') : (x_1'x_2'' - x_1''x_2')$$

und man erhält daher die Gleichung des Schnittpunktes der Verbindungsgeraden der beiden Punkte x_i' und x_i'' mit der unendlich fernen Geraden der Ebene in der Form:

$$s_1[(x_3'x_1'' - x_3''x_1')s_3 - (x_1'x_2'' - x_1''x_2')s_2]\xi_1$$
$$+ s_2[(x_1'x_2'' - x_1''x_2')s_1 - (x_2'x_3'' - x_2''x_3')s_3]\xi_2$$
$$+ s_3[(x_2'x_3'' - x_2''x_3')s_2 - (x_3'x_1'' - x_3''x_1')s_1]\xi_3 = 0.$$

Diese Gleichung kann also nur durch einen constanten Factor von jeder der drei vorhin angeführten Formen z. B. von

$$(A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12})\xi_1+(A_{11}+A_{33}-2A_{31})\xi_2$$
$$+(A_{31}+A_{12}-A_{11}-A_{23})\xi_3=0$$

verschieden sein, wenn $\Sigma=0$ ein Punktepaar darstellt; d. h. wenn die Function

$$\alpha_{11}\xi_1^2+\alpha_{22}\xi_2^2+\alpha_{33}\xi_3^2+2\alpha_{23}\xi_2\xi_3+2\alpha_{31}\xi_3\xi_1+2\alpha_{12}\xi_1\xi_2$$

identisch sein soll mit der Function

$$(s_1x_1'\xi_1+s_2x_2'\xi_2+s_3x_3'\xi_3)(s_1x_1''\xi_1+s_2x_2''\xi_2+s_3x_3''\xi_3).$$

Unter dieser Voraussetzung muss aber

$$\alpha_{11}=2x_1'x_1''s_1^2 \qquad \alpha_{23}=(x_2'x_3''+x_2''x_3')s_2s_3$$
$$\alpha_{22}=2x_2'x_2''s_2^2 \qquad \alpha_{31}=(x_3'x_1''+x_3''x_1')s_3s_1$$
$$\alpha_{33}=2x_3'x_3''s_3^2 \qquad \alpha_{12}=(x_1'x_2''+x_1''x_2')s_1s_2$$

sein, und man findet dann nach einigen Umformungen die Minoren

$$A_{11}=-(x_2'x_3''-x_2''x_3')^2s_2^2s_3^2$$
$$A_{22}=-(x_3'x_1''-x_3''x_1')^2s_3^2s_1^2$$
$$A_{33}=-(x_1'x_2''-x_1''x_2')^2s_1^2s_2^2$$
$$A_{23}=-(x_3'x_1''-x_3''x_1')(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_1^2s_2s_3$$
$$A_{31}=-(x_1'x_2''-x_1''x_2')(x_2'x_3''-x_2''x_3')s_2^2s_3s_1$$
$$A_{12}=-(x_2'x_3''-x_2''x_3')(x_3'x_1''-x_3''x_1')s_3^2s_1s_2$$

Aus diesen Werten ergiebt sich aber:

$$A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12}=$$
$$s_1s_2[(x_2'x_3''-x_2''x_3')x_3-(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_1]\times$$
$$[(x_3'x_1''-x_3''-x_1')s_3-(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_2]$$

$$A_{11}+A_{33}-2A_{31}=$$
$$s_2^2[(x_2'x_3''-x_2''x_3')x_3-(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_1]\times$$
$$[(x_1'x_2''-x_1''-x_2')s_1-(x_2'x_3''-x_2''x_3')s_3]$$

und

$$A_{31}+A_{12}-A_{11}-A_{23}=$$
$$s_2s_3[(x_2'x_3''-x_2''x_3')s_3-(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_1]\times$$
$$[(x_2'x_3''-x_2''x_3')s_2-(x_3'x_1''-x_3''x_1')s_1]$$

Die drei Coefficienten

$A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12}$, $A_{11}+A_{33}-2A_{31}$ und $A_{31}+A_{12}-A_{11}-A_{23}$

haben also den Factor

$$s_2[(x_2'x_3''-x_2''x_3')s_3-(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_1]$$

gemeinsam und es stellen daher in der Tat die beiden Gleichungen:

$$(A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12})\xi_1+(A_{11}+A_{33}-2A_{31})\xi_2$$
$$+(A_{31}+A_{12}-A_{11}-A_{23})\xi_2=0$$

und

$$\sum_{k,l,m}\{s_k[(x_m'x_k''-x_m''x_k')s_m-(x_k'x_l''-x_k''x_l')s_l']\xi_k\}=0$$

denselben Punkt dar.

Alle Kreise derselben Ebene haben, wie bekannt, mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene dieselben zwei imaginären Punkte gemeinsam. Darum ist ein Kreis auch durch drei endliche Punkte völlig bestimmt, während ein Kegelschnitt im Allgemeinen erst durch fünf Punkte festgesetzt ist. Man kann daher Kreise als solche Kegelschnitte (specieller als solche Ellipsen) betrachten, welche durch gewisse zwei feste imaginäre Punkte auf der unendlich entfernten Geraden der Ebene gehen.

Bezeichnen A_1, A_2 und A_3 die den Seitenstrecken s_1, s_2 und s_3 respective gegenüberliegenden Innenwinkel des Fundamentaldreiecks, so findet man (Salmon: Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Artikel 164 Aufgabe 8) für die trimetrischen Coordinaten jener beiden festen Punkte (der sogenannten imaginären Kreispunkte im Unendlichen)

$$\frac{x_1^{\left(\frac{\infty}{i}\right)'}}{x_3^{\left(\frac{\infty}{i}\right)'}}=-\cos A_2+i\sin A_2 \qquad \frac{x_2^{\left(\frac{\infty}{i}\right)'}}{x_3^{\left(\frac{\infty}{i}\right)'}}=-\cos A_1-i\sin A_1$$

und

$$\frac{x_1^{\left(\frac{\infty}{i}\right)''}}{x_3^{\left(\frac{\infty}{i}\right)''}}=-\cos A_2-i\sin A_2 \qquad \frac{x_2^{\left(\frac{\infty}{i}\right)''}}{x_3^{\left(\frac{\infty}{i}\right)''}}=-\cos A_1+i\sin A_1$$

Daher

$$\frac{x_1^{\left(\frac{\infty}{i}\right)'}}{x_2^{\left(\frac{\infty}{i}\right)'}}=\frac{-\cos A_2+i\sin A_2}{-\cos A_1-i\sin A_1}=-\cos A_3-i\sin A_3$$

$$\frac{x_1^{\left(\frac{\infty}{i}\right)''}}{x_2^{\left(\frac{\infty}{i}\right)''}}=\frac{-\cos A_2-i\sin A_2}{-\cos A_1+i\sin A_1}=-\cos A_3+i\sin A_3$$

Will man daher die Bedingungen aufstellen, unter welchen die allgemeine Gleichung $\Sigma = 0$ einen Kreis darstellt, so hat man nur auszudrücken, dass dieser Kegelschnitt durch jene beiden festen Punkte gehen soll. Die beiden Durchschnittspunkte eines jeden Kegelschnitts mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene wurden aber durch die Gleichung 3) bestimmt. Ist nun dieser Kegelschnitt ein Kreis, so muss folglich

$$\frac{2(A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12})s_2}{(A_{11}+A_{33}-2A_{31})s_1} = \frac{x_1^{(\varphi)'}}{x_2^{(\varphi)'}} + \frac{x_1^{(\varphi)''}}{x_2^{(\varphi)''}}$$

und

$$\frac{(A_{22}+A_{33}-2A_{23})s_2^2}{(A_{11}+A_{33}-2A_{31})s_1^2} = \frac{x_1^{(\varphi)'}}{x_2^{(\varphi)'}} \cdot \frac{x_1^{(\varphi)''}}{x_2^{(\varphi)''}}$$

oder

I) $$\frac{(A_{33}-A_{23}-A_{31}+A_{12})s_2}{(A_{11}+A_{33}-2A_{31})s_1} = \cos A_3$$

und

II) $$\frac{(A_{22}+A_{33}-2A_{23})s_2^2}{(A_{11}+A_{33}-2A_{31})s_1^2} = 1 \quad \text{sein.}$$

Diese beiden Bedingungen bilden also das Kriterium für den Kreis, können aber noch symmetrischer ausgedrückt werden, wenn man berücksichtigt, dass für das Fundamentaldreieck die Relation

$$s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 = 2s_1 s_2 \cos A_3 \quad \text{gilt.}$$

Aus I) folgt dann:

$$\frac{2(A_{33}-A_{23}-A_{31}+A_{12})}{A_{11}+A_{33}-2A_{31}} = \frac{2s_1 s_2 \cos A_3}{s_2^2}$$

$$= \frac{s_1^2}{s_2^2} + 1 - \frac{s_3^2}{s_2^2}$$

und es ist also, mit Rücksicht auf II)

$$\frac{s_3^2}{s_2^2} = \frac{A_{22}+A_{33}-2A_{23}}{A_{11}+A_{33}-2A_{31}} - \frac{2(A_{33}-A_{23}-A_{31}+A_{12})}{A_{11}+A_{33}-A_{31}} + 1$$

d. h.

$$\frac{s_3^2}{s_2^2} = \frac{A_{11}+A_{22}-2A_{12}}{A_{11}+A_{33}-2A_{31}}.$$

Die allgemeine Kegelschnittsgleichung in trimetrischen Liniencoordinaten $\Sigma = 0$ repräsentirt also einen Kreis, wenn die beiden Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{A_{11}+A_{22}-2A_{12}}{A_{33}+A_{11}-2A_{31}}&=\frac{s_3^2}{s_2^2}\\ \frac{A_{22}+A_{33}-2A_{23}}{A_{33}+A_{11}-2A_{31}}&=\frac{s_1^2}{s_2^2}\end{aligned}\right\}$$

oder

$$\frac{A_{11}+A_{22}-2A_{12}}{s_3^2}=\frac{A_{22}+A_{33}-2A_{33}}{s_1^2}=\frac{A_{33}+A_{11}-2A_{31}}{s_2^2}$$

oder

$$\frac{A_{kk}+A_{ll}-2A_{kl}}{s_m^2}=\text{constans erfüllt sind.}$$

Diesen Bedingungen wird genügt, wenn z. B. sämmtliche Minoren A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{12}, A_{23} und A_{31} den Wert Null haben, d. h. wenn die allgemeine Gleichung $\Sigma = 0$ ein zusammenfallendes Punktepaar darstellt. Es kann daher der Punkt als zu den Kreisen gehörig oder als eine specielle Art des Kreises betrachtet werden.

Die beiden reellen Durchschnittspunkte einer gleichseitigen Hyperbel mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene liegen stets in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen, da die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel normal zu einander sind. Die Schnittpunkte von irgend zwei zu einander rechtwinkligen Geraden derselben Ebene sind aber stets harmonisch conjugirt zu den beiden festen imaginären Kreispunkten im Unendlichen, oder mit anderen Worten: Alle Paare normal zu einander stehender Geraden derselben Ebene bilden auf der unendlich entfernten Geraden dieser Ebene eine Involution von Punktepaaren, deren Doppelpunkte die beiden imaginären Kreispunkte im Unendlichen sind.

Soll also die Bedingung aufgestellt werden, unter welcher die die allgemeine Kegelschnittsgleichung $\Sigma = 0$ eine gleichseitige Hyperbel darstellt, so hat man nur analytisch auszudrücken, dass die beiden Durchschnittspunkte des Kegelschnitts mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene, welche durch die Gleichung 3) bestimmt wurden, harmonisch conjugirt sind zu den beiden imaginären Kreispunkten im Unendlichen.

Die Gleichungen dieser beiden festen Punkte sind aber nach dem früher Bemerkten:

$$s_1(-\cos A_2+i\sin A_2)\xi_1+s_2(-\cos A_1-i\sin A_1)\xi_2+s_3\xi_3=0$$

und

$$s_1(-\cos A_2-i\sin A_2)\xi_1+s_2(-\cos A_1+i\sin A_1)\xi_2+s_3\xi_3=0$$

und es ist daher die Gleichung irgend eines Punktes auf der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte d. h. auf der unendlich entfernten Geraden der Ebene:

$$s_1\{-\cos A_2+i\sin A_2+\lambda.(-\cos A_2-i\sin A_2)\}\xi_1$$
$$+s_2\{-\cos A_1-i\sin A_1+\lambda.(-\cos A_1+i\sin A_1)\}\xi_2$$
$$+s_3(1+\lambda)\xi_3=0$$

Dann ist aber die Gleichung des Punktes, welcher mit dem vorigen ein, in Bezug auf das imaginäre Kreispunktepaar im Unendlichen, harmonisch conjugirtes Punktepaar bildet:

$$s_1\{-\cos A_2+i\sin A_2-\lambda.(-\cos A_2-i\sin A_2)\}\xi_1$$
$$+s_2\{-\cos A_1-i\sin A_1-\lambda.(-\cos A_1+i\sin A_1)\}\xi_2$$
$$+s_3(1-\lambda)\xi_3=0$$

Man hat also für die trimetrischen Coordinaten dieses letzten Punktepaares

$$\frac{x_1'}{x_2'}=q'=\frac{-\cos A_2+i\sin A_2+\lambda.(-\cos A_2-i\sin A_2)}{-\cos A_1-i\sin A_1+\lambda.(-\cos A_1+i\sin A_1)}$$

$$\frac{x_1''}{x_2''}=q''=\frac{-\cos A_2+i\sin A_2-\lambda.(-\cos A_2-i\sin A_2)}{-\cos A_1-i\sin A_1-\lambda.(-\cos A_1+i\sin A_1)}$$

Dieses Punktepaar ist natürlich für jedes reelle λ, welches von ± 1 verschieden ist, imaginär, dagegen stets reell, wenn

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=i.\mu \quad \text{d. h.} \quad \lambda=\frac{1-i\mu}{1+i\mu}$$

genommen wird, wo μ irgend eine reelle Zahl bedeutet.

Setzt man der Kürze halber:

$$-\cos A_2+i\sin A_2=M \qquad -\cos A_2-i\sin A_2=N$$
$$-\cos A_1-i\sin A_1=P \qquad -\cos A_1+i\sin A_1=Q$$

so kann man aus den beiden Gleichungen

$$q'=\frac{M+\lambda N}{P+\lambda Q} \quad \text{und} \quad q''=\frac{M-\lambda N}{P-\lambda Q}$$

den Parameter λ climiniren und erhält dann eine Relation, welcher die trimetrischen Coordinatenverhältnisse q' und q'' irgend zweier auf der unendlich entfernten Geraden der Ebene gelegenen Punkte, die zu den beiden imaginären Kreispunkten im Unendlichen harmonisch conjugirt sind, genügen müssen. Man findet durch Elimination von λ die Gleichung:

$$\frac{M-Pq'}{Qq'-N}=\frac{Pq''-M}{Qq''-N}$$

oder

$$(MQ+PN).(q'+q'')-2PQq'q''-2MN=0$$

Nun ist aber

$$MQ + PN = (-\cos A_2 + i\sin A_2)(-\cos A_1 + i\sin A_1)$$
$$+ (-\cos A_1 - i\sin A_1)(-\cos A_2 - i\sin A_2)$$
$$= 2\cos(A_1 + A_2) = -2\cos A_3$$

$$PQ = (-\cos A_1 - i\sin A_1)(-\cos A_1 + i\sin A_1) = 1$$
$$MN = (-\cos A_2 + i\sin A_2)(-\cos A_2 - i\sin A_2) = 1$$

und man erhält folglich die Relation:

$$\cos A_3 \left(\frac{x_1'}{x_2'} + \frac{x_1''}{x_2''}\right) + \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{x_1''}{x_2''} + 1 = 0$$

welche die Coordinatenverhältnisse von irgend zwei Punkten x_i' und x_i'' zu erfüllen haben, die, auf der unendlich entfernten Geraden der Ebene gelegen, zu den beiden imaginären Kreispunkten im Unendlichen harmonisch conjugirt sind.

Soll also der Kegelschnitt $\Sigma = 0$ die unendlich entfernte Gerade der Ebene in zwei solchen Punkten schneiden, d. h. soll der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel sein, so müssen die beiden aus der Gleichung 3) sich ergebenden Werte von $\frac{x_1}{x_2}$ der vorigen Bedingung genügen. Durch Substitution der Ausdrücke:

$$\frac{x_1'}{x_2'} + \frac{x_1''}{x_2''} = \frac{2(A_{23} + A_{31} - A_{33} - A_{12})s_2}{(A_{11} + A_{33} - 2A_{31})s_1}$$

$$\frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{x_1''}{x_2''} = \frac{(A_{22} + A_{33} - 2A_{23})s_2^2}{(A_{11} + A_{33} - 2A_{31})s_1^2}$$

erhält man die Bedingungsgleichung

$$2s_1s_2\cos A_3(A_{23} + A_{31} - A_{33} - A_{12})$$
$$+ s_2^2(A_{22} + A_{33} - 2A_{23}) + s_1^2(A_{11} + A_{33} - 2A_{31}) = 0$$

oder

$$-2s_1s_2A_{12}\cos A_3 + 2s_1s_2\cos A_3(A_{23} + A_{31} - A_{33})$$
$$+ s_2^2(A_{22} + A_{33} - 2A_{23}) + s_1^2(A_{11} + A_{33} - 2A_{31}) = 0$$

Berücksichtigt man die aus dem Fundamentaldreieck sich ergebenden Relationen

$$s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 = 2s_1s_2\cos A_3$$
$$s_2^2 + s_3^2 - s_1^2 = 2s_2s_3\cos A_1$$
$$s_3^2 + s_1^2 - s_2^2 = 2s_3s_1\cos A_1$$

so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$-2s_1s_2A_{12}\cos A_3 + s_1^2A_{11} + s_2^2A_{22} + s_3^2A_{33}$$
$$+(s_1^2 - s_2^2 - s_3^2)A_{23} + (s_2^2 - s_3^2 - s_1^2)A_{31} = 0$$

oder

$$A_{11}s_{12} + A_{22}s_2^2 + A_{33}\,s_3^2 - 2A_{23}s_2s_3\cos A_1$$
$$-2A_{31}s_3s_1\cos A_2 - 2A_{12}s_1s_2\cos A_3 = 0$$

Eine durch die allgemeine Gleichung $\Sigma = 0$ in trimetrischen Liniencoordinaten dargestellte Hyperbel ist also gleichseitig, wenn die Minoren der Discriminante die Bedingung

$$A_{11}s_{12} + A_{22}s_2^2 + A_{33}s_3^2 - 2A_{33}s_2s_3\cos A_1$$
$$-2A_{31}s_3s_1\cos A_1 - 2A_{12}s_1s_2\cos A_3 = 0$$

oder

$$\sum_{k,l,m} A_{kk}s_k^2 = 2\sum_{k,l,m} A_{kl}s_ks_l\cos A_m$$

erfüllen.

Frankfurt a. Oder im December 1883.

IV.

Grundzüge zu einer combinatorischen Darstellung der höheren Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen.

Von

Herrn **Julius Vollers**

in Oldenburg.

Da bei verwickelteren analytischen Operationen — z. B. der Entwickelung einer zusammengesetzten Function in eine Reihe und der Summirung der Kettenbrüche — nicht selten combinatorische Anordnungen auf ein leicht zu übersehendes Verfahren führen, so suchte ich auch bei der Entwickelung der höheren Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen eine derartige Hülfe zu finden und gelangte zu dem in nachfolgender Skizze angegebenen Resultate, das wohl nicht ohne alles wissenschaftliche Interesse und auch von einigem praktischen Nutzen sein dürfte.

Als Ausgangspunkt für meine Untersuchung benutzte ich die Formel von U. Meyer *)

$$f^n x = \frac{U_1}{1!} F' y + \frac{U_2}{2!} F'' y + \dots \frac{U_n}{n!} F^n y,$$

worin

$$U_k = [D_\varrho{}^n \Theta^k]_0 = [D_\varrho{}^n \varphi(x+\varrho) - \varphi(x)]_0$$

indem ich zunächst das combinatorische Gesetz, dem die mehrfachen Differentiationen der Potenzen von Θ unterworfen sind, ermittelte.

---

*) Grunerts Archiv T. IX. S. 96.

Sucht man von $D\Theta^3$ ausgehend $D^3\Theta^3$ durch aufeinander folgende Differentiationen und bezeichnet in dem Resultate

$$D^3\Theta^3 = 3\Theta^2 D^3\Theta + 18\Theta\, D\Theta\, D^2\Theta + 6(D\Theta)^3$$

Θ mit 0, $D\Theta$ mit 1, $D^2\Theta$ mit 2, so erhält man, wenn man vorläufig von den numerischen Coefficienten absieht, folgendes Schema für die einzelnen Summanden der obigen Entwickelung

003
012
111

Es ist dies die dritte Combinationsclasse der Elemente 0, 1, 2, 3, zur Quersumme 3.

In derselben Weise ergiebt sich für

$$D^4\Theta^4 = 4\Theta^3 D^4\Theta + 48\Theta^2 D\Theta\, D^3\Theta + 36\Theta^2(D^2\Theta)^2 + 144\Theta(D\Theta)^2 + 24(D\Theta)^4$$

das Schema:

0004
0013
0022
0112
1111

welches die vierte Combinationsclasse der Elemente 0, 1, 2, 3, 4 zur Quersumme 4 ist.

Betrachtet man ferner noch den Differentialquotienten

$$D^4\Theta^5 = 5\Theta^4 D^4\Theta + 8\Theta^3 D\Theta\, D^3\Theta + 60\Theta^3(D^2\Theta)^2 + 360\Theta^2(D\Theta)^2 D^2\Theta + 120\Theta(D\Theta)^4;$$

so findet man folgende Anordnung,

00004
00013
00022
00112
01111

welche der fünften Combinationsclasse der Elemente 0, 1, 2, 3, 4, zur Quersumme 4 gleichkommt.

Durch Anwendung derartiger Untersuchungen auf beliebige Differentialquotienten der Potenzen von Θ, deren weitläufige Entwicke-

lung aber bei der Leichtigkeit, mit welcher dieselbe ausführbar ist, hier unterbleiben mag, gelangt man zu folgendem Satze:

Entwickelt man von $D\Theta$, $D\Theta^2$, $D\Theta^3$ u. s. w. ausgehend die aufeinander folgenden Differentialquotienten, und schliesst man vorläufig die sich hierbei ergebenden numerischen Coefficienten von der Betrachtung aus, so sind die einzelnen Summanden einer beliebigen Entwickelung $(D^n\Theta^m)$ in der Weise zusammengesetzt, dass sie, wenn man Θ mit 0, $D\Theta$ mit 1, $D^2\Theta$ mit 2, $D^3\Theta$ mit 3 u. s. f. bezeichnet, die einzelnen Complexionen der $n+1$ Elemente 0, 1, 2 ... zur Quersumme n und zur $m$ten Combinationsclasse repräsentiren.

Vergleicht man nun die beiden Differentialquotienten

$$D^4\Theta^4 = 4\Theta^3D^4\Theta + 48\Theta^2D\Theta D^3\Theta + 36\Theta^2(D^2\Theta)^2$$
$$+ 144\Theta(D\Theta)^2D^2\Theta + 24(D\Theta)^4$$

$$D^4\Theta^5 = 5\Theta^4D^4\Theta + 80\Theta^3D\Theta D^3\Theta + 60\Theta^4(D^2\Theta)^2$$
$$+ 360\Theta^2(D\Theta^2D^2\Theta + 120\Theta(D\Theta)^4$$

mit einander, so findet man, dass die Anzahl der Summanden in beiden Reihen gleich ist, und die Producte der einzelnen Differentialquotienten (wobei Θ als 0ter angesehen werden mag) in der letzten sich von denen der ersten nur durch den Factor Θ unterscheiden, — was einer Classenänderung einer gegebenen Anzahl von Elementen zu einer gegebenen Quersumme entspricht, — dass dagegen die numerischen Coefficienten scheinbar ganz verschieden sind.

In manchen Rechnungen sind nun die Combinationscomplexionen von ihren Permutations- oder Versetzungszahlen begleitet; schneidet man auch hier dieselben versuchsweise aus, so ergiebt sich:

$$D^4\Theta^4 = 4\Theta^3D^4\Theta + 12.\ 4\ \Theta^2D\Theta\, D^3\Theta$$
$$+ 6.\ 6.\ \Theta^2(D^2\Theta)^2 + 12.\ 12.\ \Theta(D\Theta)^2D^2\Theta + 24(D\Theta)^4$$

$$D^4\Theta^5 = 5\Theta^4D^4\Theta + 20.\ 4\ \Theta^2 D0D^3\Theta$$
$$+ 6.\ 10.\ \Theta^3(D^2\Theta)^2 + 30.\ 12.\ \Theta^2(D\Theta)^2D^2\Theta$$
$$+ 5.\ 24\ \Theta(D\Theta)^4.$$

Man sieht, dass die rechten Seiten der beiden Gleichungen nunmehr gewisse numerische Coefficienten gemeinschaftlich haben, nämlich die Zahlen 1. 4. 6. 12. 24, die, wie man sich leicht überzeugt, jedem vierten Differentialquotienten irgend einer Potenz von Θ zukommen, nachdem man aus den sich anfangs ergebenden Coefficienten die dem entsprechenden Differentialquotientenproducte zugehörigen Versetzungszahlen ausgeschieden hat. Durch weitere Vergleichungen wird man finden, dass jedem Differentialquotienten einer Potenz von

Θ nach Ausscheidung der Versetzungszahlen gewisse Coefficienten zukommen, die man nunmehr allein ins Auge zu fassen hat.

Um die genannten Coefficienten auf die einfachste Art und Weise für eine gewisse Anzahl aufsteigender Differentialquotienten zu ermitteln, erinnere man sich, dass $D^n\Theta^m$ nie mehr Summanden enthält als $D^n\Theta^n$; man folglich nur $D^n\Theta^n$ für $n = 1, 2, 3, 4$ u. s. w. zu berechnen braucht.

Man entwickele nun aus $D\Theta$ $D\Theta^2$ durch Multiplication mit Θ und Aenderung der Versetzungszahlen, aus $D\Theta^2$ durch Differentiation $D^2\Theta^2$, dann in derselben Weise aus $D^2\Theta^2$, $D^2\Theta^3$ und aus $D^2\Theta^3$ $D^3\Theta^3$, und fahre so fort.

Man erhält so nach Aussonderung der Versetzungszahlen für die 7 ersten Differentialquotienten folgende Coefficienten:

I. 1.
II. 1. 2.
III. 1. 3. 6.
IV. 1. 4. 6. 12. 24.
V. 1. 5. 10. 20. 30. 60. 120.
VI. 1. 6. 15. 20. 30. 60. 90. 120. 180. 360. 720.
VII. 1. 7. 21. 35. 42. 105. 140. 210. 210. 420. 630. 840. 1260. 2520. 5040.

Man bemerkt leicht, dass die ersten Coefficienten in jeder Reihe die aufsteigenden Binomialcoefficienten der dem zugehörigen Differentialquotienten entsprechenden Potenzen sind; die anderen dagegen sind scheinbar ganz regellos gebildet. Durch wiederholte Versuche gelang es mir jedoch, dieselben auf folgende Form zu bringen, worin $(n)_m$ den $m$ten Binomialcoefficienten der $n$ten Potenz bezeichnet.

I. $(1)_0$
II. $(2)_0$ $(2)_1$
III. $(3)_0$ $(3)_1$ $(3)_1.(2)_1$
IV. $(4)_0$ $(4)_1$ $(4)_2$ $(4)_1.(3)_1$ $(4)_1.(3)_1.(2)_1$
V. $(5)_0$ $(5)_1$ $(5)_2$ $(5)_1.(4)_1$ $(5)_1.(4)_2$ $(5)_1.(4)_1.(3)_1$ $(5)_1.(4)_1.(3)_1.(2)_1$
VI. $(6)_0$ $(6)_1$ $(6)_2$ $(6)_3$ $(6)_1.(5)_1$ $(6)_1.(5)_2$ $(6)_2.(4)_2$ $(6)_1.(5)_1.(4)_1$ $(6)_1.(5)_1.(4)_2$ $(6)_1.(5)_1.(4)_1.(3)_1$ $(6)_1.(5)_1.(4)_1.(3)_1.(2)_1$
VII. $(7)_0$ $(7)_1$ $(7)_2$ $(7)_3$ $(7)_1.(6)_1$ $(7)_1.(6)_2$ $(7)_1.(6)_3$ $(7)_2.(5)_2.(7)_1.(6)_1.(5)_1.$ $(7)_1.(6)_1.(5)_2$ $(7)_1.(6)_2.(4)_2$ $(7)_1.(6)_1.(5)_1.(4)_1$ $(7)_1.(6)_1.(5)_1.(4)_2.$ $(7)_1.(6)_1.(5)_1.(4)_1.(3)_1$ $(7)_1.(6)_1.(5)_1.(4)_1.(3)_1.(2)_1$

In diesem Schema stehen zunächst alle aufsteigenden Binomialcoefficienten der dem betreffenden Differentialquotienten entsprechenden Potenz; dann der Binomialcoefficient der genannten Potenz, welcher den Index 1 besitzt, vereinigt mit allen möglichen aufsteigenden Binomialcoefficienten der vorhergehenden Potenz von demjenigen mit dem Index 1 beginnend; dann der Binomialcofficient der höchsten Potenz mit dem Index 2 vereinigt mit den aufsteigenden Coefficienten der zweithöchsten Potenz von demjenigen mit dem Index 2 beginnend. Nachdem in entsprechender Weise alle Binionen erschöpft sind, werden die Ternionen hergestellt; zunächst das Product der Binomialcoefficienten der höchsten und zweithöchsten Potenz mit dem Index 1 vereinigt mit den aufsteigenden Binomialcoefficienten der dritthöchsten Potenz, von demjenigen mit dem Index 1 beginnend; dann das Product aus dem Binomialcoefficienten der höchsten Potenz mit dem Index 1 in den Coefficienten der zweithöchsten Potenz, welcher den Index 2 besitzt, vereinigt mit allen Coefficienten der vierthöchsten Potenz von demjenigen mit dem Index 2 beginnend; und so in entsprechender Weise fort. Da es nach diesen Erörterungen keine Schwierigkeiten haben dürfte, wenn nur die Indices der zu einer der obigen Entwickelungsreihen gehörigen Binomialcoefficienten-Complexionen bekannt sind, diese selbst niederzuscheiben, so genügt es, vorläufig nur die Indices zu betrachten, welche folgendermassen sehr leicht zu finden sind. Nimmt man den speciellen Fall, wo die Indices zum 7ten Differentialquotienten der Potenzen von Θ gehörigen Binomialcoefficienten gefunden werden sollen, so ist der erste Null; zur Ermittelung der übrigen schreibe man die Indices der aufsteigenden Binomialcoefficienten von der 7ten bis zur 2ten Potenz herunter, jedesmal mit dem Index 1 beginnend unter einander, wie folgendes Schema angiebt:

123
123
12
12
1
1

Man combinire nun die Elemente der ersten Reihe zur ersten Classe; man erhält

1. 2. 3,

dann das erste Element 1 der ersten Reihe mit denen der zweiten Reihe, das 2te mit denen der dritten, das dritte mit denen der vierten, indem man nur gutgeordnete Complexionen zulässt, zur zweiten Classe; dies giebt

11. 12. 13. 22.

Darauf combinire man die Elemente 11 der beiden ersten Reihen mit denen der dritten, die Elemente 12 der beiden ersten Reihen mit den Elementen der 4ten Reihe, wobei wiederum nur gutgeordnete Complexionen zugelassen werden; man erhält:

111. 112. 122.

Darauf combinire man wiederum die Elemente 111 der drei ersten Reihen mit denjenigen der vierten Reihe, und fahre in entsprechender Weise fort. Man findet noch

1111. 1112
11111
111111

Wie man in anderen Fällen verfährt, wird man leicht einsehen; nur so viel sei hier noch bemerkt: Zu ungeraden Potenzen gehören, wenn man die Indices von 1 an rechnet $\frac{n-1}{2}$, dagegen zu einer geraden $\frac{n}{2}$ aufsteigende Potenzen. Um das vorhergehende Schema allgemein herzustellen, hat man daher, wenn der gesuchte Differentialquotient von Θ ungerade ist, $n-1$ durch 2 zu dividiren, darauf die Zahlen von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ 2 mal, darunter die Zahlen von 1 bis $\left(\frac{n-1}{2}-1\right)$ zweimal, dann die von 1 bis $\left(\frac{n-1}{2}-2\right)$ zweimal hinzuschreiben, und so fortzufahren, bis die Entwickelung mit 2 aufeinanderfolgenden die Einheit enthaltenden Reihen schliesst.

Bei geraden Differentialquotienten schreibe man dagegen einmal die Zahlen von 1 bis $\frac{n}{2}$ hin, dann zweimal $\frac{n}{2}-1$ u. s. f., wie bei den ungeraden Differentialquotienten.

Nachdem nunmehr die Entwickelung aller einzelnen zur Berechnung eines höheren Differentialquotienten von Θ erforderlichen Rechnungen erörtert ist, dürfte es nötig sein, die Gesammtentwickelung an einem Beispiele klar zu machen. Bevor ich jedoch dazu schreite, will ich noch einige Regeln über die Entwickelung der $n$ten Combinationsclasse der Elemente 012. ... n zur Quersumme n hier einfügen, da dieselbe nicht gut als allgemein bekannt vorausgesetzt werden dürfte.

Handelt es sich um die Herstellung der $n$ten Combinationsclasse der genannten Elemente zur Quersumme n, so entwickele man nach einander die Combinationsclassen der Elemente 1 bis n zur Quersumme n, setze der ersten Classe $(n-1)$ mal, der 2ten $(n-2)$ mal, der dritten $(n-3)$ mal das Element 0 vor und fahre so fort bis zur $n$ten Classe, welche $(n-n)$ oder 0 mal das Element 0 erhält. Als Beispiel folge hier die achte Combinationsclasse der Elemente 0 bis 8 zur Quersumme 8.

00000008	00001124
00000017	00001133
00000026	00001223
00000035	00002222
00000044	00011114
00000116	00011123
00000125	00011222
00000134	00111113
00000224	00111122
00000233	01111112
00001115	11111111

Zur leichten und sicheren Construction der einzelnen Combinationsclassen der Elemente 1 bis n dienen folgende Regeln, welche sich auf die Herleitnng einer Combinationsclasse aus der vorhergehenden zu einerlei Quersumme beziehen.

1) Jeder Complexion der gegebenen Classe mit Uebergehung derer, die am Ende zwei oder mehrere gleiche Elemente haben, setze man 1 vor, und vertausche die letzte Zahl der Complexion mit der ihr im natürlichen Zahlensystem vorhergehenden. Dies giebt die mit 1 anfangenden Complexionen (die Ordnung 1) der abzuleitenden Classe.

2) In den so gefundenen Complexionen der Ordnung 1 (mit Uebergehung derjenigen Complexionen, welche entweder zwei oder mehr gleiche Anfangs- oder zwei oder mehr gleiche Endelemente, eins oder beides zusammen, haben) vertausche man die erste Zahl mit der nächstfolgenden, die letzte hingegen mit der nächstvorhergehenden im natürlichen Zahlensystem.

3) Ebenso leitet man die Ordnung 3 aus der Ordnung 2 ab, wenn man die Vorschrift (2) auf die Ordnung 2, wie vorher anwendet, und ebenso die zugehörigen Anfangs- und Endelemente den umzuwandelnden Complexionen vertauscht. Und so für die übrige-

Ordnungen, soviel deren das Hauptgesetz der Combinationen, dasjenige der guten Ordnung zulässt.

Nach diesen Regeln lassen sich alle Combinationsclassen zu einer gegebenen Quersumme ganz mechanisch ableiten.

Es soll nunmehr $D^8\Theta^8$ gefunden werden. Mam schreibe, am besten untereinander die achte Combinationsclasse der Elemente 0 bis 8 zur Quersumme 8 hin, wie es das Schema a. angiebt; schreibe demselben die Versetzungszahlen, welche mittelst der Formel $\frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots}$ gefunden werden, worin $m! = 1.2.3 \ldots m$, und worin n die Anzahl der Elemente der betreffenden Complexion, α, β u. s. w. dagegen in denselben vorkommende Anzahlen gleicher Elemente bezeichnen (Schema b.); ferner schreibe man das Schema der aufsteigenden Binomialcoefficienten, welches in diesem Falle mit 1. 2. 3. 4. beginnt an (Schema c.), und endlich entwickele man hieraus das Schema der combinirten Binomialcoefficienten (Schema d.).

Schema a.	Schema b.	Schema c.	Schema d.
00000008	$\frac{8!}{7!}$	1234	0
00000017	$\frac{8!}{6!}$	123	1
00000026	$\frac{8!}{6!}$	123	2
00000035	$\frac{8!}{6!}$	12	3
00000044	$\frac{8!}{6!\,2!}$	12	4
00000116	$\frac{8!}{5!\,2!}$	1	11
00000125	$\frac{8!}{5!}$	1	12
00000134	$\frac{8!}{5!}$		13
00000224	$\frac{8!}{5!\,2!}$		22
00000233	$\frac{8!}{5!\,2!}$		23
00001115	$\frac{8!}{4!\,3!}$		111

Schema a.	Schema b.	Schema c.	Schema d.
00001124	$\frac{8!}{4!\,2!}$		112
00001133	$\frac{8!}{4!\,2!\,2!}$		113
00001223	$\frac{8!}{4!\,2!}$		122
00002222	$\frac{8!}{4!\,4!}$		222
00011114	$\frac{8!}{3!\,4!}$		1111
00011123	$\frac{8!}{3!\,3!}$		1112
00011222	$\frac{8!}{3!\,2!\,3!}$		1122
00111113	$\frac{8!}{2!\,5!}$		11111
00111122	$\frac{8!}{2!\,4!\,2!}$		11112
01111112	$\frac{8!}{6!}$		111111
11111111	$\frac{8!}{8!}$		1111111

Ersetzt man nun in dem Schema a. und d. die Indices durch die zugehörigen Differentialquotienten resp. Binomialcoefficienten, schreibt nach Unterdrückung des Schemas c. die auf einer Zeile stehenden Grössen als Factoren zusammen und verbindet die so erhaltenen Producte zu einer Summe, so hat man $D^8\Theta^8$ vollständig entwickelt:

$$D^8\Theta^8 = \frac{8!}{7!}(8)_0\ \Theta^7 D^8\Theta$$

$$+\frac{8!}{6!}(8)_1\ \Theta^6 D\Theta D^7\Theta$$

$$+\frac{8!}{6!}(8)_2\ \Theta^6 D^2\Theta D_1\Theta$$

$$+\frac{8!}{6!}(8)_3\ \Theta^6 D^3\Theta D^5\Theta$$

$$+\frac{8!}{6!\ 2!}(8)_4\ \Theta^6 (D^4\Theta)^2$$

$$+\frac{8!}{5!\ 2!}(8)_1 (7)_1\ \Theta^5 (D\Theta)^2 D^6\Theta$$

$$+\frac{8!}{5!}(8)_1(7)_2\ \Theta^5 D\Theta D^2\Theta D^5\Theta$$

$$+\frac{8!}{5!}(8)_1(7)_3\ \Theta^5 D\Theta D^3\Theta D^4\Theta$$

$$+\frac{8!}{5!\,2!}(8)_2(6)_2\ \Theta^5(D^2\Theta)^2 D^4\Theta$$

$$+\frac{8!}{5!\,2!}(8)_2(6)_3\ \Theta^5 D^2\Theta(D^3\Theta)^2$$

$$+\frac{8!}{4!\,3!}(8)_1(7)_1(6)_1\ \Theta^4(D\Theta)^3 D^5\Theta$$

$$+\frac{8!}{4!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_2\ \Theta^4(D\Theta)^2 D^2\Theta D^4\Theta$$

$$+\frac{8!}{4!\,2!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_3\ \Theta^4(D\Theta)^2(D^3\Theta)^2$$

$$+\frac{8!}{4!\,2!}(8)_1(7)_2(5)_2\ \Theta^4 D\Theta(D^2\Theta)^2 D^3\Theta$$

$$+\frac{8!}{4!\,4!}(8)_2(6)_2(4)_2\ \Theta^4(D^2\Theta)^4$$

$$+\frac{8!}{3!\,4!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1\ \Theta^3(D\Theta)^4 D^4\Theta$$

$$+\frac{8!}{3!\,3!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_2\ \Theta^3(D\Theta)^3 D^2\Theta D^3\Theta$$

$$+\frac{8!}{3!\,2!\,3!}(8)_1(7)_1(6)_2(4)_2\ \Theta^3(D\Theta)^2(D^2\Theta)^3$$

$$+\frac{8!}{2!\,5!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1\ \Theta^2(D\Theta)^5 D^3\Theta$$

$$+\frac{8!}{2!\,4!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_2\ \Theta^2(D\Theta)^4(D^2\Theta)^2$$

$$+\frac{8!}{6!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1\ \Theta(D\Theta)^6 D^2\Theta$$

$$+\frac{8!}{8!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1(2)_1\ (D\Theta)^8$$

Um aus den angegebenen schematischen Anordnungen von $D^8\Theta^8$ diejenigen von $D^8\Theta^9$ herzuleiten, hat man nur dem Schema a. eine 0 vorzuschreiben, und das Schema b. den so erhaltenen Complexionen in a. gemäss zu ändern; um $D^8\Theta^7$ zu erhalten, lasse man in dem Schema a. die letzte Combinationsclasse der Zahlen von 1 bis 8 fort, ebenso die dieser entsprechenden Complexionen in d., streiche ferner in dem Schema a. in den übrigen Complexionen die erste Null und verändere in entsprechender Weise die Versetzungszahlen; in derselben

Weise kann man aus den Anordnungen von $D^8\Theta^7$ die Schemata für $D^8\Theta^6$ deriviren u. s. f.

Nach diesen Erörterungen kann ich nunmehr zur Lösung der oben angegebenen Aufgabe schreiten. Handelt es sich um die Auffindung der 8ten derivirten Function $f^8(x)$, worin

$$f(x) = Fy, \quad y = \varphi(x),$$

so ist nach der oben genannten Formel

$$f^8(x) = \frac{U_1}{1!}F'y + \frac{U_2}{1.2}F''y + \frac{U_3}{3!}F^3y + \frac{U_4}{4!}F^4y$$
$$+ \frac{U_5}{5!}F^5y + \frac{U_6}{6!}F^6y + \frac{U_7}{7!}F^7y + \frac{U_8}{8!}F^8y$$

worin

$$U_k = [D_\varrho{}^8\Theta^k]_0 = [D_\varrho{}^8(\varphi(x+\varrho) - \varphi x)]_0.$$

Man findet demgemäss

$$U_8 = [D_\varrho\Theta^8]_0,$$

also gleich der obigen Entwickelung von $D^8\Theta^8$, jedoch soll nach ausgeführter Differentiation ϱ gleich Null werden, und, wie man bemerkt ist alsdann $\Theta = 0$, $D\Theta = \varphi'x$, $D^2\Theta = \varphi''x$ u. s. w. oder kurz

$$D^n\Theta = \varphi^n(x).$$

In dem obigen Schema a. verschwinden alle Glieder bis auf das letzte, welches keine Null enthält, also auch kein Θ; ferner ist

$$U_7 = [D_\varrho{}^8\Theta^7]_0;$$

wie aus den angeführten Regeln hervorgeht, erhält man als Schema die nach Weglassung der Nullen zurückbleibende 7te Combinationsclasse der Zahlen 1 bis 8 in Verbindung mit den aus d. entnommenen ihr zugehörigen Werten und den zu $D^8\Theta^7$ in der 7ten Classe der Zahlen von 1 bis 8 gehörigen Versetzungszahlen.

Um es kurz zu machen, die Schemata von $D^8\Theta^8$ geben, wenn man alle Nullen in a. weglässt, dann die den so entstandenen Complexionen in a. entsprechenden Versetzungszahlen in b. schreibt, dagegen c. und d. durchaus nicht ändert, ohne Weiteres alle Werte von U_k, oder die gesammte Entwickelung für $f^8(x)$.

Die Schemata für $f^8(x)$ sind demgemäss:

Schema a.	Schema b.	Schema c.	Schema d.
8	$1!$	1234	0
17	$2!$	123	1
26	$2!$	123	2
35	$2!$	12	3
44	$\frac{2!}{2!}$	12	4
116	$\frac{3!}{2!}$	1	11
125	$3!$	1	12
134	$3!$		13
224	$\frac{3!}{2!}$		22
233	$\frac{3!}{2!}$		23
1115	$\frac{4!}{3!}$		111
1124	$\frac{4!}{2!}$		112
1133	$\frac{4!}{2!\,2!}$		113
1223	$\frac{4!}{2!}$		122
2222	$\frac{4!}{4!}$		222
11114	$\frac{5!}{4!}$		1111
11123	$\frac{5!}{3!}$		1112
11222	$\frac{5!}{2!\,3!}$		1122
111113	$\frac{6!}{5!}$		11111
111122	$\frac{6!}{4!\,2!}$		11112
1111112	$\frac{7!}{6!}$		111111
11111111	$\frac{8!}{8!}$		1111111

Aus dieser Darstellung erhält man unmittelbar den Wert von $f^8(x)$, wenn man für 1, 2, 3 u. s. w. im ersten Schema $\varphi'x$, $\varphi''x$, $\varphi'''x$ u. s. w. setzt, im Uebrigen wie vorher bei der Entwickelung von $D^8\Theta^8$ verfährt und den einzelnen zusammengehörigen Combinationsclassen aus a, b und d $\frac{F^n y}{n!}$ beischreibt.

Man erhält so

$$f^8x = 1!\,(8)_0\varphi^8xF'y$$

$$\left.\begin{array}{l} + 2!\,(8)_1\varphi^1x\varphi^7x \\ + 2!\,(8)_2\varphi^2x\varphi^6x \\ + 2!\,(8)_3\varphi^3x\varphi^5x \\ + \frac{2!}{2!}\,(8)_4(\varphi^4x)^2 \end{array}\right\} \frac{F^2y}{2!}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{3!}{2!}\,(8)_1(7)_1(\varphi^1x)^2\varphi^6x \\ + 3!\,(8)_1(7)_2\varphi^1x\varphi^2x\varphi^5x \\ + 3!\,(8)_1(7)_3\varphi^1x\varphi^3x\varphi^4x \\ + \frac{3!}{2!}\,(8)_2(6)_2(\varphi^2x)^2\varphi^4x \\ + \frac{3!}{2!}\,(8)_2(6)_3(\varphi^2x)(\varphi^3x)^2 \end{array}\right\} \frac{F^3y}{3!}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{4!}{3!}\,(8)_1(7)_1(6)_1(\varphi'x)^3\varphi^5x \\ + \frac{4!}{2!}\,(8)_1(7)_1(6)_2(\varphi'x^2)\varphi^2x\varphi^4x \\ + \frac{4!}{2!\,2!}\,(8)_1(7)_1(6)_3(\varphi'x)^2(\varphi^3x)^2 \\ + \frac{4!}{2!}\,(8)_1(7)_2(5)_2\varphi'x(\varphi^2x)^2\varphi^3x \\ + \frac{4!}{4!}\,(8)_2(6)_2(4)_2(\varphi^2x)^4 \end{array}\right\} \frac{F^4y}{4!}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{5!}{4!}\,(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(\varphi'x)^4\varphi^4(x) \\ + \frac{5!}{3!}\,(8)_1(7)_1(6)_1(5)_2(\varphi'x)^3\varphi^2x\varphi^3x \\ + \frac{5!}{2!\,3!}\,(8)_1(7)_1(6)_2(4)_2(\varphi'x)^2(\varphi^2x)^3 \end{array}\right\} \frac{F^5y}{5!}$$

$$\left.\begin{aligned}&+\frac{6!}{5!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(\varphi'x)^5\varphi^3x\\&+\frac{6!}{4!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_2(\varphi'x)^4(\varphi^2x)^2\end{aligned}\right\}\frac{F^6y}{6!}$$

$$+\frac{7!}{6!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1(\varphi'x)^6\varphi^2x\ \Big\}\ \frac{F^7y}{7!}$$

$$+\frac{8!}{8!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1(2)_1(\varphi'x)^8\ \Big\}\ \frac{F^8y}{8!}$$

Weitere Beispiele zu geben wird nicht nötig sein, da das gegebene hinreicht, um alle Einzelheiten der Rechnung erkennen zu lassen. Ich will nur noch bemerken, dass die Entwickelung der Schemata für sich durchaus nicht erforderlich ist, sondern dass man es bei einiger Uebung leicht dahin bringen kann selbst den 20ten Differentialquotienten ohne Weiteres niederzuschreiben; andererseits kann man aber die Werte einer gegebenen $\varphi(x)$ oder Fy direct in die Schemata einsetzen und so Specialformeln für die höheren Differentialquotienten erlangen. Wie sich die Formeln in jedem einzelnen auf die höheren Differentialquotienten bezüglichen Falle, unter anderem auch zur Ermittelung der höheren Diffetentialquotienten inverser Functionen, benutzen zu lassen, dieses zu erörtern, würde sich für diese Skizze allzusehr ausdehnen, daher unterlasse ich die Behandlung dieser Fragen hier, und will nur noch ein paar Anwendungen geben, welche jedenfalls geeignet sein werden, die praktische Brauchbarkeit der obigen Entwickelungen ausser Zweifel zu stellen.

A. Differentiirt man die Reihe $1+e^x+e^{2x}+\ldots e^{nx}$ p mal nach x und setzt nach der Differentiation $x=0$, so erhält man

$$[D^p(1+e^x+e^{2x}+\ldots e^{nx})]_0 = 1^p+2^p+\ldots n^p$$

Setzt man hierin $e^x = y$, so hat man

$$\varphi(x)=y=e^x;\quad 1+e^x+e^{2x}+\ldots e^{nx} = 1+y+y^2+\ldots y^n = f(x);$$

man findet leicht

$$[\varphi^m x]_0 = 1;\quad [F^m y]_0 = (n+1)_{m+1}.$$

Mittelst der gegebenen Werte und der berechneten Schemata für die höheren Differentialquotienten kann man nun den Wert $1^p+2^p+\ldots n^p$ für jede beliebige ganze positive Zahl finden. Hier mögen die Berechnungen für $p=2$, 3 und 8 folgen.

Die Schemata für den zweiten Differentialquotienten sind

a	b	c	d
2	1!	1	0
11	$\frac{2!}{2!}$		1

Daraus findet man, weil das Schema a. immer 1 ist

$$1^2+2^2+3^2+\dots n^2 = 1!\,(2)_0(n+1)_2+\frac{2!}{2!}(2)_1(n+1)_3$$
$$= (n+1)_2+2(n+1)_3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

Die Schemata für den dritten Differentialquotienten sind

3	1!	1	0
12	2!	1	1
111	$\frac{3!}{3!}$		11

Man erhält daraus

$$1^3+2^3+3^3+\dots n^3 = 1!\,(3)_0(n+1)_2+2!\,(3)_1(n+1)_3$$
$$+\frac{3!}{3!}(3)_1(2)_1(n+1)_4 = (n+1)_2+6(n+1)_3+6(n+1)_4$$
$$= \left(\frac{n(n+1)}{1.2}\right)^2$$

Die Schemata für den achten Differentialquotienten sind bereits angegeben.

Man erhält daraus

$$1^8+2^8+3^8+\dots+n^8$$
$$= 1!\,(8)_0(n+1)_2+\left\{\begin{matrix} 2!\,(8)_1 \\ +\,2!\,(8)_2 \\ +\,2!\,(8)_3 \\ +\,\frac{2!}{2!}(8)_4 \end{matrix}\right\}(n+1)_3+\left\{\begin{matrix} \frac{3!}{2!}(8)_1(7)_1 \\ +\,3!\,(8)_1(7)_2 \\ +\,3!\,(8)_1(7)_3 \\ +\,\frac{3!}{2!}(8)_2(6)_2 \\ +\,\frac{3!}{2!}(8)_2(6)_3 \end{matrix}\right\}(n+1)_4$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{4!}{3!}(8)_1(7)_1(6)_1\\+\frac{4!}{2!}(8)_1(7)_1(6)_2\\+\frac{4!}{2!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_3\\+\frac{4!}{2!}(8)_1(7)_2(5)_2\\+\frac{4!}{4!}(8)_2(6)_2(4)_2\end{array}\right\}(n+1)_5+\left\{\begin{array}{l}\frac{5!}{4!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1\\+\frac{5!}{3!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_2\\+\frac{5!}{2!\,3!}(8)_1(7)_1(6)_2(4)_2\end{array}\right\}(n+1)_6$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{6!}{5!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1\\\frac{6!}{4!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_2\end{array}\right\}(n+1)_7$$

$$+\left\{\frac{7!}{6!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1\right\}(n+1)_8$$

$$+\frac{8!}{8!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1(2)_1(n+1)_9.$$

B. Differentiirt *) man Flx mehrmals nach einander, so erhält man die Gleichungen:

$$DFlx = \frac{1}{x}F'lx$$

$$D^2Flx = \frac{1}{x^2}\{F''lx - F'lx\}$$

$$D^3Flx = \frac{1}{x^3}\{F'''lx - 3F''lx + 2F'lx\} \text{ u. s. w.}$$

welche das allgemeine Bildungsgesetz erkennen lassen

$$D^nFlx = \frac{1}{x^n}\{l_0F^nlx - l_1F^{n-1}lx + l_2F^{n-2}lx - \ldots\}$$

worin l_0, l_1 u. s. w. von x unabhängig sind.

Zu ihrer Bestimmung dient die specielle Annahme $Fy = e^{-\lambda y}$; $Flx = x^{-\lambda}$, es entsteht dann

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n-1) = l_0\lambda^n + l_1\lambda^{n-1} + l_2\lambda^{n-2} + \ldots l_{n-1}\lambda,$$

woraus man erkennt, dass $l_0 = 1$

*) Siehe „Schlömilch, Uebungsbuch zur höheren Analysis.“ III. Aufl. S. 55.

$$l_1 = 1+2+3+4+ \dots (n-1)$$

$$\begin{aligned} l_2 = 1.2+1.3+1.4+ \dots &+1(n-1) \\ +2.3+2.4 \dots &+2(n-1) \\ +3.4 \quad &+3(n-1) \\ \dots \dots \\ &+(n-2)(n-1) \end{aligned}$$

u. s. w. sind, oder es sind l_0, l_1, l_2 die sogenannten Facultätencoefficienten vom $n$ten Grade. Die directe Summirung derselben ist sehr umständlich; man wird daher ein Mittel suchen, dieselben auf andere Weise zu erhalten. Eine sehr bequeme Art bietet hierzu der Vergleich mit der auf combinatorischen Wege hergestellten Formel. Handelt es sich um die Entwickelung der Facultätencoefficienten des neunten Grades, so giebt die obige Formel

$$D^9 lx = \frac{1}{x^9}\{l_0 F^9 lx - l_1 F^8 lx + \dots + l_8 F^1 lx\}$$

oder auch

$$D^9 lx = \frac{1}{x^8}(l_8 F^1 lx - l_7 F^2 lx + l_6 F^3 lx - l_5 F^4 lx$$
$$+ l_4 F^5 lx - l_3 F^6 lx + l_2 F^7 lx - l_1 F^8 lx + l_0 F^9 lx)$$

Andererseits hat man

$$D^9 lx = \frac{U_1}{1!}F^1 lx + \frac{U_2}{2!}F^2 lx + \frac{U_3}{3!}F^3 lx + \frac{U_4}{4!}F^4 lx$$
$$+ \frac{U_5}{5!}F^5 lx + \frac{U_6}{6!}F^6 lx + \frac{U_7}{7!}F^7 lx + \frac{U_8}{8!}F^8 lx + \frac{U_9}{9!}F^9 lx$$

Durch Vergleichung dieser beiden Reihen erhält man

$$1!\,l_8 = x^9 U_1;\quad 2!\,l_7 = -x^9 U_2;\quad 3!\,l_6 = x^9 U_3;\quad 4!\,l_5 = -x^9 U_4;$$
$$5!\,l_4 = x^9 U_5;\quad 6!\,l_3 = -x^9 U_6;\quad 7!\,l_2 = x^9 U_7;\quad 8!\,l_1 = -x^9 U_8;$$
$$9!\,l_0 = x^9 U_9.$$

Man entwickelt nunmehr die Schemata für den neunten Differentialquotienten.

Schema a.	Schema b.	Schema c.	Schema d.
9	1!	1234	0
18	2!	1234	1
27	2!	123	2
36	2!	123	3
45	2!	12	4

Schema a.	Schema b.	Schema c.	Schema d.
117	$\frac{3!}{2!}$	12	11
126	$3!$	1	12
135	$3!$	1	13
144	$\frac{3!}{2!}$		14
225	$\frac{3!}{2!}$		22
234	$3!$		23
333	$\frac{3!}{3!}$		33
1116	$\frac{4!}{3!}$		111
1125	$\frac{4!}{2!}$		112
1134	$\frac{4!}{2!}$		113
1224	$\frac{4!}{2!}$		122
1233	$\frac{4!}{2!}$		123
2223	$\frac{4!}{3!}$		222
11115	$\frac{5!}{4!}$		1111
11124	$\frac{5!}{3!}$		1112
11133	$\frac{5!}{3!\,2!}$		1113
11223	$\frac{5!}{2!\,2!}$		1122
12222	$\frac{5!}{4!}$		1222
111114	$\frac{6!}{5!}$		11111
111123	$\frac{6!}{4!}$		11112
111222	$\frac{6!}{3!\,3!}$		11122

Schema a.	Schema b.	Schema c.	Schema d.
1111113	$\frac{7!}{6!}$		111111
1111122	$\frac{7!}{5!\,2!}$		111112
11111112	$\frac{8!}{7!}$		1111111
111111111	$\frac{9!}{9!}$		11111111

Nun ist nach Einsetzung der Differentialquotienten und Binomialcoefficienten in die Schemata, wegen $\varphi^n x = \frac{(-1)^{n-1}(x-1)!}{x^n}$

$$U_1 = \frac{1}{x^9}(8!)1!\,(9)_0$$

$$U_2 = -\frac{1}{x^9}\left\{\begin{array}{l} \{0!\,7!\}2!\,(9)_1 \\ +\{1!\,6!\}2!\,(9)_2 \\ +\{2!\,5!\}2!\,(9)_3 \\ +\{3!\,4!\}2!\,(9)_4 \end{array}\right\}$$

$$U_3 = \frac{1}{x^9}\left\{\begin{array}{l} \{0!\,0!\,6!\}\frac{3!}{2!}(9)_1(8)_1 \\ +\{0!\,1!\,5!\}3!\,(9)_1(8)_2 \\ +\{0!\,2!\,4!\}3!\,(9)_1(8)_3 \\ +\{0!\,3!\,3!\}\frac{3!}{2!}(9)_1(8)_4 \\ +\{1!\,1!\,4!\}\frac{3!}{2!}(9)_2(7)_2 \\ +\{1!\,2!\,3!\}3!\,(9)_2(7)_3 \\ +\{2!\,2!\,2!\}\frac{3!}{3!}(9)_3(6)_3 \end{array}\right\}$$

$$U_4 = -\frac{1}{x^9}\left\{\begin{array}{l} \{0!\,0!\,0!\,5!\}\frac{4!}{3!}(9)_1(8)_1(7)_1 \\ +\{0!\,0!\,1!\,4!\}\frac{4!}{2!}(9)_1(8)_1(7)_2 \\ +\{0!\,0!\,2!\,3!\}\frac{4!}{2!}(9)_1(8)_4(7)_3 \\ +\{0!\,1!\,1!\,3!\}\frac{4!}{2!}(9)_1(8)_2(6)_2 \\ +\{0!\,1!\,2!\,2!\}\frac{4!}{2!}(9)_1(8)_2(6)_3 \\ +\{1!\,1!\,1!\,2!\}\frac{4!}{3!}(9)_2(7)_2(5)_2 \end{array}\right\}$$

$$U_0 = +\frac{1}{x^9}\left\{\begin{aligned}&\{0!\,0!\,0!\,0!\,4!\}\,\frac{5!}{4!}\,(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1\\ &+\{0!\,0!\,0!\,1!\,3!\}\,\frac{5!}{3!}\,(9)_1(8)_1(7)_1(6)_2\\ &+\{0!\,0!\,0!\,2!\,2!\}\,\frac{5!}{3!\,2!}\,(9)_1(8)_1(7)_1(6)_3\\ &+\{0!\,0!\,1!\,1!\,2!\}\,\frac{5!}{2!\,2!}\,(9)_1(8)_1(7)_2(5)_2\\ &+\{0!\,1!\,1!\,1!\,1!\}\,\frac{5!}{4!}\,(9)_1(8)_2(6)_2(4)_2\end{aligned}\right\}$$

$$U_6 = -\frac{1}{x^9}\left\{\begin{aligned}&\{0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,3!\}\,\frac{6!}{5!}\,(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1\\ &+\{0!\,0!\,0!\,0!\,1!\,2!\}\,\frac{6!}{4!}\,(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1(5)_2\\ &+\{0!\,0!\,0!\,1!\,1!\,1!\}\,\frac{6!}{3!\,3!}\,(9)_1(8)_1(7)_1(6)_2(4)_2\end{aligned}\right\}$$

$$U_7 = \frac{1}{x^9}\left\{\begin{aligned}&\{0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,2!\}\,\frac{7!}{6!}\,(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1\\ &+\{0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,1!\,1!\}\,\frac{7!}{5!\,2!}\,(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_2\end{aligned}\right\}$$

$$U_8 = -\frac{1}{x^9}\,\{0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,1!\}\,\frac{8!}{7!}\,(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1$$

$$U_9 = \frac{1!}{x^9}\,\{0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\}\,\frac{9!}{9!}\,(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1(2)_1$$

hierin bedeutet, wie man leicht erkennen wird, 0! (ausgesprochen 0te Facultät) ebenso wie 1! 1.

Die gegebenen Beziehungen zwischen den Werten von U und l lassen erkennen, dass die in den Klammern stehenden Factoren der Werte von U der Reihe nach $1!\,l_8!$ $2!\,l_7$; $3!\,l_6$ u. s. w. sind. Man erhält nach Ausführung der angedeuteten Operationen

$$l_8 = 40320;\quad l_7 = 109584;\quad l_6 = 118124;\quad l_5 = 67284;\quad l_4 = 22449;$$
$$l_3 = 4536;\quad l_2 = 546;\quad l_1 = 36;\quad l_0 = 1.$$

Diese Berechnung ist noch einer bedeutenden Vereinfachung fähig; zerlegt man nämlich die für $1!\,l_8$; $2!\,l_7!$ $3!\,l_6$ u. s. w. erhaltenen Werte wieder in drei Schemata a,′ b′, d′, worin wiederum in b′ die Versetzungszahlen zum Schema a′, und in d′ die Indices der Binomialcoefficienten-Complexionen kommen; dagegen in a′ die in den einzelnen Reihen der Entwickelung von $1!\,l_8$; $2!\,l_7$ u. s. w.

enthaltenen Facultäten-Complexionen, wobei man das Ausrufungszeichen fortlässt, so erhält man folgende Schemata, in denen die einzelnen Classen den Werten von $1!\,l_8$; $2!\,l_7$ u. s. w. entsprechen:

Schema a'.	Schema b'.	Schema a'.	Schema b'.	Schema d'.	
8	1!	00000001	$\frac{8!}{7!}$	0	1111111
07	2!	00000000	$\frac{9!}{9!}$	1	11111111
16	2!			2	
25	2!			3	
34	2!			4	
006	$\frac{3!}{2!}$			11	
015	3!			12	
024	3!			13	
033	$\frac{3!}{2!}$			14	
114	$\frac{3!}{2!}$			22	
123	3!			23	
222	$\frac{3!}{3!}$			33	
0005	$\frac{4!}{3!}$			111	
0014	$\frac{4!}{2!}$			112	
0023	$\frac{4!}{2!}$			113	
0113	$\frac{4!}{2!}$			122	
0122	$\frac{4!}{2!}$			123	
1112	$\frac{4!}{3!}$			222	
00004	$\frac{5!}{4!}$			1111	
00013	$\frac{5!}{3!}$			1112	

Schema a'.	Schema b'.	Schema a'.	Schema b'.	Schema d'.
00022	$\frac{5!}{3!\,2!}$			1113
00112	$\frac{5!}{2!\,2!}$			1122
01111	$\frac{5!}{4!}$			1222
000003	$\frac{6!}{5!}$			11111
000012	$\frac{6!}{4!}$			11112
000111	$\frac{6!}{3!\,3!}$			11122
0000002	$\frac{7!}{6!}$			111111
0000011	$\frac{7!}{5!\,2!}$			111112

Die Schemata b'. und d'. sind ganz dieselben wie bei der Berechnung von $f^9 x$; das erste Schema a'. entsteht aus dem Schema a. dadurch, dass man jedes Element in demselben um die Einheit verringert. Dasselbe lässt sich jedoch von dem Schema a. ganz unabhängig darstellen, dadurch dass man die vorher angegebenen Regeln für die Derivation einer Combinationsclasse aus der vorhergehenden in der Weise abändert, dass an den Stellen von 1, 2, 3 u. s. w. 0, 1, 2, 3 u. s. w. tritt, und dann von der ersten Classe (8) ausgeht. Selbstverständlich ist in den so erhaltenen Complexionen die Quersumme keineswegs mehr immer dieselbe. Da jedoch die Elemente in erster Linie Ordnungszahlen sind, so kann man den Zahlen 0, 1, 2, 3 u. s. w. einen um die Einheit grösseren numerischen Wert beilegen, wodurch die Quersumme wieder 9 wird, und spricht sodann die Forderung für das Schema a'. folgendermassen aus: Es sollen die aufeinander folgenden Combinationsclassen der Elemente 0, 1, 2, 3 … 8 zur Quersumme 9 berechnet werden, wobei den Elementen 0, 1, 2 … 8 bei der Berechnung der Quersumme einem die Einheit grösserer numerischer Wert beigelegt werden soll, was man kurz ausdrückt: es sollen die sämmtlichen Combinationsclassen der Elemente 0, 1, 2 bis 8 zur Quersumme 9 für den Zeiger $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ gebildet werden. Demgemäss ergiebt sich folgendes combinatorische Gesetz: Bildet man sämmtliche Combinationsclassen der

Elemente 0, 1, 2, 3 ... 8 zur Quersumme 9 für den Zeiger $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, schreibt dieselben als Schema a., schreibt in b. die Versetzungszahlen an, entwickelt in d. die Complexionen der Indices der Binomialcoefficienten (wie vorher); ersetzt dann die Elemente des ersten Schemas durch die den Elementen entsprechenden Facultäten, ersetzt die Indices in d. durch die zugehörigen Binomialcoefficienten, bildet aus den sich entsprechenden Werten in *a*, *b*, *d* Producte, und verbindet die zu den einzelnen Classen gehörigen Producte zu einer Summe; so sind die so entstandenen Werte der einzelnen Classen gleich $1!\,l_8$; $2!\,l_7$ u. s. w. Die Verallgemeinerung dieser ganz independenten Berechnung der Facultätencofficienten überlasse ich dem Leser.

V.

Miscellen.

1.

Die Sectionscurven.

Die Formel

$$R^n \sin U - R^{n-1} a \sin(U+\varphi) + R^{n-2} b \sin(U+2\varphi) - \ldots = 0$$

lässt eine Anwendung zu auf die Teilung eines Winkels in n Teile. Dabei ist nicht nötig, die Abschnitte $x = p_1 = p_2 = p_3$ der Abscissenachse gleich a zu setzen. Lassen wir also m Punkte in einen zusammenfallen, so gehen von einem Curvenpunkte m Strahlen nach demselben, und es ist $U = \Sigma\Theta = m\Theta$. Setzen wir nun unserer Aufgabe gemäss fest, dass

$$m\Theta = 2R - n\varphi$$

sei, so geht obige Formel über in

$$R^m \sin n\varphi - maR^{m-1} \sin(n-1)\varphi + m\left(\frac{m-1}{2}\right)a^2R^{m-2}\sin(n-2)\varphi - = 0$$

Hierin ist m ganz willkürlich zu nehmen, in Folge dessen die Gleichung zur Anwendung eine ziemliche Ausdehnung besitze. Im vorliegenden Falle wird der zu teilende Winkel ψ durch $2R - m\Theta$ vorgestellt, woraus bei passender Wahl von m aus dem Winkel Θ der gesuchte $\varphi = \frac{\psi}{n}$ vermittelst der Curve sich leicht ergibt.

Bemerkt man, dass man über n frei verfügen kann, und setz man $n = 1$ voraus, so resultirt aus den obigen Formeln

$$m\Theta = 2R - \varphi$$

$$\Theta = \frac{2R - \varphi}{m}$$

$$R^m - m_2 a^2 R^{m-2} + m_3 a^3 R^{m-3} \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} - \ldots = 0$$

Der zu teilende Winkel ψ ist $2R - \varphi$, so dass m an die Stelle von n tritt, in Folge dessen

$$\Theta = \frac{\psi}{m} \text{ ist.}$$

Curven dieser Art haben die Eigenschaft, dass eine durch den Anfangspunkt gezogene Gerade die Curve in m Punkten schneidet, deren Radienvectorensumme gleich Null ist.

Setzen wir z. B. $m = 3$, so ist

$$R^3 - 3a^2 R + 2a^3 \cos\varphi = 0$$

die Trisectionscurve in Polarcoordinaten, welcher wir schon früher bei der gleichseitigen Hyperbel begegnet sind.

Diese Curve besitzt einen Knotenpunkt, durch welchen 2 Tangenten hindurchgehen, welche mit der X-Achse bezüglich die Winkel $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$ bilden. Die mit Θ bezeichneten Winkel sind der Reihe nach $\frac{2}{3}R - \frac{\varphi}{3}$, $\frac{4}{3}R - \frac{\varphi}{3}$, $\frac{\varphi}{3}$, was auch aus den Wurzeln

$$R_1 = 2a\cos(\tfrac{2}{3}R - \tfrac{1}{3}\varphi),$$
$$R_2 = 2a\cos(\tfrac{2}{3}R + \tfrac{1}{3}\varphi),$$
$$R_3 = 2a\cos\tfrac{1}{3}\varphi$$

bewahrheitet wird.

Gehen wir auf die erste Formel zurück und setzen

$$U = 2\Theta = 2R - 3\varphi,$$

so resultirt aus der betreffenden Curvengleichung

$$R^2 \sin 3\varphi - 2Ra \sin 2\varphi + a^2 \sin\varphi = 0$$

die bekannte Hyperbel

$$\frac{(x - \frac{2}{3}a)^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{a^2}{3}} = 1.$$

Im Anschluss an diese Aufgabe, worin die Trisection auf einen Kegelschnitt zurückgeführt ist, setzen wir überhaupt auch für die

übrigen Fälle $m = 2$ voraus, und die Teilungscurve hat die vereinfachte Gleichung

$$R^2 \sin n\varphi - 2aR \sin(n-1)\varphi + a^2 \sin(n-2)\varphi = 0,$$

worin

$$\varphi = \frac{2\mathrm{R} - 2\Theta}{n} \text{ ist.}$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung ergeben sich aus

$$\frac{R}{a} \sin n\varphi = \sin(n-1)\varphi \pm \sqrt{\sin(n-1)\varphi^2 - \sin n\varphi \sin(n-2)\varphi},$$

d. i.

$$\frac{R}{a} \sin n\varphi = \sin(n-1)\varphi \pm \sin\varphi,$$

so dass die Gleichung auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\left(R \cos\frac{n\varphi}{2} - a\cos\frac{n-2}{2}\varphi\right)\left(R \sin\frac{n\varphi}{2} - a \sin\frac{n-2}{2}\varphi\right) = 0$$

woraus die Gleichungen

$$R_1 = a\frac{\cos\frac{n-2}{2}\varphi}{\cos\frac{n}{2}\varphi}, \quad R_2 = a\frac{\sin\frac{n-2}{2}\varphi}{\sin\frac{n}{2}\varphi}$$

hervorgehen, welche auch auf anderm Wege abgeleitet werden können

Die Polargleichungen der Sectionscurven zeichnen sich durch grosse Einfachheit aus und umfassen alle Fälle. Die Untersuchung derselben bietet manches Interessante. Setzt man z. B. $n = 6$ fest, was auf die Trisection $\varphi = \frac{\mathrm{R} - \Theta}{3}$ zurückkommt, so existiren den Formeln für R_1 und R_2 gemäss die Gleichungen

$$y^2 = \frac{x^2(a-x)}{a-3x} \quad \text{und} \quad \left(x - \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{y^2}{3} = \frac{a^2}{3}$$

welche von einander unabhängig sind. Die letztere ist die Trisectionshyperbel.

Für $n = 5$ erhält man eine Gleichung $(n-1)$ten Grades von der Form

$$y^4 - Xy^2 + X_1 = 0$$

worin die X Functionen von x sind, welche ebenfalls den 4. Grad nicht überschreiten. Analoges gilt für die übrigen Fälle, die oft durch mehrere Curvengleichungen charakterisirt werden können.

E. Oekinghaus.

2.

Integration einer Differentialgleichung.

Um die Gleichung

$$y^{(4)} = xy' - y \tag{1}$$

zu integriren, differentiire ich dieselbe einmal, und erhalte hiedurch

$$y^{(5)} = xy'' \tag{2}$$

Setzt man nun

$$y'' = Y \tag{3}$$

so erhält man

$$Y''' = xY \tag{4}$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$Y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} [\mu_1 C_1 e^{\mu_1 ux} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 ux} + \mu_3 C_3 e^{\mu_3 ux} + \mu_4 C_4 e^{\mu_4 ux}] du \tag{5}$$

vorausgesetzt, dass C_1 C_2 C_3 C_4 willkürliche, blos an die Bedingung

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \tag{6}$$

gebundene Constante sind, und dass μ_1 μ_2 μ_3 μ_4 die 4 Wurzeln der Gleichung

$$\mu^4 = 1 \tag{7}$$

sind. (Siehe meine Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Seite 103).

Setzt man nun in die Gleichung (5) für Y seinen in (3) stehenden Wert, so erhält man

$$y'' = \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} [p_1 C_1 e^{\mu_1 ux} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 ux} + \mu_3 C_3 e^{\mu_3 ux} + \mu_4 C_4 e^{\mu_4 ux}] du \tag{8}$$

und hieraus folgt durch Integration

$$\begin{aligned} y = \mu_1 C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_1 ux} - 1 - \mu_1 ux}{\mu_1^2 u^2} + \varphi(u) + x\psi(u)\right] du \\ + \mu_2 C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_2 ux} - 1 - \mu_2 ux}{\mu_2^2 u^2} + \varphi(u) + x\psi u)\right] du \\ + \mu_3 C_3 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_3 ux} - 1 - \mu_3 ux}{\mu_1^2 u^2} + \varphi(u) + x\psi(u)\right] du \\ + \mu_4 C_4 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_4 ux} - 1 - \mu_4 ux}{\mu_4^2 u^2} + \varphi(u) + x\psi(u)\right] du \end{aligned} \tag{9}$$

und in dieser Gleichung bedeuten $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ einstweilen noch unbestimmte Functionen von u. Wird diese Gleichung zweimal nach x differentiirt, so gelangt man wieder zur Gleichung (8) zurück. Nun soll aber der in (9) stehende Wert von y der Gleichung (1) genügen. Damit dies stattfinde, müssen die Functionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ entsprechend gewählt werden.

Ich schreibe nun die Gleichung (9) kurz auf folgende Weise:

$$y = S\mu C\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\frac{e^{\mu ux}-1-\mu ux}{\mu^2u^2}+\varphi(u)+x\psi(u)\right]du \tag{10}$$

Differentiirt man dieselbe, so erhält man:

$$y' = S\mu C\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\frac{e^{\mu ux}-1}{\mu u}+\psi(u)\right]du$$

$$y'' = S\mu C\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\,.\,e^{\mu ux}du$$

$$y''' = S\mu C\int_0^\infty \mu u e^{-\frac{u^4}{4}}\,.\,e^{\mu ux}du$$

$$y^{(4)} = S\mu C\int_0^\infty \mu^2u^2e^{-\frac{u^4}{4}}\,.\,e^{\mu ux}du$$

und werden diese Werte in die Gleichung (1), d. i. in

$$y^{(4)}-xy'+y=0 \tag{1}$$

eingeführt, ss erhält man:

$$y^{(4)}-xy'+y = S\mu C\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\mu^2u^2e^{\mu ux}-x\,.\,\frac{e^{\mu ux}-1}{\mu u}-x\psi(u)\right.$$
$$\left.+\frac{e^{\mu ux}-1-\mu ux}{\mu^2u^2}+\varphi(u)+x\psi(u)\right]du$$

oder nach gehörig vorgenommener Reduction

$$y^{(4)}-xy'+y = S\mu C\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\mu^2u^2e^{\mu ux}-x\,.\,\frac{e^{\mu ux}-1}{\mu u}\right.$$
$$\left.+\frac{e^{\mu ux}-1-\mu ux}{\mu^2u^2}+\varphi(u)\right]du \tag{11}$$

Nun lässt sich stets $\varphi(u)$ so wählen, auf dass nachstehende Gleichung

$$\mu \int e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\mu^2 u^2 e^{\mu u x} - x . \frac{e^{\mu u x} - 1}{\mu u} + \frac{e^{\mu u x} - 1 - \mu u x}{\mu^2 u^2} + \varphi(u) \right] du$$
$$= - e^{-\frac{u^4}{4}} . \frac{e^{\mu u x} - 1}{\mu u} \tag{12}$$

identisch stattfindet; man kann sich hiervon durch Differentiation leicht überzeugen, denn differentiirt man die Gleichung (12), so erhält man:

$$\mu e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\mu^2 u^2 e^{\mu u x} - x . \frac{e^{\mu u x} - 1}{\mu u} + \frac{e^{\mu u x} - 1 - \mu u x}{\mu^2 u^2} + \varphi(u) \right]$$
$$= u^3 e^{-\frac{u^4}{4}} . \frac{e^{\mu u x} - 1}{\mu u} - e^{-\frac{u^4}{4}} . \frac{\mu^2 u x e^{\mu u x} - \mu(e^{\mu u x} - 1)}{\mu^2 u^2}$$

und hieraus folgt nach vorgenommener Reduction eine Identität, falls man

$$\varphi(u) = - \mu^2 u^2$$

setzt, es ist somit:

$$\mu \int c^{-\frac{u^4}{4}} \left[\mu^2 u^2 e^{\mu u x} - x . \frac{e^{\mu u x} - 1}{\mu u} + \frac{e^{\mu u x} - 1 - \mu u x}{\mu^2 u^2} - \mu^2 u^2 \right] du$$
$$= - e^{-\frac{u^4}{4}} . \frac{e^{\mu u x} - 1}{\mu u}$$

ferner

$$\mu \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\mu^2 u^2 e^{\mu u x} - x . \frac{e^{\mu u x} - 1}{\mu u} + \frac{e^{\mu u x} - 1 - \mu u x}{\mu^2 u^2} - \mu^2 u^2 \right] du = x$$

und schliesslich:

$$y^{(4)} - xy' - y = (C_1 + C_2 + C_3 + C_1)$$

Nun ist vermöge der Gleichung (6)

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \tag{6}$$

$\psi(u)$ bleibt vollständig willkürlich, man kann daher dasselbe beliebig annehmen, somit kann man das Integral der Gleichung (1) folgendermassen schreiben:

$$y = \mu_1 C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_1 u x} - 1 - \mu_1 u x}{\mu_1^2 u^2} - \mu_1^2 u^2 \right] du$$
$$+ \mu_2 C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_2 u x} - 1 - \mu_2 u x}{\mu_2^2 u^2} - \mu_2^2 u^2 \right] du$$
$$+ \mu_3 C_3 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_1 u x} - 1 - \mu_3 u x}{\mu_3^2 u^2} - \mu_3^2 u^2 \right] du$$
$$+ \mu_4 C_4 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_4 u x} - 1 - \mu_4 u x}{\mu_4^2 u^2} - \mu_4^2 u^2 \right] du + C_5 x \tag{10}$$

und hier bedeuten, wie schon einmal gesagt, C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 willkürliche, blos an die Bedingung

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \tag{6}$$

gebundene Constante, und μ_1 μ_2 μ_3 μ_4 die 4 Wurzeln der Gleichung

$$\mu^4 = 1 \tag{7}$$

Ein particuläres Integral der Gleichung (1) ist

$$y = x \tag{11}$$

Setzt man daher in die Gleichung (1)

$$y = x \int Z\, dx \tag{12}$$

so erhält man zur Bestimmung von Z die Gleichung:

$$xZ''' + 4Z'' - x^3 Z = 0 \tag{13}$$

Das Integral dieser Gleichung ist somit:

$$Z = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{14}$$

und führt man die hier angezeigte Operation durch, so gelangt man zu folgendem Integral der Gleichung (13)

$$
\begin{aligned}
Z = \mu_1 C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_1 ux} - 1}{\mu_1 ux} - \frac{e^{\mu_1 ux} - 1 - \mu_1 ux}{\omega_1^2 u^2 x^2} + \frac{\mu_1^2 u^2}{x^2}\right] du \\
+ \mu_2 C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_2 ux} - 1}{\mu_2 ux} - \frac{e^{\mu_2 ux} - 1 - \mu_2 ux}{\mu_2^2 u^2 x^2} + \frac{\mu_2^2 u^2}{x^2}\right] du \\
+ \mu_3 C_3 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_3 ux} - 1}{\mu_3 ux} - \frac{e^{\mu_3 ux} - 1 - \mu_3 ux}{\mu_3^2 u^2 x^2} + \frac{\mu_3^2 u^2}{x^2}\right] du \\
+ \mu_4 C_4 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_4 ux} - 1}{\mu_4 ux} - \frac{e^{\mu_4 ux} - 1 - \mu_4 ux}{\mu_4^2 u^2 x^2} + \frac{\mu_4^2 u^2}{x^2}\right] du
\end{aligned}
\tag{15}
$$

wobei C_1 C_2 C_3 C_4 und μ_1 μ_2 μ_3 μ_4 die früher angezeigte Bedeutung haben.

Führt man in die Gleichung (13) statt der Variablen x eine neue Variable ξ ein, mittelst der Substitution

$$x^4 = \xi \tag{16}$$

so gelangt man zu der Gleichung:

$$64\xi^2 \frac{d^3 Z}{\partial \xi^3} + 208\xi \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + 72 \frac{\partial Z}{\partial \xi} - Z = 0 \tag{17}$$

Das Integral dieser Gleichung ist somit:

$$\begin{aligned} Z = \mu_1 C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_1 u \sqrt[4]{\xi}} - 1}{\mu_1 u \sqrt[4]{\xi}} - \frac{e^{\mu_1 u \sqrt[4]{\xi}} - 1 - \mu_1 u \sqrt[4]{\xi}}{\mu_1^2 u^2 \sqrt{\xi}} + \frac{\mu_1^2 u^2}{\sqrt{\xi}} \right] du \\ + \mu_2 C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_2 u \sqrt[4]{\xi}} - 1}{\mu_2 u \sqrt[4]{\xi}} - \frac{e^{\mu_2 u \sqrt[4]{\xi}} - 1 - \mu_2 u \sqrt[4]{\xi}}{\mu_2^2 u^2 \sqrt{\xi}} + \frac{\mu_2^2 u^2}{\sqrt{\xi}} \right] du \\ + \mu_3 C_3 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_3 u \sqrt[4]{\xi}} - 1}{\mu_1 u \sqrt[4]{\xi}} - \frac{e^{\mu_3 u \sqrt[4]{\xi}} - 1 - \mu_1 u \sqrt[4]{\xi}}{\mu_1^2 u^2 \sqrt{\xi}} + \frac{\mu_1^2 u^2}{\sqrt{\xi}} \right] du \\ + \mu_4 C_4 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_4 u \sqrt[4]{\xi}} - 1}{\mu_4 u \sqrt[4]{\xi}} - \frac{e^{\mu_4 u \sqrt[4]{\xi}} - 1 - \mu_4 u \sqrt[4]{\xi}}{\mu_4^2 u^2 \sqrt{\xi}} + \frac{\mu_4^2 u^2}{\sqrt{\xi}} \right] du \end{aligned} \tag{18}$$

C_1 C_2 C_3 C_4 und μ_1 μ_2 μ_3 μ_4 haben genau die früher angezeigte Bedeutung.

Simon Spitzer.

3.

Ueber einen geometrischen Ort.

P, Q seien zwei Punkte in der Ebene des Dreiecks ABC. AP werde von BC, BQ, CQ beziehungsweise in P_a, A_b, A_c getroffen. A' liege zu P_a bezüglich $A_b A_c$ harmonisch.

Wir construiren A', indem wir die Punkte A, C der durch P_a gehenden Geraden BC mit A_b, A_c verbinden. Die Verbindungsgerade der Punkte

$$(BA_b,\ CA_c),\quad (BA_c,\ CA_b)$$

trifft AP in A'.

Nun ist:

$$(BA_b,\ CA_c) \equiv Q$$

Wir haben also die Coordinaten des Schnittpunktes der Geraden

$$[Q,\ (BA_c,\ CA_b)],\quad AP_a$$

zu bestimmen.

Für $P \equiv p_a p_b p_c$, $Q \equiv q_a q_b q_c$ (trimetrische Punktcoordinaten bezüglich des Fundamentaldreiecks ABC) erhalten wir:

$$
\begin{array}{rlll}
AP_a \equiv & 0 & p_c & -p_b \\
BQ \equiv & -q_c & 0 & q_a \\
CQ \equiv & q_b & -q_a & 0 \\
A_b \equiv & p_c q_a & p_b q_c & p_c q_c \\
A_c \equiv & p_b q_a & p_b q_b & p_c q_b \\
CA_b \equiv & p_b q_c & -p_c q_a & 0 \\
BA_c \equiv & p_c q_b & 0 & -p_b q_a \\
(CA_b, BA_c) \equiv & p_b p_c q_a & p_b^2 q_c & p_c^2 q_b
\end{array}
$$

Die Verbindungsgerade dieses Punktes mit Q hat die Form:

$$p_b q_c + p_c q_b \qquad -p_c q_a \qquad -p_b q_a$$

Dieselbe trifft AP_a in

$$A' \equiv 2p_b p_c q_a \qquad p_b(p_b q_c + p_c q_b) \qquad p_c(p_b q_c + p_c q_b)$$

Für $P \equiv J$, das Inkreiscentrum, bekommen wir:

$$A' \equiv 2q_a \qquad q_b + q_c \qquad q_b + q_c$$

Der Ort der Punkte Q, für welche in diesem Falle die A' in einer Geraden liegen, ist die Curve:

$$\begin{vmatrix} 2x_a & x_b + x_c & x_b + x_c \\ x_c + x_a & 2x_b & x_c + x_a \\ x_a + x_b & x_a + x_b & 2x_c \end{vmatrix}$$

$$= -2\Sigma x_a . [\Sigma x_a^2 - \Sigma x_b x_c] = 0$$

Die Gerade

$$x_a + x_b + x_c = 0$$

ist die Harmonikale von J.

Der Kegelschnitt

$$S = \Sigma x_a^2 - \Sigma x_b x_c = 0$$

reducirt sich auf den Punkt J. Denn nehmen wir an, irgend ein reeller Punkt $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ liege auf S, so dass

$$\Sigma \alpha_1^2 - \Sigma \beta_1 \gamma_1 = 0,$$

dann ist auch

$$\Sigma(1 + \alpha_1)^2 - \Sigma(1 + \beta_1)(1 + \gamma_1) = 0$$

Ausserdem liegt J auf S.

Es müssten also die in einer Geraden liegenden Punkte

$$1, \ \alpha_1, \ 1 + \alpha_1$$

auf dem Kegelschnitte S liegen.

Durch Projection erhalten wir den allgemeinen Satz:

P, Q seien zwei Punkte in der Ebene eines Dreiecks ABC. AP werde von BC, BQ, CQ bzhw. in P_a, A_b, A_c getroffen. A' sei der zu P_a bezüglich $A_b A_c$ vierte harmonische Punkt. Dann liegen die A' für alle Punkte Q, welche auf der Harmonikalen von P liegen, in einer Geraden.

Emil Hain.

Wien, Februar 1884.

4.

Geometrische Aufgabe nebst Lösung.

Ein Dreieck zu construiren aus einem Winkel α, der Winkelhalbirenden t_α und der durch die Winkelspitze gehenden Mittellinie t_a.

Auflösung. Für die Seiten und Winkel des Dreiecks ist die gebräuchliche Bezeichnung a, b, c und α, β, γ angewandt.

Es ist

$$t_\alpha^2 = \frac{4b^2 c^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}}{(b+c)^2} \tag{1}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$a^2 = 2b^2 + 2c^2 - 4t_a^2$$

$$0 = b^2 + c^2 - 4t_a^2 + 2bc\cos\alpha$$

$$0 = (b+c)^2 - 4t_a^2 - 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$(b+c)^2 = 4t_a^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

Setzt man diesen Ausdruck für $(b+c)^2$ in (1) ein, so erhält man

$$t_\alpha^2 . t_a^2 + bct_\alpha^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} = b^2c^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

oder

$$b^2c^2 - t_\alpha^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} . bc = t_\alpha^2 . t_a^2 \sec^2\frac{\alpha}{2}$$

$$bc = \frac{t_\alpha^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{t_\alpha^4 \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} + 4t_\alpha^2 . t_a^2 \sec^2\frac{\alpha}{2}}}{2}$$

da das Vorzeichen (—) für $\sqrt{\ }$ hier nicht zu verwerten ist.

Werden die auf a durch t_α gebildeten Abschnitte a_1 und a_2 genannt, so ist

$$a_1 . a_2 = bc - t_\alpha{}^2 = \frac{t_\alpha{}^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 2t_\alpha{}^2 + t_\alpha\sqrt{t_\alpha{}^2\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} + 4t_\alpha{}^2\sec^2\frac{\alpha}{2}}}{2}$$

Denkt man sich dann um das Dreieck einen Kreis beschrieben und t_α bis zur Peripherie verlängert, und nennt man die Verlängerung x, so ist

$$x = \frac{a_1 . a_2}{t_\alpha} = \frac{t_\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 2t_\alpha + \sqrt{t_\alpha{}^2\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} + 4t_\alpha{}^2\sec^2\frac{\alpha}{2}}}{2}$$

Demnach zeichne man den gegebenen Winkel α mit der halbirenden t_α und construire die Verlängerung x von t_α. Verlängert man dann t_α um x, und beschreibt über x als Sehne einen Kreisbogen, welcher Winkel $\frac{\alpha}{2}$ als Peripheriewinkel fasst, so schneidet der Bogen, in welchem der Scheitel liegt, einen Schenkel α entweder in 2 Punkten, oder berührt ihn, oder er hat keinen Punkt mit ihm gemein. Verbindet man im ersten Falle einen der beiden Punkte mit dem Endpunkte von t_α und zieht die Linie bis zum andern Schenkel aus, so ist das Dreieck, welches so entsteht, das verlangte. Der andere Punkt giebt dasselbe Dreieck in umgeschlagener Lage. Für den Fall der Berührung erhält man ein einziges gleichschenkliges Dreieck, im dritten Falle ist die Lösung unmöglich. P. Seelhoff.

5.

Ueber allgemeine und absolute Permutationen.

Lehrsatz. Bezeichnet man die Anzahl der allgemeinen Permutationen für n Elemente mit P_n, so ist

$$P_n = (n-1)(P_{n-2} + P_{n-1})$$

Beweis. Der Beweis wird in der Weise geführt, dass man, die Richtigkeit derselben für $n-1$ vorausgesetzt, seine Gültigkeit für n nachweist. Vertauscht man nämlich das erste Element a mit einem Elemente r, so ist die Permutationszahl für die $n-2$ übrigen Elemente P_{n-2}; die Gruppe ist charakterisirt durch die Stellung $r \dots a \dots$ Ersetzt man weiterhin r durch eins der übrigen $n-2$ Elemente, z. B.

durch u, so sind für die folgenden Permutationen zwei Fälle zu unterscheiden. Erstens muss u mit r denjenigen Platz tauschen, welchen dies ursprünglich eingenommen hatte und a muss demnach so lange auf seinen ursprünglichen Platz zurückkehren, so dass also die Gruppe der sich hieran anschliessenden Permutationen charakterisirt ist durch $a \ldots u \ldots r \ldots$; die Anzahl dieser Permutationen für die $n-3$ übrigen Elemente ist P_{n-3}. Zweitens tritt u für r in die erste Stelle und r für u in alle $(n-2)$ Permutationen, die im Eingange angeführt wurden. Beide Fälle zusammen liefern mithin $P_{n-3}+P_{n-2}$ Permutationen, und da u der Repräsentant der $(n-2)$ übrigen Elemente ist, so ist die Gesammtzahl derselben $(P_{n-3}+P_{n-2})(n-2)$ aber nach der Voraussetzung P_{n-1}. Rechnet man die ersten P_{n-2} Permutationen hinzu, so ergeben sich für den Inbegriff sämmtlicher Permutationen, welche durch den Platztausch von a und s eingeleitet sind, $P_{n-2}+P_{n-1}$ Permutationen und da a mit $n-1$ Elementen nacheinander vertauscht werden muss, um alle Permutationen zu bekommen, so ist

$$P_n = (n-1)(P_{n-2}+P_{n-1})$$

Nun ist für die 4 Elemente a, b, c, d der Gang der Versetzungen, obiger Auseinandersetzung entsprechend,

$$\left.\begin{matrix} b.a.c.d \\ b.a.d.c \end{matrix}\right\} P_2$$

$$\overbrace{\begin{matrix} a.c.b.d\,\}\,P_1 \\ \left.\begin{matrix} c.a.b.d \\ c.a.d.b \end{matrix}\right\} P_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a.d.c.b\,\}\,P_1 \\ \left.\begin{matrix} d.a.c.b \\ d.a.b.c \end{matrix}\right\} P_2 \end{matrix}}\ \Bigg\} = (P_1+P_2).2 = P_3$$

Da nun $(P_1+P_2).2 = P_3$ ist, so folgt für sämmtliche Permutationen, wenn man noch a mit c und d vertauscht

$$P_4 = (P_2+P_3).3$$

und ganz allgemein

$$P_n = (P_{n-2}+P_{n-1})(n-1).$$

Zweiter Lehrsatz. $P_n = n.P_{n-1}$.

Beweis. Aus dem ersten Satze folgt

$$P_n = nP_{n-2}+n.P_{n-1}-P_{n-2}-P_{n-1}.$$

Aber die 3 Glieder $nP_{n-2}-P_{n-2}-P_{n-1}$ oder $(n-1)P_{n-2}-P_{n-1}$ sind gleich

$$\begin{aligned}(n-1)P_{n-2}-(n-2)(P_{n-3}+P_{n-2}) &= P_{n-2}-(n-2P_{n-3} \\ &= -\{(n-2)P_{n-3}-P_{n-2}\}\end{aligned}$$

und letzter Ausdruck wieder $= +\{(n-3)P_{n-4} - P_{n-3}\}$. Fährt man mit dieser Reduction fort, so erhält man für ein grades n schliesslich

$$(n-1)P_{n-2} - P_{n-1} = 3P_2 - P_3 = 0$$

und für ein ungerades n

$$(n-1)P_{n-2} - P_{n-1} = 2P_1 - P_2 = 0$$

Also ist.

$$P_n = n \,.\, P_{n-1}.$$

Anmerkung. Verfährt man umgekehrt, indem man nach dem gewöhnlichen Permutationsverfahren nachweisst, dass

$$P_n = nP_{n-1}$$

ist, so folgt hieraus

$$P_n = (n-1)P_{n-1} + P_{n-1} - (n-1)P_{n-1} + (n-1)P_{n-2}$$
$$= (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2}).$$

Dritter Lehrsatz. Nennt man die Permutationsformen, bei welchen kein Element in seiner ursprünglichen Stellung steht, absolute und bezeichnet die Anzahl dieser Formen für n Elemente mit $P^a{}_n$, so ist

$$P^a{}_n = (n-1)(P^a{}_{n-2} + P^a{}_{n-1}).$$

Beweis. Der Beweis wird, wie bei dem ersten Satze, durch den Schluss von $n-1$ auf n geführt. Vertauscht man nämlich das erste Element α mit einem der übrigen ϱ, so ist die Permutationszahl für die $n-2$ Elemente $P^a{}_{n-2}$. Die Gruppe dieser Formen ist charakterisirt durch die Stellung $\varrho \ldots \alpha \ldots$ Ersetzt man dann ϱ durch eins der übrigen $n-2$ Elemente v, dann sind zwei Fälle zu unterscheiden. Erstens tritt ϱ an die ursprüngliche Stelle von v und man erhält $P^a{}_{n-3}$ Permutationen der $n-3$ übrigen Elemente; die Formengruppe ist charakterisirt durch $v \ldots \alpha \ldots \varrho \ldots$ Zweitens tritt ϱ in die erstgenannten $P^a{}_{n-2}$ Permutationen überall an die Stelle von v, die Gruppe ist bezeichnet durch $v \ldots \alpha \ldots$ Für beide Fälle hat man demnach $P^a{}_{n-3} + P^a{}_{n-2}$ Permutationen und da v die $n-2$ übrigen Elemente repräsentirt, welche nach und nach mit ϱ zu vertauschen sind, so ist die Gesammtzahl dieser Permutationen $(n-2).(P^a{}_{n-2} + P^a{}_{n-2})$ oder nach der Voraussetzung $= P^a{}_{n-1}$. Man hat also als Inbegriff sämmtlicher Permutationen, welche durch die Vertauschung von α und ϱ eingeleitet wurde, $P^a{}_{n-2} + P^a{}_{n-1}$ und für sämmtliche Permutationen, die dadurch erhalten werden, dass α überhaupt mit $n-1$ Elementen nach und nach zu tauschen hat, ist also

$$P^a{}_n = (n-1)(P^a{}_{n-2} + P^a{}_{n-1})$$

Für P^a_n ergiebt sich aber, wenn die Elemente α, β, γ, δ sind, folgender Gang der Versetzungen

$$\left.\begin{array}{l}\beta.\alpha.\delta.\gamma\}P^a_2\\ ....\}P^a_1\\ \delta.\alpha.\beta.\gamma\}P^a_2\\ ....\}P^a_1\\ \gamma.\alpha.\delta.\beta\}P^a_2\end{array}\right\} = (P^a_1+P^a_2)2 = P^a_3 \quad .$$

Da nun also

$$(P^a_1+P^a_2)\,2 = P^a_3,$$

so ist weiter

$$(P^a_2+P^a_3).3 = P^a_4,$$

allgemein

$$P^a_n = (n-1)(P^a_{n-2}+P^a_{n-1})$$

Vierter Lehrsatz. $P^a_n = nP^a_{n-1}+(-1)^n$

Durch ein Verfahren, wie bei dem Beweise des 2ten Lehrsatzes lässt sich nachweisen, dass für ein grades n

$$(n-1)P^a_{n-2}-P^a_{n-1} = 3P^a_2-P^a_3 = +1$$

und für ein ungrades n

$$(n-1)P^a_{n-2}-P^a_{n-1} = 2P^a_1-P^a_2 = -1$$

ist, und man hat also

$$P^a_n = nP^a_{n-1}|+(n-1)P^a_{n-2}-P^a_{n-1} = nP^a_{n-1}+(-1)^n$$

Fünfter Lehrsatz. $P^a_n = n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$

Beweis. $P_n-P^a_n = n(P_{n-1}-P^a_{n-1})+(-1)^{n-1}$

$$= n\{(n-1)(P_{n-2}-P^a_{n-2})+(-1)^{n-2}\}+(-1)^{n-1}$$

$$= n(n-1)(P_{n-2}-P^a_{n-2})+(-1)^{n-2}n+(-1)^{n-1}$$

$$= n(n-1)\{(n-2)(P_{n-3}-P^a_{n-3})+(-1)^{n-3}\} +(-1)^{n-2}n+(-1)^{n-1}$$

$$= n(n-1)(n-2)(P_{n-3}-P^a_{n-3})+n(n-1)(-1)^{n-3} +(-1)^{n-2}n+(-1)^{n-1}$$

$$P_n-P^a_n = n(n-1)(n-2)\,...\,(n-k+1)(P_{n-k}-P^a_{n-k}) + n(n-1)...(n-k+2)(-1)^{n-k} + ... +(-1)^{n-2}n+(-1)^{n-1}$$

Für $k = n-1$ ist also

$$P_n - P^a_n = n(n-1)\ldots 2 - n(n-1)\ldots 3 + n(n-1)\ldots 4 - \ldots + (-1)^{n-2} n + (-1)^{n-1}$$

$$= n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots (-1)^{n-2} \frac{n!}{(n-1)!} + (-1)^{n-1} \frac{n!}{n!}$$

Mithin

$$P^a_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Anmerkung. $\frac{P^a_n}{P_n}$ ist also

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

und für $n = \infty$ ist

$$\frac{P^a_n}{P_n} = \frac{1}{e} \quad \text{oder} \quad \frac{P_n}{P^a_n} = 0.$$

Der Beweis der letzten Formel, welche den von Herrn Th. Sanio zuerst aufgestellten Satz enthält, ist nach einer Mitteilung desselben ausser von mir, in ähnlicher Weise auch von Herrn O. Hermes geführt worden. Der Beweis, dass

$$\frac{P_n - P^a_n}{P_n} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots (-1)^{n-2} \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

ist, wurde bereits, wie ich hinterher gefunden habe, von Nic. Bernoulli I. gegeben; man sehe hierüber Montmort: Essai d'analyse sur les jeux de hazard, Paris 1713. 2ter Theil. $\frac{P_n - P^a_n}{P_n}$ ist nämlich der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, unter allen Permutationsformen aus n Elementen eine zu treffen, bei welcher mindestens 1 Element in seiner ursprünglichen Stellung ist. Bei Montmort handelt es sich um das Spiel „Treize", bei welchem man von 13 Whistkarten einer Farbe die einzelnen umschlägt und der Reihe nach aufzählt: As, Zwei, Drei u. s. w. Das Spiel ist entschieden, wenn die aufgeschlagene Karte mit der ausgesprochenen Bezeichnung übereinstimmt. — Ueber den Satz des Herrn Sanio sehe man: Grunerts Archiv, T. LXX. p. 224.

P. Seelhoff.

6.

Beweis für den von Herrn Dr. Sanio mitgeteilten Satz, betreffend die combinatorische Definition der Zahl e.

Zu dem im 3ten Hefte des Archivs, Teil LXX. S. 224, von Herrn Dr. Sanio mitgeteilten Satze, betreffend die combinatorische Definition der Zahl e, erlaube ich mir, folgenden Beweis zu geben. Ich bezeichne hierbei die Anzahl der absoluten Permutationen von n Elementen mit N^a, die Anzahl sämmtlicher Permutationen mit N.

Handelt es sich beispielsweise um $N^a{}_5$, so seien die Elemente 1, 2, 3, 4, 5 und dieses ihre ursprüngliche Stellung. Dann kann man zum Zwecke der Permutation das erste Element in die 2te, 3te, 4te und 5te Stelle setzen und erhält 4 Gruppen, welche hierdurch charakterisirt sind.

Setzt man für jede einzelne Gruppe jedes der übrigen Elemente an die Spitze, so findet man für die Anzahl der Permutation einer Gruppe 2+9, nämlich 2, wenn das Element an der Spitze ist, in dessen Stelle sich (1) befindet, und im Ganzen 9 für die 3 andern Elemente, wenn diese an der Spitze stehen. Es ist also aus den 4 Gruppen

$$N^a{}_5 = (2+9).4 = (N^a{}_3 + N^a{}_4).4.$$

Allgemein erhält man

$$N^a{}_n = (N^a{}_{n-2} + N^a{}_{n-1})(n-1);$$

insbesondere ist

$$N^a{}_2 = 1, \quad N^a{}_3 = 2.$$

Oder

$$N^a{}_3 = 1.3-1$$

$$N^a{}_4 = (1.3-1).4+1$$

$$N^a{}_5 = ((1.3-1).4+1).5-1 \quad \text{u. s. w.}$$

. . . .

$$N^a{}_n = (\ldots(((1.3-1).4+1)5-1)\ldots)n+(-1)^n$$

Löst man die Klammern durch Multiplication auf, so ist

$$N^a{}_n = 1.3.4.5\ldots n - 4.5.6\ldots n + 5.6\ldots n + \ldots (-1)^{n-1} n + (-1)^n$$

Also

$$\frac{N^a{}_n}{N_n} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{e} \text{ für } n = \infty$$

also

$$\lim \frac{N^a{}_n}{N_n} = \frac{1}{e} \text{ und } \lim \frac{N_n}{N^a{}_n} = e$$

Bremen. Seelhoff.

7.

Darstellung der Zahl e als unendliches Product.

Wie sich nach Wallis $\frac{\pi}{2}$ in Form eines unendlichen Productes geben lässt *), nämlich:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ \ldots}{1.3.3.5.5.7\ \ldots},$$

so auch $\frac{e}{2}$, nämlich:

$$\frac{e}{2} = \frac{1.0.3.8.45.264.1855\ \ldots}{0.1.2.9.44.265.1854\ \ldots}.$$

Hierin ist $\frac{0}{0} = 1$ und sind die Nullen nur einer vollständigeren Analogie halber zugesetzt, indem dann jeder Factor des Zählers abwechselnd um 1 grösser oder kleiner, als der entsprechende Factor des Nenners wird. Das Bildungsgesetz lautet: „die Summe je zweier auf einander folgenden Factoren des Nenners, mit der Stellenzahl des letztern von ihnen multiplicirt, liefert den folgenden Factor, also:

$$(0+1).2 = 2$$
$$(1+2).3 = 9$$
$$(2+9).4 = 44$$
$$(9+44).5 = 265$$

etc.

Beweis. Da der dritte Factor im Nenner, nämlich: 2 identisch $= 3-1$ ist und $(1+2) = 4-1$, so wird der vierte Factor im Nenner nach dem vorhin angegebenen Bildungsgesetze: $4.3-1.3 = 4.3-4+1 = 9$ und der vierte Factor im Zähler: $8 = 4.3-4 = 4(3-1) = 4.2 =$ dem vierfachen 3ten Factor des Nenners.

Ferner wird, da $(2+9) = (3-1)+(4.3-4+1) = 3.5-5+1$ ist, der fünfte Factor des Nenners $= 3.4.5-4.5+5-1$, also der fünfte Factor im Zähler, der ja um 1 grösser sein soll, $= 5(4.3-4+1) = 5.9 =$ dem fünffachen 4ten Factor des Nenners.

Ebenso wird der sechste Factor drs Nenners, da $(9+44) = (4.3-4+1)+(3.4.5-4.5+5-1) = 3.4.6-4.6+6-1$ ist, die Form: $3.4.56-4.56+5.6-6+1$ erhalten und der sechste Factor des Zählers = dem sechsfachen 5ten Factor des Nenners sein.

---

*) Vgl. Cauchy: algebraische Analysis Neunte Note.

Ohne Weiteres lässt sich durch den Schluss von n auf $n+1$ dasselbe für die $n$ten Factoren des Zählers und Nenners dartun.

Brechen wir daher den doppelten Wert des unendlichen Productes:

$$e = \frac{1.2.3.8.45.264.1855\ldots}{1.1.2.9.44.265.1854\ldots}$$

beim $n$ten Factor ab, so hebt sich aus Zähler und Nenner jeder frühere Factor bis auf den letzten heraus und bleibt im Zähler das Product $1.2.3\ldots n$, im Nenner nur der $n$te Factor:

$$N = 3.4.5.6\ldots n - 4.5.6\ldots n + 5.6\ldots n\ldots \mp n \pm 1$$

und der reciproke Wert des Productes nämlich:

$$\frac{N}{n!} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}\cdots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

wird für $n = \infty$ in den Wert $\frac{1}{e}$ übergehn, denn

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} \pm \cdots$$

liefert für $x = -1$ die Formel:

$$\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \cdots$$

Anmerkung 1. Es muss daher auch N die Anzahl der absoluten Permutationen zu irgend einer Grundstellung bei n Elementen sein *), was aus folgendem erhellt.

Um die Vorstellung zu fixiren, wollen wir vier Elemente a, b, c, d annehmen und zwei Anzahlen IV und IV' unterscheiden. Die erste gebe an, wie oft wir a, b, c, d zur Grundstellung $abcd$, die zweite, wie oft wir x, b, c, d zu derselben Grundstellung $abcd$ absolut permutiren können (d. h. so, dass kein Element mit der Grundstellung einen Platz gemeinsam hat).

Was nun die zweite Anzahl betrifft, so kann x vier Stellen einnehmen.

Steht es unter a, so kommen jetzt die absoluten Permutationen von den 3 Elementen b, c, d zur Grundstellung bcd in Betracht, ihrer Anzahl nach III.

---

*) Vgl. Combinatorische Definition der Zahl e von Th. Sanio. Grunert's Arch. T. LXX. pag. 224.

Steht es aber unter b, resp. c oder d, so kommen jedesmal die absoluten Permutationen von den 3 Elementen b, c, d zu einer Grundstellung von 3 Elementen in Betracht, deren eines a ist, also nicht unter b, c, d enthalten ist. Daher werden dann jedesmal III' absolute Permutationen gewonnen und dies geschieht 3 mal.

Soweit wird also $IV' = III + 3.III'$, während $IV = 3.III'$ ist, da jetzt, wenn statt x das Element a eintritt, die erste Gruppe fortfällt; also ist auch $IV' = III + IV$. Analog ist $V = 4.IV'$, also auch $V = 4.(III + IV)$.

Mithin wird allgemein die Anzahl der absoluten Permutationen bei $(n+1)$ Elementen = der $n$fachen Summe der Anzahlen der absoluten Permutationen bei n und $n-1$ Elementen, und wir erkennen die Uebereinstimmung mit dem oben für die Factoren des Nenners angegebenen Bildungsgesetz.

Anmerkung 2. Es gilt die Formel:

$$\left(\frac{1.1.2.9.44.265.1854\ldots}{1.2.3.8.45.264.1855\ldots}\right)^{\frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots}} = i^i,$$

worin $i = \sqrt{-1}$.

Königsberg i. P. d. 4ten November 1883.

J. Hermes.

8.

Beweis für den in T. LXX. S. 224 gegebenen Ausdruck der Zahl e.

Die Anzahl derjenigen Permutationen von n Elementen, welche mit 1er Anfangsstellung $123\ldots a$ k Plätze und nicht mehr gemeinsam haben, möge durch n_k bezeichnet werden.

In Folge dessen bezeichnet n_0 die Anzahl der Permutationen, welche mit der Anfangsstellung keinen Platz gemein haben, also der absoluten Permutationen der Anfangsstellung, welche Herr Seelhoff ausführlicher durch $P^a{}_n$ bezeichnet hat, mithin ist

$$n_0 = P^a{}_n \quad \text{und} \quad n_n = 1.$$

Man sieht leicht, dass

$$n_1 = \frac{a}{1}(1-1)_0, \quad n_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)_0 \text{ u. s. w.}$$

wodurch also n_k auf einfache Weise von der Anzahl der absoluten Permutationen einer geringeren Zahl von Elementen abhängig gemacht ist.

Nun handelt es sich um die Bestimmung des Grenzwerts des Verhältnisses

$$\frac{n_0}{n!}, \quad (n! = 1.2.3 \ldots n) \quad \text{für} \quad n = \infty.$$

Zuvörderst folgt aus den obigen Formeln, dass:

$$\frac{n_1}{n!} = \frac{(n-1)_0}{(n-1)!}, \quad \frac{n_2}{n!} = \frac{1}{1.2} \cdot \frac{(n-2)_0}{(n-2)!}, \quad \frac{n_3}{n!} = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{(n-3)_0}{(n-3)!} \text{ u. s. w.}$$

Der Wert von $\frac{n_0}{n!}$ ist jedenfalls < 1, und man findet durch einige Versuche, dass dieser Wert oscillirt, wobei aber die Schwankungen mit wachsendem n immer kleiner werden. Man dürfte also annehmen, dass ein bestimmter Grenzwert vorhanden sein wird (dieser Punkt ist die einzige Schwäche des Beweises); wir wollen ihn durch $\frac{1}{x}$ bezeichnen, setzen also

$$\lim \frac{n_0}{n!} = \frac{1}{x} \quad \text{für} \quad n = \infty.$$

Dann wird

$$\lim \frac{n_0}{n!} = \frac{(n-1)_0}{(n-1)!} = \frac{(n-2)_0}{(n-2)!} = \text{ u. s. w. } = \frac{1}{x},$$

und man hat demnach:

$$\lim \frac{n_1}{n!} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{x}, \quad \lim \frac{n_2}{n!} = \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{x}, \quad \lim \frac{n_3}{n!} = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{x} \text{ u. s. w.}$$

Nun ist offenbar

$$n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_n = n!,$$

mithin

$$\frac{n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_n}{n!} = 1.$$

Geht man im Zähler nicht bis n_n, sondern nur bis n_k und lässt k und n beide ins Unendliche wachsen, jedoch derart, dass $n-k$ ebenfalls noch unendlich bleibt, so wird auch dann

$$\lim \frac{n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{n!} = 1,$$

weil sich sehr leicht zeigen lässt, dass der Rest

$$\frac{n_{k+1} + n_{k+2} + \ldots + n_n}{n!}$$

sich dem Werte Null nähert.

Substituirt man in die Gleichung

$$\lim \frac{n_0 + n_1 + \ldots + n_k}{n!} = 1$$

die oben aufgestellten Werte von n_0, n_1 u. s. w., so folgt

$$\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\right) = 1$$

und daher

$$x = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = e,$$

womit der behauptete Lehrsatz bewiesen ist.

Ich erlaube mir noch die Bemerkung, dass ich die mir von den Herren Hermes und Seelhoff freundlichst mitgeteilten Beweise, was Fruchtbarkeit der Methode anbelangt, dem meinigen vorziehe, weil durch jene auch der abbrechenden (unvollständigen) Exponentialreihe eine combinatorische Bedeutung abgewonnen wird.

Königsberg. Th. Sanio.

9.

Krümmungsradius der Ellipse.

Da auf unsern Realgymnasien die Differentialrechnung nicht mehr getrieben werden soll, und es anderseits doch — schon mit Rücksicht auf die Astronomie — wünschenswert erscheint, dass unsere Schüler die Bestimmung des Krümmungsradius in einem gegebenen Punkt der Ellipse kennen lernen, so habe ich versucht, diese Bestimmung ohne Hülfe der Differentialrechnung durchzuführen und zwei nicht allzu umständliche Methoden gefunden. Zu der ersten derselben gab mir Veranlassung die hübsche Entwickelung in T. LXX. N. II. dieses Archivs.

I. Sind $K = 0$ und $E = 0$ die Gleichungen des Kreises und der Ellipse, so erhält man bekanntlich die beiden Paare gemeinschaftlicher Sehnen durch die Bedingung

$$K + \lambda E \equiv p \,.\, q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

wo p und q lineare Ausdrücke sind.

Wenn der Kreis mit der Ellipse drei zusammenfallende Punkte gemein haben soll, so wird die eine Sehne zur Tangente in dem ge-

meinschaftlichsn Punkt x', y', und die andere Sehne verbindet diesen Punkt mit dem vierten Durchschnittspunkt, daher

$$p = a^2yy' + b^2xx' - a^2b^2, \quad q = y - y' - n(x - x').$$

Sind noch ξ, η, ϱ die Mittelpunktscoordinaten und der Radius des Krümmungskreises, so wird (I) zu

$$[(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2 - \varrho^2] + \lambda[a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2]$$
$$\equiv (a^2yy' + b^2xx' - a^2b^2)\,[y - nx - (y' - nx)]$$

Hieraus, wenn u eine noch zu bestimmende Constante bezeichnet:

$$\begin{aligned}
1 + \lambda a^2 &= ua^2y' \\
0 &= b^2x' - a^2y'n \\
1 + \lambda b^2 &= -ub^2x'n \\
2\eta &= u(a^2y'(y' - nx') + a^2b^2) \\
2\xi &= u(b^2x'(y' - nx') - a^2b^2n).
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert

$$n = \frac{b^2x'}{a^2y'},$$

also den Satz, auf welchen die angeführte Abhandlung Bezug nimmt; die erste und dritte Gl. liefern dann:

$$u = \frac{(b^2 - a^2)y'}{a^2b^4}; \quad \lambda = -\frac{a^4y'^2 + b^4x'^2}{a^4};$$

darauf erhält man aus den beiden letzten Gleichungen:

$$\xi = \frac{(a^2 - b^2)x'^3}{a^4}, \quad \eta = -\frac{(a^2 - b^2)y'^3}{b^4}$$

Dann ist endlich

$$\varrho^2 = (\eta - y')^2 + (\xi - x')^2 = \frac{(a^4y'^2 + b^4x'^2)^3}{a^8b^8}.$$

II. Man verlegt den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt x', y' und hat dann die Gleichungen:

$$a^2y^2 + 2a^2y'y + b^2x^2 + 2b^2y'y = 0, \quad (y-\eta)^2 + (x-\xi)^2 = \varrho.$$

Da der Mittelpunkt des Kreises auf der Normalen im Anfangspunkt liegt und der Kreis durch diesen Punkt geht, so hat man zur Bestimmung von ξ, η die Gleichungen

$$\eta = \frac{a^2y'}{b^2x'}\xi, \quad \eta^2 + \xi^2 = \varrho^2;$$

daraus

$$\xi = \pm \frac{b^2 \varrho x'}{w}, \quad \eta = \pm \frac{a^2 \varrho y'}{w}$$

wo

$$w = \sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}.$$

Substituirt man diese Werte in die Gleichung des Kreises, eliminirt y^2 zwischen dieser Gleichung und der der Ellipse und substituirt wieder den dadurch erhaltenen Ausdruck für y in die Gleichung der Ellipse, so erhält man nach Division durch x^2:

$$\left[x(a^2 - b^2) - 2b^2 x' \left(1 \pm \frac{a^2 \varrho}{w}\right)\right]^2 = -4a^4 y'^2 \left(1 \pm \frac{a^2 \varrho}{w}\right)^2 \cdot \frac{w \pm b^2 \varrho}{w \pm a^2 \varrho}.$$

Damit die Gleichung zum dritten male durch $x = 0$ befriedigt werde, muss sein:

$$4b^4 x'^2 \left(1 \pm \frac{a^2 \varrho}{w}\right)^2 + 4a^4 y'^2 \left(1 \pm \frac{a^2 \varrho}{w}\right)^2 \cdot \frac{w \pm b^2 \varrho}{w \pm a^2 \varrho} = 0,$$

woraus man sofort den bekannten Ausdruck für ϱ erhält und zugleich erkennt, dass das untere Vorzeichen gewählt werden muss.

Prof. Dr. Stammer.

Düsseldorf, Anfang December 1883.

10.

Zusatz zum Aufsatze: „Integration einiger partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung". *)

Die dort behandelten Gleichungen können noch allgemeiner bemacht werden, wie folgt:

1. Die partielle Differentialgleichung:

$$s = \frac{a_1 x + a_2}{b_1 x + b_2} p + \frac{b_1}{b_1 x + b_2} q - \frac{a_1}{b_1 x + b_2} z + f(x, y, r)$$

wo a_1 a_2 b_1 b_2 gegebene Functionen von y sind, giebt nach x partiell differentiirt:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{a_1 x + a_2}{b_1 x + b_2} r + \frac{b_1}{b_1 x + b_2} f + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für r, die integrirt werden kann, sobald a_1 a_2 b_1 b_2 gegeben sind.

*) Archiv T. LXX. Seite 219.

2. Die partielle Differentialgleichung:

$$s = Yf(x, p, r)e^{ax}$$

wo a eine Constante, Y eine Function von y ist, giebt nach x partiell differentiirt:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = Ye^{ax}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + apf\right)$$

mit s dividirt und statt x, y die Grössen x, p als neue unabhängige Variabeln eingeführt:

$$\frac{\partial r}{\partial p} = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial p}r\right) + ap$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für r, die integrirt werden kann, sobald f gegeben ist.

3. Die partielle Differentialgleichung:

$$s = (aq + Y)f(x, p, r)$$

wo a eine Constante, Y eine Function von y ist, giebt nach x partiell differentiirt:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = asf + (aq + Y)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

mit s dividirt und statt x, y die Grössen x, p als neue unabhängige Variabeln eingeführt:

$$\frac{\partial r}{\partial p} = af + \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial p}r\right)$$

Die Integration obiger Differentialgleichungen ist hierdurch auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zuückgeführt, — weshalb dieselben aus dem Standpunkte der partiellen Differentialgleichungen als gelöst zu betrachten sind.

Klausenburg (Ungarn) 1883 November.

F. Vályi.

11.

Einfacher Beweis der Existenz eines Mittelpunkts paralleler Kräfte.

Aus zwei gleichgerichteten Kräften p, q, die auf zwei fest verbundene Punkte A, B wirken, resultirt nach dem Gesetze des Hebels eine gleichgerichtete Kraft $p+q$, welche die Gerade AB in einem Punkte b nach dem Verhältniss

$$Ab:Bb=q:p$$

schneidet. Der Punkt b ist also unabhängig von der gemeinsamen Richtung und heisst auf Grund dieser Eigenschaft der Mittelpunkt der parallelen Kräfte p, q. Aus $p+q$ und einer gleichgerichteten auf C wirkenden dritten Kraft r resultirt ebenso eine Kraft $p+q+r$, welche die Gerade bC in c nach dem Verhältniss

$$bc:cC=r:p+q$$

teilt. Der Punkt c ist unabhängig von der Richtung der Kräfte, durch ihn geht stets die Resultante von $p+q$ und r, folglich auch von p, q, r; es ist demnach c in gleichem Sinne der Mittelpunkt von p, q, r. Mit diesem System lässt sich eine vierte gleichgerichtete Kraft zusammensetzen, u. s. f. Nach jeder Hinzufügung erhält man eine gleichgerichtete Resultante aller Kräfte und einen Mittelpunkt. Es hat sich ergeben:

Aus jedem System gleichgerichteten Kräfte, die auf bestimmte fest verbundene Punkte wirken, resultirt eine gleichgerichtete Kraft gleich der Summe aller jener Kräfte, die immer durch denselben Punkt, den Mittelpunkt des Systems, geht, wie sich auch die gemeinsame Richtung ändern möge.

Solcher Mittelpunkte kann es nicht mehr als einen geben; denn gäbe es zwei, und man nähme die Kräfte in einer von der Verbindungslinie beider verschiedenen Richtung, so würde die Resultante des Systems, sofern sie durch den einen Punkt gienge, nicht durch den andern gehen können; oder mit andern Worten, es würden zwei Kräfte, die in verschiedenen geraden Linien wirken, einander gleichwirkend sein müssen.

Der vorstehende Beweis ist mir mündlich mitgeteilt worden, mit der Aussage dass er längst bekannt sei, Dennoch scheint er allen oder den meisten Verfassern von Schulbüchern, in welchen der Satz gelehrt wird, unbekannt gewesen zu sein, da von 15 solchen Lehrbüchern, die ich kenne, einige weit umständlicher unzureichende Begründungen geben, die übrigen auf jeden Beweis verzichten.

So leicht nun auch der Weg zu entdecken ist, auf dem man hier so schnell und ohne viele Voraussetzungen zum Ziele gelangt, so hielt ich es doch nicht für unwert ihn ans Licht zu ziehen, um für die Zukunft zur Beseitigung einer Lücke in den elementaren Lehrbüchern der Physik und Mechanik beizutragen.

Gegenwärtige Mitteilung möge die Stelle eines für gleichen Zweck unter gleichem Titel geschriebenen früheren Aufsatzes einnehmen, den ich hiermit zurückziehe.

R. Hoppe.

VI.

Ueber ein Curvographon.

Von

Herrn **Emilio Pirani.**

Man hat in letzter Zeit sich vielfach bemüht das Verständniss der höheren Geometrie zu erleichtern dadurch, dass man die behandelten Gebilde als Modelle vorführte. Die Hilfsmittel, die dadurch entstanden sind, haben wesentlich den Zweck, Gebilde dreier Dimensionen, deren Vorstellung in der Tat Schwierigkeiten darbietet, wirklich räumlich vorzuführen. Diese ihre Aufgabe erfüllen sie jedoch meist äusserst einseitig. Sie stellen gewöhnlich eine bestimmte unveränderliche Form des betreffenden Gebildes dar, und ihre Anschaulichkeit wird in nicht geringem Grade durch die Gefahr beeinträchtigt, den Beschauer zu dem Gedanken zu verleiten, dass jene Form die einzig mögliche sei, oder ihn wenigstens daran zu gewöhnen mit dem betreffenden Namen immer einen unveränderlichen Begriff zu verbinden. Und es ist dies in der Tat eine Wirkung, die fast unvermeidlich ist bei jedem, der jenen Gebieten neu ist, also für diejenigen gerade, für welche die Modelle wesentlich bestimmt sind. Eine einzige Classe von Modellen ist nur bekannt, welche diesen Uebelstand nicht mit sich führen. Es sind dies die Modelle für abwickelbare Flächen, die schon seit längerer Zeit in verschiedenen Formen vorhanden sind. Die einen sind in Holz und Seidenfäden, die anderen in Eisen ausgeführt; beide gestatten die Darstellung einer ganzen Schaar von Flächen und zeigen auch einige Uebergangsformen. Ein Hauptmerkmal der erzeugten Flächen tragen sie deutlich an sich: die graden Linien. Aehnlichen Reichtum an Formen zeigen diejenigen Modelle, welche aus den Kreisschnitten zusammengesetzt sind.

Doch bei ihnen allen ist noch ein grosser Mangel vorhanden; jedes einzelne Modell vermag nur Flächen derselben Art darzustellen, wenn auch von verschiedenen Dimensionen, und man bedarf daher für jede Art eines besonderen Modells. Abgesehen von der Einseitigkeit des Systems, welche darin liegt, macht dieser Umstand die Anschaffung solcher Anschauungsmittel äusserst kostspielig. Sie zeigen jedoch schon einen grossen Fortschritt insofern als sie wenigstens die Starrheit der früheren Modelle (in Gyps, Holz etc.) aufgegeben haben und dass sie wenigstens eine Eigenschaft (Schaar der Geraden, Kreisschnitte) an allen den erzeugten Gebilden zeigen.

Es war nun mein Bestreben ein System zu finden, welches es gestattete, die Form und womöglich die Eigenschaften von möglichst vielen, zunächst ebenen Curven zu veranschaulichen.

Die Resultate sind im Folgenden mitgeteilt; doch möchte ich der speciellen Besprechung die allgemeinen Vorzüge der Methode vorausschicken.

Die Modelle, die wohl Curvographen genannt werden können, lassen sich aus einer geringen Anzahl von Elementen zusammenstellen, und zwar ohne jegliche Mühe. Die Elemente sind Doppelschienen und einfach gestaltete Verbindungsstücke; erstere entsprechen den graden Linien, letztere den Schnittpunkten derselben, oder festen Punkten auf ihnen.

Die Curven werden alle als geometrische Orte construirt, dabei aber continuirlich beschrieben.

Die Curvographen sind zunächst für Blei oder Kreide eingerichtet, doch lässt sich leicht Tinte oder Farbe statt dessen einführen, in manchen Fällen sogar Ziehfeder.

Jede geometrische aus graden Linien bestehende Figur kann mit ihnen als um feste Punkte beweglich angesehen werden und zur Darstellung von Curven benutzt werden; es wird sich nur natürlich darum handeln möglichst einfache und ergiebige Combinationen zu wählen.

Die Wahl der Doppelschienen, statt des einfachen Prismenpaares, das ja auch jede andere Bewegung als die gewünschte verhindern würde, ist geschehen, weil dadurch die Mitte zwischen den beiden Schienen die Gerade darstellt, und somit die in den Läufern angebrachten Stifte sich mit grosser Genauigkeit im Schnittpunkte zweier Geraden befinden.

Was die beschreibbaren Curven selbst anbetrifft, so ist nur für die Ellipse ein Apparat vorhanden, welcher es ermöglichte mit solcher

Allgemeinheit Ellipsen aller Dimensionen darzustellen. Es ist dies der Ellipsenzirkel, welcher nach den neueren kinematischen Bezeichnungen als oscillirende Kreuzschleifenkurbel bezeichnet werden kann.

Ausserdem hat Peaucellier in den Nouvelles Annales eine Combination seiner Elemente angegeben, welche es gestattet Cissoiden zu beschreiben; doch ist sie wie alle Peaucellier'schen Modelle ein Stabwerk, d. h. bestehend aus Stäben von bestimmter, zu berechnender Länge, welche nur drehbar aber vollkommen unverschiebbar mit einander verbunden sind. Dazu kommt, dass die Stäbe in gar keinem directen Zusammenhang mit der beschriebenen Curve stehen; dass daher aus der Construction nicht die geringste Erläuterung der Curve gezogen werden kann.

Eben in den betonten Punkten scheinen mir Vorzüge der neuen Methode zu liegen: dass erstens eine beschränkte Anzahl von Elementen, etwa 6 Schienenpaare und die dazu nötigen Verbindungsstücke, zur Zusammenstellung aller Modelle, und zur Beschreibung aller der vielen Curven genügen; zweitens dass die Construction die Entstehungsart und die Eigenschaften der Curven erläutert.

So zeigt:

I. Fig. 1. Leitlinie und erzeugenden Strahlenbüschel durch die zwei Schienen.

II. Fig. 2. Leitkreis und Strahlenbüschel.

IIIa. Fig. 3. zeigt den Zusammenhang der oscillatorischen Bewegung mit der Rotationsbewegung.

IIIb. Fig. 4. eignet sich ebenso wie I. und II. um den Begriff von Curvenschaaren und Parallelcurven zu erklären, man braucht dazu nur mehrere Stiftträger auf einmal anzubringen.

Auch der Begriff einer Umhüllungscurve lässt sich daran erklären.

IV. Fig. 5. zeigt Directrix, Durchmesser und Tangente; dazu lässt sich leicht der Radiusvector, obgleich zur Construction überflüssig, anbringen und dadurch zeigen, dass die Tangente den Winkel zwischen Durchmesser und Radiusvector halbirt; auch die Begriffe von Subtangente und leicht auch von Subnormale lassen sich erklären und zeigen.

Va. Fig. 6. lässt den Begriff einer Fusspunktcurve verdeutlichen sowohl an der Cissoide selbst wie an der grossen Anzahl anderer verwandten Curven, die sich beschreiben lassen.

VIII. Fig. 10. giebt eine Curve 4ten Grades mit Wendepunkten und einer Spitze.

VII. Fig. 9. die Lemniskate und Fusspunktcurven der Hyperbeln. Ebenso die der Ellipse.

VI. Fig. 8. die Hyperbel als geometrischen Ort. Es zeigt wie die Tangente den Winkel zwischen beiden Brennstrahlen halbirt.

IX. Fig. 11. Curven verschiedener Grade (ausgehend von einer 3ten Grades) mit Wendepunkten und Asymptoten.

Vb. Fig. 7. Cissoide und verwandte Curven nach anderer Construction.

Ausser diesen zahlreichen Beispielen von fast allen bei Curven vorkommenden Singularitäten bieten vor allen Dingen die Curvographen ein deutliches Bild von dem Einflusse der Parameter auf die Form der Curven und von dem Zusammenhang derselben nach Familien.

Ausser den beschriebenen Curven lassen sich durch oft einfachere Zusammenstellungen Curven meist transcendenter Natur erzeugen, die jedoch nur durch sehr complicirte Formeln wiederzugeben sind.

Geht man endlich zum Gebiete der synthetischen Geometrie über, so lassen sich daraus sehr viele Sätze, wie der Desargues'sche, die allgemeine Construction der Kegelschnitte aus projectivischen Strahlenbüscheln etc. durch wirklich bewegliche Figuren verdeutlichen.

Ich möchte noch bemerken, dass die beschränkte Anzahl der zulässigen Abbildungen mir die genauere Beschreibung der Constructionseinzelnheiten sowie die Verdeutlichung der erzeugten Curven unmöglich gemacht haben.

I. Conchoide.

Erzeugungsart: Wird ein Büschel von Geraden B von einer Geraden G durchschnitten und trägt man auf jeder Geraden von B vom Schnittpunkt mit G aus eine gleiche Strecke c nach beiden Seiten ab, so gehören die gewonnenen Punkte einer Conchoide an.

Zusammenstellung (siehe Fig. 1): Die Gerade G wird durch einen Doppelstab 6. 5 dargestellt, derselbe besteht aus zwei dünnen möglichst unbiegsamen Stahlstäben (am geeignetsten dazu habe ich sogenannten Bohrstahl gefunden), die durch zwei Messing-Querstücke verbunden sind. Letztere sind, wie aus der Figur ersichtlich, zweifach durchbohrt, um die Stäbchen durchzulassen, an denen sie durch

kleine Seitenschrauben befestigt sind. Unten tragen sie noch einen Dorn, vermittelst dessen sie an der Unterlage festgeheftet werden können. (Querstück mit Dorn (*a*)).

Der Büschel wird durch einen Doppelstab 1. 2. 3. 4 dargestellt. Derselbe ist durch einen mit seitlicher Hohlrinne versehenen Dorn (Form *d*) gezwungen stets durch den Punkt 1 zu gehen. In 3 ist ein Querstück befestigt, welches statt des Dornes wie 5 und 6 einen Schraubenkopf unterhalb trägt (Form *b*), welcher ihn zwingt auf $\overline{5.\,6}$ zu bleiben. In der constanten Entfernung *c* sind 2 und 4 befestigt, welche in der Mitte Bleistifteinlagen nach Art der Crayons d'artistes tragen. (Stiftträger Form *c*). Von ihnen wird die Curve beschrieben.

Verschiedene Formen: Je nach der Länge der Strecke *c*, und je nach der Lage des Büschelcentrums 1 ergeben sich vermittelst dieser Zusammenstellung sehr verschiedenartige Curven.

Ist die Entfernung *b* des Büschelcentrums von der Geraden *G* grösser als *c*, so sind der innere sowohl wie der äussere Zweig ziemlich flach.

Je mehr sich *c* der Länge *b* nähert, desto entschiedener wird die Spitze des inneren Zweiges, desto gewölbter der äussere.

Wird *c* grösser wie *b*, so bildet der innere Zweig eine Schleife.

Wird *b* sehr klein, so wird die Schleife immer grösser und zwar gewölbt an der von *G* abgewendeten Seite, flach an der zugewendeten, — ebenso wächst die Wölbung des äusseren Zweiges.

Bis schliesslich, wenn $b = 0$, d. h. wenn das Centrum auf *G* liegt, innerer und äusserer Zweig in einen Kreis übergehen.

In der Tat hat die Conchoide die Gleichung

$$x^2y^2 = (b+y)^2(c^2-y^2)$$

worin *b* und *c* die angeführten Bedeutungen haben. Wird *b* sehr klein, so wird die Formel

$$x^2y^2 = y^2(c^2-y^2)$$
$$x^2+y^2 = c^2$$

d. h. ein Kreis.

Wird *c* sehr gross, also $\frac{b}{c}$ sehr klein, so wähle man $\frac{x}{c}$ und $\frac{y}{c}$ als Coordinaten

$$\left(\frac{x}{c}\right)^2\left(\frac{y}{c}\right)^2 = \left(\frac{b+y}{c}\right)^2\left(\frac{c^2-y^2}{c^2}\right)$$

$$\xi^2\eta^2 = \left(\frac{b}{c}+y\right)^2(1-\eta^2)$$

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = c^2$$

also wiederum ein Kreis mit sehr grossem Radius c.

II. Kardioide.

Erzeugungsart: Wird die Leitgerade der Conchoide durch einen Kreis, der durch das Büschelcentrum geht, ersetzt, und wählt man $c = 2r$, so erhält man die Kardioide.

Zusammenstellung (Fig. 2): Der Büschel wird wieder durch einen Doppelstab 4. 5. 2. 3 dargestellt. Diesen zwingt wieder ein Dorn 5 (Form *d*) stets durch den einen festen Punkt zu gehen. Wiederum sind 3 und 4 Stiftträger (Form *c*). Statt aber durch die Leitgerade geleitet zu werden wird nun das feste Stück mit Schraubenkopf (Form *b*) durch einen beliebig zu stellenden Radius 6 (Form *e*) gezwungen eine Kreisbahn zu beschreiben. Dabei muss $\overline{1.\,5} = \overline{1.\,2}$ sein, d. h. 5 und 2 auf demselben Kreis liegen.

Verschiedene Formen: Ist wieder c die Strecke $\overline{2.\,3}$ resp. $\overline{2.\,4}$, so entsteht für $c = 2r$ bekanntlich eine Epicykloide.

Für $c > 2r$ wird die Spitze flacher, und flacher, und die Curve nähert sich einem Kreise um das Büschelcentrum.

Wird $c < 2r$, so geht die Spitze in eine Schleife innerhalb des Leitkreises über, und zwar wächst diese, während der aussenliegende Teil sich dem Kreise nähert, bis für sehr kleines c beide Zweige in den Leitkreis übergehen.

In der Tat ist die Gleichung der Kardioide

$$\varrho = c + 2r\cos\alpha \qquad \left.\begin{matrix}\varrho\\ \alpha\end{matrix}\right\}\ \text{Variablen}$$

Also für $c = 2r$ die eigentliche Kardioide:

$$\varrho = 2r(1 + \cos\alpha)$$

Für $c < r$ eine Curve mit der Schleife und zwar für sehr kleines c der Kreis

$$\varrho = 2r\cos\alpha$$

d. h. der Leitkreis.

Für $c > r$ die verflachte Curve und zwar je grösser c, d. h. je kleiner $\frac{r}{c}$, desto mehr sich dem Kreise um das Büschelcentrum

$$\varrho = 2c$$

nähernd.

III. Ellipse.

I. Erzeugungsart (Fig. 3): Eine Gerade dreht sich um einen ihrer Punkte. Durch einen bestimmten Punkt derselben geht stets eine Verticale, durch einen anderen eine Horizontale. Der Schnittpunkt dieser beiden beschreibt eine Ellipse.

Zusammenstellung: Die sich drehende Gerade wird am besten durch einen flachen Holzstreifen dargestellt. Derselbe trägt durch Querstücke mit Dorn (Form *a*) die Doppelstäbe $\overline{2.\ 5}$.

Von denselben wird einer horizontal, einer vertical geführt durch die Parallelogramme 4 4″5″2″ und 4 4′5′2′. Der Stiftträger gleitet am besten auf dem horizontalen und wird geführt durch den verticalen Doppelstab.

II. Erzeugungsart (Fig. 4): Eine Strecke $\underline{a}$ bewegt sich mit ihren Endpunkten auf den Coordinatenaxen, jeder Punkt der Strecke beschreibt eine Ellipse.

Zusammenstellung: Die Coordinatenaxen sind festgeheftete Doppelstäbe. Die Strecke $\underline{a}$ wird durch zwei festgeschraubte Querstücke 1. 3 auf einem Doppelstabe abgegrenzt. Dieselben haben Schraubenköpfe (Form *b*), welche nur ein Gleiten längs der Coordinaten gestatten. Der beschreibende Punkt ist durch einen Stiftträger 2, welcher durch Seitenschrauben festgehalten wird, dargestellt.

Verschiedene Formen: Ist $\underline{b}$ die Strecke auf *a* vom beschreibenden Punkte bis zur *Y* Axe, so ist die Gleichung der beschriebenen Ellipsen

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1$$

Fällt der Punkt ausserhalb von *a* über die *Y* Axe hinaus, so wird die Gleichung

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{(a+b)^2} = 1$$

Die Punkte der Strecke $\underline{a}$ geben Ellipsen, die vom mittleren Fall $b = \frac{a}{2}$, welcher einen Kreis darstellt, sich nach der *X* Axe resp. *Y* Axe hin immer mehr verflachen bis zu einer Strecke $2a$ in denselben. Diese alle werden von der Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

umhüllt.

Die Punkte auf der Verlängerung der Strecke $\underline{a}$ geben Schaaren

von Ellipsen, deren flachste wieder die beiden Strecken $2a$ auf X resp. Y Axe sind.

Uebrigens beschreibt jeder mit $\underline{a}$ fest verbundene Punkt eine Ellipse um den Coordinatenanfangspunkt; in dem Falle, dass der Punkt Scheitel eines rechtwinkligen Dreiecks über a als Hypotenuse ist, entsteht eine durch den Coordinatenanfangspunkt gehende gerade Linie.

IV. Parabel. (Fig. 5.)

Erzeugungsart: Ein Punkt P bewegt sich so, dass seine Entfernung vom Brennpunkt und von der Leitlinie stets gleich ist. Um dies zu erreichen wird um den Brennpunkt eine Gerade gedreht; da wo sie die Leitgerade trifft. wird ein Lot auf letztere errichtet, ein zweites Lot wird in der jedesmaligen Mitte der Strecke zwischen Brennpunkt und Leitlinie errichtet. Der Durchschnitt beider Lote giebt Punkte der Parabel.

Zusammenstellung: Ein Doppelstab $\overline{1.\ 2.\ 3}$ dreht sich um das Dornstück 1 (Form a). Die beiden Verticalen sind die Leitlinie und die Scheiteltangente.

In 2 und 3 befinden sich doppelte Querstücke (Form f), die aus zwei Querstücken (Form b) bestehen, welche senkrecht auf einander durch eine Schraube befestigt sind, welche unten einen Schraubenkopf (wie Form b), oben eine Mutter besitzt.

Das eine bei 3 trägt $\overline{3.\ 4}$ fest, während es sich auf der Leitlinie bewegen kann. Das zweite bei 2 trägt $\overline{2.\ 4}$ fest und gleitet auf $\overline{1.\ 2.\ 3}$.

Ersteres wird durch $\overline{1.\ 2.\ 3}$ geleitet, letzteres durch die Scheiteltangente.

In 4 befindet sich der Stiftträger, welcher auf dem Durchmesser $\overline{3.\ 4}$ gleitet und durch die Tangente $\overline{2.\ 4}$ geleitet wird.

Verschiedene Formen: Nimmt man die Scheiteltangente nicht in der halben Entfernung zwischen Brennpunkt und Directrix, so ergeben sich Curven von der Form

$$y^2 = \frac{(q+p)^2}{q} x$$

worin p die Entfernung Brennpunkt bis Scheitel ist, q die Entfernung Scheitel bis Directrix.

V. Cissoide. (Fig. 6.)

I. Erzeugungsart: Die Cissoide ist bekanntlich die Fusspunktcurve der Parabel, wenn man den Scheitelpunkt zum Pol nimmt.

Nun wäre es aber zu umständlich und complicirt, zugleich Parabel, ihre Tangenten und die Fusspunkte zu construiren. Man kommt leichter zum Ziel, wenn man bedenkt, dass wenn der Brennpunkt Pol ist, die Fusspunktcurve durch die Scheiteltangente dargestellt wird. Diese Eigenschaft gestattet nämlich die Tangenten einer Parabel zu zeichnen ohne die Parabel selbst zu haben, und nun braucht man nur noch vom Scheitel aus Lote auf jene Tangenten zu fällen.

Zusammenstellung: Die Verticale ist die Scheiteltangente. 1 der Scheitel, 1′ der Brennpunkt der Parabel. $\overline{1.\ 4}$ und $\overline{1'.\ 3}$ werden durch die Stücke 1″ und 2 parallel geführt. $\overline{1'.\ 3}$ trägt in 3 die Tangente durch das Doppelstück 3 (Form *f*), welches auf $\overline{1'.\ 3}$ verschiebbar ist und durch die Scheiteltangente geleitet wird. $\overline{1.\ 4}$ ist also Lot vom Scheitel auf die Tangente, so dass 4 (Stiftträger Form *c*) die Cissoide beschreibt.

Verschiedene Formen: Die Gleichung der eigentlichen Cissoide ist, wenn p die Brennseite der Parabel:

$$x^3 + y^2(p + x) = 0$$

Die Curve besitzt im Scheitel eine Spitze. Wählt man einen anderen Punkt der Abscissenaxe als Pol, so wird die Curve wesentlich anders.

Sei p die Brennweite; m die Polweite von der Scheiteltangente (Y Axe) aus.

Für grosses positives m liegt die Curve ganz auf der Seite des Brennpunktes (positive) und zeigt keine Singularitäten.

Bei $m = p$ geht sie in die Y Axe über.

Wird $m < p$, so bildet die Curve eine Spitze im Scheitel und nähert sich der Cissoide.

Für $m = 0$ erreicht sie diese.

Unmittelbar danach bildet sie eine Schleife, die mit zunehmenden negativen m wächst.

Wählt man einen Punkt der Y Axe $y = n$ als Pol, so hat die Curve ausser für $n = 0$ eine Schleife, die vom übrigen Teil durch die Y Axe getrennt wird.

Liegt der Pol beliebig, so hat die Curve, wenn jener **negative** Abscisse hat, eine Schleife, sonst einen Umkehrpunkt.

II. Erzeugungsart (Fig. 7): Bewegt sich der Endpunkt des gleich $\underline{c}$ gemachten Schenkels eines rechten Winkels auf einer Geraden G, während der zweite Schenkel durch einen festen Punkt geht, welcher von G um c entfernt ist, so beschreibt der Halbirungspunkt des ersten Schenkels eine Cissoide.

Zusammenstellung: Die Ausführung ist sehr einfach. Die Horizontale ist die Leitlinie. 1. 2. 4 ist der rechte Winkel, gebildet aus zwei Doppelstäben und einem Doppelquerstück (Form f). In 4 befindet sich ein festes Querstück (Form b), das durch die Leitlinie geführt wird. Ein Dorn $\underline{1}$ zwingt den zweiten Schenkel stets durch denselben Punkt zu gehen. Ein Stiftträger 3 beschreibt die Cissoide.

Verschiedene Formen: Auch hier lassen sich durch andere Wahl der Lage von 3, durch andere Stellung von 1 oder gar durch Wahl eines anderen als eines rechten Winkels (was ja das Doppelstück gestattet) die verschiedensten Formen erhalten.

VI. Hyperbel. (Fig. 8.)

Erzeugungsart: Die Hyperbel ist bekanntlich der Ort der die Punkte P, für welche die Differenz der Entfernung von zwei festen Punkten ($F_1 F_2$ Brennpunkte) stets constant ($2a$ reelle Axe) ist.

Beschreibt man also um einen Brennpunkt F_1 einen Kreis mit Radius $2a$ und zieht PF_1, PF_2, so muss, wenn B der Schnittpunkt von PF_1 mit dem Kreis ist, $PB = PF_2$ sein, d. h. BPF ein gleichschenkliges Dreieck.

Um dies hervorzubringen benutzt man die Eigenschaft der Tangente den Winkel zu halbiren, den beide Radienvectoren einschliessen. Man erhält ja alle Tangenten an einer Hyperbel, wenn man einen rechten Winkel zwingt mit dem Scheitel den Kreis mit Radius a um den Mittelpunkt der Hyperbel zu beschreiben, während ein Schenkel stets durch F geht, der zweite Schenkel giebt dann die Tangenten.

Der Punkt, wo sich die Tangente und der entsprechende Radiusvector schneiden, ist Punkt der Hyperbel.

Zusammenstellung: Der Mittelpunkt der Hyperbel ist 3'. Der Leitkreis wird durch den Holzstreifen 1 beschrieben, der den Scheitel des rechten Winkels 3. 6. 7 trägt. Ein Schenkel dieses letzteren geht stets durch den Brennpunkt 3, der andere stellt die Tangenten

dar und lenkt den Stiftträger 7, der die Hyperbel beschreibt. Der Träger gleitet auf dem Radiusvector $\overline{4.\ 5.\ 7}$, welcher durch die Parallelführung 5. 4. 3. 3′ stets zu 1 parallel gehalten wird.

VII. Lemniskate. (Fig. 9.)

Erzeugungsart: Die Lemniskate kann als Fusspunktcurve der gleichseitigen Hyperbel angesehen werden, wenn der Mittelpunkt als Pol genommen wird.

Wie bei der Cissoide, so braucht man auch hier nur die Tangenten der Hyperbel zu haben. Man erhält dieselben, wenn der Scheitel eines rechten Winkels sich auf dem Leitkreis bewegt, während ein Schenkel durch den Brennpunkt F geht; der zweite Schenkel stellt dann die jedesmalige Tangente dar.

Fällt man nun darauf vom Mittelpunkt M des Leitkreises Lote, so gehören die Fusspunkte der Lemniskate an.

Zusammenstellung: Der Radius 4 beschreibt den Leitkreis und führt das Doppelquerstück 3 (Form f), welches Scheitel des rechten Winkels ist. Von letzterem geht ein Schenkel stets durch den Brennpunkt 5, der andere Schenkel trägt gleitend den Stiftträger 6, welcher durch das Lot $\overline{1.\ 2}$ geleitet wird. Das Lot $\overline{1.\ 2}$ wird durch die, parallele Führung 1. 3. 2′. 2 stets $\overline{3.\ 5}$ parallel gehalten.

Verschiedene Formen: Die Lemniskate erhält man für $MF = a\sqrt{2}$ wo a der Radius des Leitkreises ist. Ihre Gleichung ist

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

Wird MF kleiner, so nähern sich die Wendetangenten der Y Axe. Die Curve ist dann Fusspunktcurve einer beliebigen Hyperbel und hat die allgemeinere Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 = ax^2-by^2$$

wo a und b die Axen der Hyperbel sind.

Wird $MF = a$, d. h. liegt F auf dem Leitkreis, dann fallen die Wendetangenten zusammen und die Curve geht in zwei Kreise über

$$x^2+y^2 = \pm ax$$

Wird endlich $MF < a$, so ist die Curve Fusspunktcurve einer Ellipse mit den Axen a und b und hat die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 = ax^2+by^2$$

Sie hat keinen Doppelpunkt mehr, sondern die Form einer an der kleinen Axe eingedrückten Ellipse.

Für $a = b$ geht sie in den Kreis über.

Fusspunktcurven der Hyperbel im Allgemeinen. Man erhält sie, wenn man statt des Mittelpunktes beliebige Punkte als Pole wählt.

Ihre allgemeine Gleichung ist:

$$[x(x-m)+y(y-n)]^2 = a^2(x-m) - b^2(x-n)$$

Man kann den Pol auf der X Axe, auf der Y Axe, auf dem Leitkreise ($m^2+n^2 = a^2$) und endlich ganz beliebig wählen.

In allen diesen Fällen hat die entstehende Curve Schleifenform solange die Abscisse des Pols kleiner als $\underline{a}$. Und zwar liegt der Doppelpunkt im Pol.

Liegt die Abscisse des Pols zwischen a und der Brennweite, so hat die Curve eine Spitze.

Liegt P auf der Abscissenaxe und ist die Polweite gleich der Brennweite, so entsteht der Kreis.

Ist die Abscisse grösser als die Brennweite, so entsteht eine Curve von Kardioidischer Gestalt ohne Doppelpunkte und mit zwei Wendepunkten.

VIII. Die Curve $a^2y^2 = (a+x)^3(a-x)$. (Fig. 10.)

Erzeugungsart: Ein rechter Winkel bewegt sich mit dem Scheitel auf einem Kreise, während seine Schenkel den Coordinatenaxen parallel bleiben. Die Schnittpunkte des horizontalen Schenkels mit der Y Axe werden mit einem Endpunkt des horizontalen Durchmessers des Kreises verbunden. Diese Verbindungsgerade trifft den verticalen Schenkel des rechten Winkels im Punkte der Curve.

Zusammenstellung: Der Scheitel des rechten Winkels ist 5.

Der verticale Schenkel $\overline{7.\ 5}$ wird durch die Parallelführung 3. 5. 1′. 1 der Leitgerade $\overline{6.\ 3}$ parallel gehalten.

Der horizontale $\overline{5.\ 6}$ hebt das Stück 6, welches mit zwei Schraubenköpfen versehen ist und auf der Leitlinie gleitet. Dieses wiederum hebt die $\overline{2.\ 6}$, welche den Stiftträger 7 leitet, welcher auf $\overline{5.\ 7}$ gleitet.

Verschiedene Formen: Die Curve hat eine Blattform mit einer Spitze im Pol.

Wählt man irgend einen anderen Punkt als den Durchschnitt der X Axe mit dem Leitkreise zum Pol, so bildet die Curve eine Schleife.

IX. Die Curve $xy^2 = 4a^2(2a - x)$. (Fig. 11.)

Erzeugungsart: Zieht man im Endpunkt eines horizontalen Durchmessers eines Kreises die Tangente und durch den gegenüberliegenden Sehnen; fällt auf den Schnittpunkten der Sehnen mit dem Kreise Senkrechte, und legt durch die Schnittpunkte der Sehnen mit der festen Tangente Horizontale, so schneiden die letztgenannten jene Senkrechten in Punkten der Curve.

Zusammenstellung: Die Sehnen werden durch $\overline{4.\,5.\,6}$ dargestellt. Das Doppelstück 6 gleitet auf der Tangente gelenkt von der Sehne und trägt die horizontale $\overline{6.\,7}$. Letztere lenkt den Stiftträger 7, welcher auf $\overline{7.\,5}$ gleitet. Der Radius 2 führt 5. Die Parallelführung 3. 3'. 4'. 5 hält $\overline{5.\,7}$ vertical. Die Curve wird von 7 beschrieben.

Verschiedene Formen: Die Curve hat zwei Zweige, welche von der Tangente im Pol asymptotisch berührt werden. Beide haben für $x = \frac{4}{3}a$ (a Radius des Leitkreises) einen Wendepunkt.

Auch hier kann durch andere Wahl des Poles eine grosse Mannigfaltigkeit von Curven erhalten werden.

Liegt zunächst der Pol ausserhalb des Kreises und zwar mit einer Abscisse $> a$, so ist die Curve symmetrisch und geschlossen und zwar blattartig.

Ist die Abscisse $< a$, so berührt die Curve stets zweimal asymptotisch die Verticale durch den Pol.

Und zwar hat, wenn der Pol auf dem Kreise liegt, die Curve nur einen Zweig; wenn er innerhalb des Kreises liegt, zwei Zweige, die den Pol umfassen; wenn er ausserhalb des Kreises liegt (aber mit Abscisse $< a$), zwei getrennte Zweige, einen oberhalb, einen unterhalb des Pols.

VII.

Zur elementar-geometrischen Kegelschnittslehre.

Von

Herrn **Karl Lauermann,**

Lehrer an der Bürgerschule in Grulich, Böhmen.

Es gibt eine grosse Anzahl einheitlicher Constructionen der Linien zweiter Ordnung.

Ich erlaube mir, im Nachfolgenden auf eine neue Constructionsmethode hinzuweisen, welche in einfacher und eleganter Art die Lösung der den Kegelschnitt betreffenden Aufgaben ermöglicht.

Bewegt sich eine Gerade G (Fig. 1.) parallel zu einer gegebenen Richtung L, während sie stets zwei feste Gerade G_1, G_2 schneidet, dann beschreiben die Punkte m_1, m_2 auf ihr, deren Entfernungen von einem festen Punkte F gleich sind dem von G_1, G_2 auf G begrenzten Stücke ab, einen Kegelschnitt [1]).

Der elementare Beweis dieses Satzes lässt sich leicht erbringen, wenn die Eigenschaft der Linien zweiter Ordnung als bekannt vorausgesetzt wird, dass das Verhältniss der Entfernungen jedes ihrer Punkte von einem festen Punkte und einer festen Geraden (Brennpunkt und Leitlinie) eine constante Grösse ist.

---

1) Herr Gustav Rebiček, Physiker und Mechaniker in Prag, hat mit Zugrundelegung dieser ihm von mir mitgeteilten Construction in sinnreicher Weise einen Konographen hergestellt.

Errichten wir nämlich von dem Schnittpunkte o des Geradenpaares G_1, G_2 aus die zu L senkrechte Gerade ov, welche G in c schneidet, und bezeichnen wir ferner mit α, β die Winkel, die ov mit G_1, beziehungsweise G_2 einschliesst, so ist

$$m_1F = ab = ac - bc = oc(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = m_1d(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta),$$

oder

$$m_1F : m_1d = \varepsilon,$$

sonach der vorliegende geometrische Ort ein Kegelschnitt mit dem Brennpunkte F, der Leitlinie L und der Excentricität

$$\varepsilon = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta.$$

Offenbar ist es gleichbedeutend, ob wir zur Construction eines bestimmten Kegelschnittes das Geradenpaar G_1, G_2 oder ein anderes, irgendwo in der Ebene gelegenes, benutzen, wenn dieses nur für jeden Zeitpunkt der Bewegung der Geraden G auf derselben ein gleiches Stück abschneidet wie das ursprüngliche.

Diese Tatsache, welche aus dem Wesen unserer Construction unmittelbar hervorgeht, leitet zu der interessanten Erkenntniss, dass überhaupt jede beliebige Gerade der Ebene als Constructionsgerade angesehen werden kann, und dass sich in folgender Weise die ihr entsprechende zweite Gerade finden lässt.

Wir bringen (Fig. 2.) die beliebig angenommene Gerade H_1 mit G_1 — es könnte natürlich ebenso gut auch G_2 sein — und L in den Punkten p und o_1 zum Schnitte.

Wenn wir nun von p die Parallele zu L ziehen und den Schnittpunkt q derselben mit G_2 durch die Gerade H_2 mit o_1 verbinden, so lässt sich zeigen, dass H_2 die gesuchte zweite Constructionsgerade ist.

Denn aus den ähnlichen Dreiecken oab, opq; $o_1a_1b_1$, o_1pq folgen für ab, beziehungsweise a_1b_1 die Werte:

$$ab = oa : op \,.\, pq,$$

$$a_1b_1 = o_1a_1 : o_1p \,.\, pq;$$

und weil nach den Dreiecken poo_1, paa_1 die Proportion

$$ba : op = o_1a_1 : o_1p$$

besteht, muss

$$ab = a_1b_1$$

sein, womit, da es sich hier eben nur um die Gleichheit dieser Strecken handelt, der Beweis hergestellt erscheint.

Wenn wir nun, diesem Vorgange entsprechend, die Hauptaxe xx_1 des Kegelschnittes — welche bekanntlich durch F geht und auf L senkrecht steht — als eine Constructionsgerade ansehen, so gewinnen wir in der ihr entsprechenden zweiten Geraden T die in der Brennpunktsordinate berührende Tangente; und in der Tangente des von derselben mit xx_1 eingeschlossenen Winkels γ die numerische Excentricität ε des Kegelschnittes, deren Wert — wie ja bekannt ist — den Charakter des Kegelschnittes bestimmt.

Im Nachfolgenden verwenden wir die vorgeführte Erzeugungsart der Linien zweiter Ordnung zur Lösung einiger Aufgaben, wobei wir stets von der Annahme ausgehen werden, dass der Kegelschnitt durch das Geradenpaar G_1, G_2, die Leitlinie L und den Brennpunkt F gegeben sei.

1. Es sind die gemeinschaftlichen Punkte der Geraden M_1 (Fig. 3.) mit dem Kegelschnitte zu bestimmen.

Zu diesem Ende betrachten wir M_1 als Constructionsgerade und bestimmen uns in der angegebenen Weise zu derselben die entsprechende Gerade M_2.

Die vorliegende Aufgabe gewinnt unter diesem Gesichtspunkte folgende Fassung:

Es sind die auf M_1 gelegenen Spitzen solcher gleichschenkligen Dreiecke zu finden, deren eine Basisecke in F, die andere aber auf M_2 liegt, jedoch so, dass die von M_1, M_2 begrenzten Seiten dieser Dreiecke parallel zu L werden.

Denken wir uns o_1 — den Schnittpunkt von M_1 mit L — mit F durch die Gerade M_3 verbunden und von p als Mittelpunkt mit dem Halbmesser pq den Kreis K beschrieben, welcher M_2 in r_1 und r_2 schneidet, so befinden sich ohne Zweifel die gleichschenkligen Dreiecke pqr_1 und pqr_2 mit jenen, deren wir zur Lösung unserer Aufgabe bedürfen, in ähnlicher Lage, d. h. die homologen Seiten laufen zu einander parallel.

Ziehen wir also von F aus zu pr_1 und pr_2 die Parallelen, bis dieselben M_1 in s_1 und s_2 schneiden, so werden diese Schnittpunkte die Spitzen der gesuchten Dreiecke, somit auch die Schnittpunkte von M_1 mit dem Kegelschnitte sein.

Besonders einfach gestaltet sich die Construction der Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der Hauptaxe xx_1.

In diesem Falle haben wir (Fig. 2.) die durch F gehenden und zu xx_1 um 45^0 geneigten Geraden zu bestimmen und die Schnittpunkte $\alpha_1\beta_1$ derselben mit T auf xx_1 in α, β zu projiciren.

Fällt s_1 mit s_2 zusammen, d. h. ist M_1 eine Tangente des Kegelschnittes, dann rücken auch r_1 und r_2 unendlich nahe an einander und es berührt der Kreis K die Gerade M_3.

Aus dieser Ueberlegung folgen unmittelbar die Sätze:

a) Die Geraden, welche von dem Berührungspunkte einer Tangente und ihrem Schnittpunkte mit der Leitlinie zu dem Brennpunkte gezogen werden können, stehen auf einander senkrecht.

b) Jeder Punkt einer Kegelschnittstangente hat von der, ihren Schnittpunkt mit der Leitlinie und den Brennpunkt verbindenden Geraden eine Entfernung, welche der Strecke gleichkommt, die auf der erzeugenden Geraden für die Lage dieses Punktes von zwei Constructionsgeraden begrenzt wird.

2. Im Punkte m_2 (Fig. 1.) des Kegelschnittes ist die Tangente zu construiren.

Wir verbinden, indem wir den Satz *a* in Anwendung bringen, m_2 mit F und errichten im letzteren Punkte auf m_2F die Senkrechte, welche L in k schneidet; kmn ist die gesuchte Tangente.

Von dem Punkte P ausserhalb des Kegelschnittes (Fig. 4.) an diesen die Tangenten zu legen.

Mit Rücksicht auf den Satz b) handelt es sich hier um die Bestimmung zweier in F convergirenden Geraden T_1', T_2', von welchen P ihre Entfernung mm_1 gleich der Strecke hat, welche auf G für die Lage des Punktes P von G_1, G_2 gebildet wird. Das sind aber offenbar die Tangenten eines Kreises mit dem Mittelpunkte P und dem Halbmesser mm_1.

Denken wir uns also diese Tangenten bestimmt und ihre Schnittpunkte a_2, b_2 mit L durch die Geraden T_1, T_2 mit P verbunden, so sind schon T_1, T_2 die verlangten Tangenten.

Die Sätze *a* und *b* führen auch zu einer einheitlichen Lösung des Normalenproblems bei den Kegelschnitten mit Zuhilfenahme eines Kreises.

Grulich, August 1883.

VIII.

Eigenschaften der Punkte mit reciproken Dreieckscoordinaten und deren Anwendung auf das Dreieck.

Von

Max Greiner.

Verschafft man sich zu einem durch die Dreieckscoordinaten α, β, γ bestimmten Punkte p denjenigen Punkt p', der die reciproken Coordinaten $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ besitzt, so entspricht durch diese Anordnung jedem Punkte p der Ebene des Dreiecks, der nicht auf einer Seite desselben liegt, ein und nur ein Punkt p'.

Sind nun die Seiten des Fundamentaldreiecks durch die Gleichungen:

$$A \equiv x\cos\varepsilon_1 + y\sin\varepsilon_1 - \delta_1 = 0$$
$$B \equiv x\cos\varepsilon_2 + y\sin\varepsilon_2 - \delta_2 = 0$$
$$C \equiv x\cos\varepsilon_3 + y\sin\varepsilon_3 - \delta_3 = 0$$

gegeben, so haben die Verbindungslinien der Punkte p und p' mit der Ecke a des Dreiecks, worin die Seiten B und C zusammenstossen, die Gleichungen:

$$ap \equiv B\gamma - C\beta = 0 \qquad ap' \equiv B\beta - C\gamma = 0$$

welche dadurch auf die Normalform gebracht werden, dass man sie mit den Ausdrücken:

$$\sqrt{(\gamma\cos\varepsilon_2-\beta\cos\varepsilon_3)^2+(\gamma\sin\varepsilon_2-\beta\sin\varepsilon_3)^2}$$

und

$$\sqrt{(\beta\cos\varepsilon_2-\gamma\cos\varepsilon_3)^2+(\beta\sin\varepsilon_2-\gamma\sin\varepsilon_3)^2}$$

dividirt; da aber beide Ausdrücke einander gleich sind, so hat man für die Geraden, welche die Winkel der beiden Verbindungslinien ap und ap' halbiren, die Gleichungen:

$$(B\gamma-C\beta)+(B\beta-C\gamma)=0$$

und

$$(B\gamma-C\beta)-(B\beta-C\gamma)=0$$

oder:

$$B-C=0$$

und

$$B+C=0$$

woraus sich ergibt, dass die Ecktransversalen ap und ap' mit den Seiten B und C gleiche Winkel einschliessen. Da aber jedem Punkte p nur ein Punkt p' entspricht, so folgt:

„Werden von den Ecken eines Dreiecks aus Transversalen durch „einen beliebigen Punkt $p\equiv\alpha,\ \beta,\ \gamma$ gezogen, so schneiden sich auch „diejenigen Transversalen, welche von denselben Ecken und unter „derselben Neigung gegen die entsprechenden Winkelhalbirenden des „Dreiecks gezogen werden, in einem und demselben Punkte $p'\equiv\frac{1}{\alpha}$, „$\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, dessen Coordinaten reciprok sind zu denjenigen des gegebenen „Punktes p." . . . . (1)

Sind p_2 und p_3, p_2' und p_3' die Fusspunkte der von den Punkten p und p' auf die Seiten B und C gefällten Lote, so ist im Kreisviereck pp_2ap_3 der Winkel $pap_3=pp_2p_3$; da aber nach (1) Wkl. $pap_3=p'ap_2'$ und pp_2 senkrecht auf ap_2' steht, so ist auch p_2p_3 senkrecht auf ap'; weshalb folgt:

„Fällt man von einem Punkte p Lote auf die Seiten eines Drei„ecks und verbindet die Fusspunkte derselben, so schneiden sich die „von den Ecken des Dreiecks auf die entsprechenden Seiten des „Fusspunktdreiecks gefällten Senkrechten in einem und demselben „Punkte p', dessen Coordinaten reciprok sind zu denjenigen des „Punktes p." . . . . (2)

Denkt man sich durch die Fusspunkte p_1, p_2, p_3 der vom Punkte p auf die Dreiecksseiten gefällten Lote einen Kreis gelegt, welcher die Seiten noch in den Punkten p_1', p_2', p_3' trifft, und errichtet in p_2' und p_3' Lote auf den Seiten B und C, die sich in p' schneiden, so folgt aus dem Kreisviereck $p_3p_3'p_2p_2'$, dass Wkl. $p_3'p_3p_2=p_3'p_2'p_2$

und daher auch Wkl. $pp_3p_2 = p'p_2'p_3'$; in dem Kreisviereck $p'p_2'ap_3'$ ist aber Wkl. $p'p_2'p_3' = p'ap_3'$, und weil ferner pp_3 senkrecht auf ap_3 steht, so sind auch ap' und p_3p_3' zu einander senkrecht. In gleicher Weise ergibt sich, dass die in p_1' und p_2' auf den Seiten A und B errichteten Lote sich in einem Punkte schneiden, welcher der Senkrechten angehört, die von c auf $p_1'p_2'$ gefällt werden kann; somit folgt nach (2):

„Fällt man von einem beliebigen Punkte p Lote auf die Seiten „des Dreiecks und legt durch die so erhaltenen Fusspunkte einen „Kreis, so trifft derselbe die Dreiecksseiten in noch drei Punkten, „welche die Fusspunkte der Seitennormalen desjenigen Punktes p' sind, „dessen Coordinaten reciprok sind zu denjenigen des Punktes p“ (3)

Die Halbirungsperpendikel der Strecken p_1p_1', p_2p_2', p_3p_3' enthalten die Mitte der Verbindungslinie von p und p' und treffen sich überdies im Mittelpunkte des genannten Kreises; weshalb sich ergibt:

„Die Fusspunkte der Seitennormalen zweier Punkte mit reci- „proken Coordinaten liegen stets auf einem Kreise, dessen Centrum „in der Mitte der Verbindungsstrecke der beiden Punkte liegt.“ (4)

Da in den folgenden Untersuchungen die Kenntnis der Coordinaten einiger Symmetriepunkte des Dreiecks erforderlich ist, so erscheint es zweckmässig zunächst hievon Erwähnung zu tun.

Sind s_1, s_2, s_3 die Längen der Seiten A, B, C des Fundementaldreiecks, so ergeben sich für den Schwerpunkt S dieses Dreiecks, dessen Abstände von den Dreiecksseiten sich wie die Höhen oder wie die reciproken Werte der Seiten des Dreiecks verhalten, die Coordinaten:

$$S \equiv \frac{1}{s_1}, \ \frac{1}{s_2}, \ \frac{1}{s_3} \equiv s_2s_3, \ s_1s_3, \ s_1s_2 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Die dem Schwerpunkte S entsprechende Harmonikale oder Dreieckspolare bezüglich ABC ist die unendlich ferne Gerade, deren Gleichung somit ist:

$$As_1 + Bs_2 + Cs_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Errichtet man über den Seiten des Dreiecks Quadrate und verlängert die den Dreiecksseiten parallelen Quadratseiten bis sie sich durchschneiden, so entsteht ein Dreieck, das ähnlich und ähnlichliegend mit dem gegebenen Dreieck ist. Der Aehnlikhkeitspunkt beider Dreiecke wird der Grebe'sche Punkt G genannt. Sind nun d_1, d_2, d_3 die Abstände desselben von den Dreiecksseiten A, B, C, so sind seine Abstände von den Seiten des mit ABC ähnlichen Dreiecks beziehungsweise d_1+s_1, d_2+s_2, d_3+s_3 und es verhält sich;

$$d_1:(d_1+s_1) = d_2:(d_2+s_2) = d_3:(d_3+s_3)$$

und daher auch:

$$d_1:d_2:d_3 = s_1:s_2:s_3 \quad .$$

somit:

$$G \equiv s_1, \quad s_2, \quad s_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Die dem Punkte G entsprechende konische Polare des Dreiecks hat daher die Gleichung:

$$BCs_1 + ACs_2 + ABs_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

wodurch, wie leicht zu erkennen ist, der dem Dreieck umschriebene Kreis dargestellt wird. Die den Punkten des Umkreises entsprechenden Harmonikalen gehen daher durch den Grebe'schen Punkt.

Der Mittelpunkt M des Umkreises hat von den Seiten des Dreiecks die Abstände $R\cos w_1$, $R\cos w_2$, $R\cos w_3$, wenn mit R der Radius des Umkreises und mit w_1, w_2, w_3 die Winkel des Fundamentaldreiecks bezeichnet werden; drückt man die Cosinus dieser Winkel durch die Seiten des Fundamentaldreiecks aus, so findet man für das Umkreiscentrum M die Coordinaten:

$$M \equiv s_1(-s_1^2+s_2^2+s_3^2); \quad s_2(s_1^2-s_2^2+s_3^2); \quad s_3(s_1^2+s_2^2-s_3^2) \;.\; (9)$$

Aus den Gleichungen der Höhen des Dreiecks:

$$B\cos w_2 - C\cos w_3 = 0 \quad C\cos w_3 - A\cos w_1 = 0 \quad A\cos w_1 - B\cos w_2 = 0$$

erhält man für den Höhenschnittpunkt H die Coordinaten:

$$H \equiv \frac{1}{s_1(-s_1^2+s_2^2+s_3^2)}, \quad \frac{1}{s_2(s_1^2-s_2^2+s_3^2)}, \quad \frac{1}{s_3(s_1^2+s_2^2-s_3^2)} \quad (10)$$

Der Mittelpunkt J des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises und die Mittelpunkte J_1, J_2, J_3 der anbeschriebenen Kreise haben von den Dreiecksseiten je drei gleiche Abstände, weshalb man hat:

$$J \equiv 1, 1, 1 \quad J_1 \equiv -1, 1, 1 \quad J_2 \equiv 1, -1, 1 \quad J_3 \equiv 1, 1, -1 \quad . \; 11)$$

Die dem Inkreiscentrum J entsprechende konische Polare des Dreiecks hat die Gleichung:

$$BC + AC + AB = 0$$

Betrachtet man nun den Mittelpunkt Q dieses Kegelschnitts als den Pol der unendlich fernen Geraden $(As_1 + Bs_2 + Cs_3 = 0)$ bezüglich dieses Kegelschnittes, so ergeben sich für jenen Punkt Q die Coordinaten:

$$Q \equiv -s_1+s_2+s_3, \quad s_1-s_2+s_3, \quad s_1+s_2-s_3 \quad . \; . \; (12)$$

Dieser Punkt Q lässt sich auch auf folgende Weise construiren:

Man verbindet die Mitten der Dreiecksseiten mit den Mittelpunkten J_1, J_2, J_3 der entsprechenden Ankreise des Dreiecks, so treffen sich diese Verbindungslinien im Punkte Q; denn die Mitten m_1, m_2, m_3 der Dreiecksseiten haben die Coordinaten:

$$m_1 \equiv 0,\ s_3,\ s_2;\quad m_2 \equiv s_3,\ 0,\ s_1;\quad m_3 \equiv s_2,\ s_1,\ 0$$

und die Verbindungslinien m_1J_1, m_2J_2, m_3J_3 besitzen daher die Gleichungen:

$$m_1J_1 \equiv A(s_2 - s_3) + Bs_2 - Cs_3 = 0;$$
$$m_2J_2 \equiv -As_1 + B(s_3 - s_1) + Cs_3 = 0;$$
$$m_3J_3 \equiv As_1 - Bs_2 + C(s_1 - s_2) = 0$$

durch deren Auflösung sich ebenfalls die Coordinaten von Q ergeben.

Setzt man der Kürze halber:

$$-s_1 + s_2 + s_3 = u_1;\quad s_1 - s_2 + s_3 = u_2;\quad s_1 + s_2 - s_3 = u_3$$

so hat der Berührungspunkt des Inkreises mit der Dreiecksseite A von den Endpunkten dieser Seite die Entfernungen $\frac{1}{2}u_2$ und $\frac{1}{2}u_3$, während derselbe von den Dreiecksseiten A, B, C beziehungsweise die Abstände:

$$0,\quad \tfrac{1}{2}u_3 \sin w_3,\quad \tfrac{1}{2}u_2 \sin w_2$$

besitzt; es sind daher die Coordinaten dieses Berührungspunktes:

$$0,\quad u_3s_3,\quad u_2s_2$$

und in gleicher Weise findet man für die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten B und C die Coordinaten:

$$u_3s_3,\ 0,\ u_1s_1 \qquad \text{und} \qquad u_2s_2\ \ u_1s_1,\ 0.$$

Die Verbindungslinien dieser Punkte mit den entsprechenden Mittelpunkten J_1, J_2, J_3 der Ankreise haben aber die Gleichungen:

$$A(s_2u_2 - s_3u_3) + Bs_2u_2 - Cs_3u_3 = 0$$
$$-As_1u_1 + B(s_3u_3 - s_1u_1) + Cs_3u_3 = 0$$
$$As_1u_1 - Bs_2u_2 + C(s_1u_1 - s_2u_2) = 0$$

Das Verschwinden der aus den Coefficienten von A, B und C dieser drei Gleichungen gebildeten Determinante beweist, dass die drei Verbindungslinien sich in einem und demselben Punkte D schneiden, dessen Coordinaten sind:

$$D \equiv \frac{1}{u_1},\ \frac{1}{u_2},\ \frac{1}{u_3} \equiv \frac{1}{-s_1+s_2+s_3},\ \frac{1}{s_1-s_2+s_3},\ \frac{1}{s_1+s_2-s_3} \qquad (13)$$

Es folgt daher:

„Verbindet man die Berührungspunkte des Inkreises und der „Dreiecksseiten mit den entsprechenden Mittelpunkten der Ankreise, „so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem und demselben „Punkte D, dessen Seitenabstände sich wie die Radien der entspre- „chenden Ankreise, verhalten.“ . . . . (14)

Die aus den Coordinaten der Punkte D, Q und S gebildete Determinante wird aber, wie leicht zu zeigen ist, identisch gleich Null, weshalb folgt:

„Die Punkte D und Q liegen mit dem Schwerpunkte S auf einer „und derselben Geraden.“ . . . . (15)

Da aber auch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix} \equiv 0$$

ist, so ergibt sich:

„Das Inkreiscentrum J und der Grebe'sche Punkt G liegen mit „dem Punkte Q auf einer und derselben Geraden.“ . . . . . . (16)

„Punktepaare mit reciproken Coordinaten sind nach obigen:

„Der Schwerpunkt und der Grebe'sche Punkt; das Umkreis- „centrum und der Höhenschnittpunkt und das Punktepaar D und Q; „während die Mittelpunkte der die Seiten des Dreiecks berührenden „Kreise sich selbst zu entsprechenden Punkten haben [1])“.

Durch Anwendung der Sätze (1), (2), (3) und (4) auf diese Punktepaare würde man einfache geometrische Beziehungen über die gegenseitige Lage derselben erhalten. So würde beispielsweise die Anwendung des Satzes (4) auf das Punktepaar M und H die Eigenschaften des Feuerbach'schen Kreises ergeben.

Bestimmt man zu den Punkten einer durch die Gleichung

$$L \equiv \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

gegebenen Geraden die Punkte mit reciproken Coordinaten, so genügen ihre Coordinaten der Gleichung:

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0$$

oder:

1) Vergl. Fiedler, Geometrie der Kegelschnitte.

$$K \equiv \alpha BC + \beta AC + \gamma AB = 0$$

und es folgt:

„Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so beschreibt der Punkt mit „den reciproken Coordinaten einen dem Dreieck umschriebenen Kegel- „schnitt und umgekehrt [1])“ . . . . (17)

Der Kegelschnitt K wird die Inverse der Geraden K und diese die Inverse des Kegelschnittes K genannt. Da L als die Dreieckspolare eines Punktes $p \equiv \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ und der Kegelschnitt K als die konische Polare des Punktes $p' \equiv \alpha.\ \beta, \gamma$ betrachtet werden kann, so folgt:

„Die Inverse der Dreieckspolare eines Punktes p ist die konische „Polare des entsprechenden Punktes p' bezüglich des Dreiecks.“(18)

Weil aber dem Schwerpunkte des Dreiecks die unendlich ferne Gerade als Dreieckspolare und dem Grebe'schen Punkte der Umkreis des Dreiecks als konische Polare entspricht, so ergibt sich:

„Der Umkreis des Dreiecks ist die Inverse der unendlich fernen „Geraden.“ . . . . (19)

Die zu einer Geraden L gehörige Inverse K ist daher eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem L den Umkreis des Dreiecks schneidet, berührt oder nicht schneidet; jeder Tangente des Umkreises entspricht somit als inverse Linie stets eine dem Dreieck umschriebene Parabel.

Die Gerade L schneidet die entsprechende Inverse K in höchstens zwei Punkten m_1 und m_2 und die ihnen entsprechenden Punkte m_1', m_2' mit reciproken Coordinaten müssen sowohl auf L, als auch auf K liegen; da aber der Schnittpunkt m_1 im allgemeinen nicht mit seinem entsprechenden Punkte m_1' zusammenfallen kann, weil diese Eigenschaft nur den Punkten J, J_1, J_2 und J_3 zukömmt, so geht hervor:

„Auf jeder Geraden befindet sich stets nur ein Paar von Punkten „mit reciproken Coordinaten, nämlich das Schnittpunktepaar dieser „Geraden mit ihrer Inversen.“ . . . . (20)

Aus diesem Grunde muss jede durch das Inkreiscentrum oder durch ein Ankreiscentrum gehende Gerade den ihr entsprechenden inversen Kegelschnitt in jenem Punkte berühren. Mit Rücksicht auf Satz (19) folgt noch:

---

1) Siehe Durège, Curven 3. Ord. pg. 121.

„Die unendlich fernen imaginären Kreispunkte sind ein Punkte-„paar mit reciproken Coordinaten.“ . . . . (21)

Nachdem nun gezeigt wurde, dass jeder Geraden nur ein Paar von Punkten mit reciproken Coordinaten angehört, so fragt es sich, welche Curve diese Punktepaare beschreiben, im Falle die Gerade sich um einen festen Punkt $p \equiv \alpha, \beta, \gamma$ dreht. Damit aber eine durch den Punkt p gehende Gerade ein Paar entsprechender Punkte, deren Coordinaten A, B, C und $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}$ seien, enthalte, muss die Bedingungsgleichung bestehen:

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A, & B, & C \\ \frac{1}{A}, & \frac{1}{B}, & \frac{1}{C} \end{vmatrix} = 0$$

daher erhält man für die gesuchte Curve die Gleichung:

$$F(p) \equiv \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A, & B, & C \\ BC, & AC, & AB \end{vmatrix}$$

$$\equiv A^2(B\beta - C\gamma) + B^2(C\gamma - A\alpha) + C^2(A\alpha - B\beta) = 0 \quad . \; . \; . \; (22)$$

Dieser Gleichung genügen aber sowohl die Coordinaten der Eckpunkte des Dreiecks, als auch diejenigen der Punkte $p \equiv \alpha, \beta, \gamma$ und $p' \equiv \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$; ferner erhält obige Determinante zwei gleiche Reihen, sobald man statt der variabelen Coordinaten diejenigen der Punkte J, J_1, J_2 oder J_3 setzt; überdies ist die Gleichung $F(p) = 0$ nur abhängig von den Coordinaten α, β, γ des gegebenen Punktes p, weshalb derselbe der Erzeugungspunkt jener Curve genannt wird. Es ergibt sich nun:

„Diejenigen Paare von Punkten mit reciproken Coordinaten, „deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt p gehen, liegen „auf einer Curve dritter Ordnung, welche die Ecken des Dreiecks, „die Mittelpunkte der vier Kreise, welche die Seiten des Dreiecks „berühren, den Erzeugungspunkt p und den ihm entsprechenden „Punkt p' mit reciproken Coordinaten enthält.“ . . . . (23)

Die Curve $F(p)$ besitzt also die Eigenschaft, dass sie zu jedem ihrer Punkte auch denjenigen mit reciproken Coordinaten enthält. Würde man den Punkt p' zum Erzeugungspunkt wählen, so erhielte man eine von der vorigen verschiedene Curve, die aber durch dieselben neun Punkte ginge, welche im Satz (23) erwähnt wurden.

Hieraus erkennt man, dass durch die Ecken des Dreiecks, durch die Mittelpunkte seiner vier Berührungskreise und durch ein beliebiges Paar von Punkten mit reciproken Coordinaten unzählig viele Curven dritter Ordnung gelegt werden können; da aber je zwei Ankreiscentra mit einer Ecke des Dreiecks auf einer Geraden liegen, so folgt:

„Das Inkreiscentrum, ein Ankreiscentrum, die beiden Ecken des „Dreiecks, die nicht auf der Verbindungslinie der beiden Centra „liegen und jedes beliebige Punktepaar mit reciproken Coordinaten „gehören stets einem Kegelschnitte an." . . . . (24)

Ebenso ergibt sich:

„Je zwei Ankreiscentra, die beiden nicht auf ihrer Verbindungs- „linie liegenden Ecken des Dreiecks und jedes beliebige Punktepaar „mit reciproken Coordinaten liegen stets auf einem und demselben „Kegelschnitte" . . . . (25)

Bestimmt man zu einer beliebigen durch den Punkt p gehenden Geraden L den inversen Kegelschnitt K, so geht derselbe nach (17) durch die Ecken des Dreiecks, enthält den dem Punkte p entsprechenden Punkt p' und schneidet die Gerade L in einem Punktepaar mit reciproken Coordinaten, das auch der Curve $F(p)$ angehört; daher trifft der Kegelschnitt K diese Curve in sechs Punkten, von denen bei der Drehung der Geraden L um den Punkt p vier Schnittpunkte, nämlich die Ecken des Dreiecks und der Punkt p' unveränderlich bleiben; somit folgt:

„Die Curve $F(p)$ der Punktepaare mit reciproken Coordinaten „lässt sich erzeugen durch die projectivisch auf einander bezogenen „Gebilde eines durch den Erzeugungspunkt p gehenden Strahlen- „büschels und eines Kegelschnittbüschels, der die Ecken des Dreiecks „und den Punkt p' zu Grundpunkten hat." . . . . (26)

Ferner ergibt sich:

„Jeder durch die Ecken des Dreiecks und durch den Punkt p' „gehende Kegelschnitt schneidet die Curve $F(p)$ in noch einem „Punktepaar mit reciproken Coordinaten, dessen Verbindungslinie „durch den Punkt p geht." . . . . (27)

Der Umkreis des Dreiecks hat mit $F(p)$ die Ecken des Dreiecks und ausserdem noch drei Punkte m_1, m_2, m_3 gemeinsam, welchen nach (19) die unendlich fernen Punkte der Curve $F(p)$ entsprechen; es geben somit die Verbindungslinien pm_1, pm_2, pm_3 die Richtungen der Asymptoten der Curve $F(p)$.

Die konische und die gerade Polare eines beliebigen Punktes $u \equiv A_0, B_0, C_0$ bezüglich der Curve $F(p)$ haben die Gleichungen:

$$F_1(p) \equiv A^2(B_0\beta - C_0\gamma) + B^2(C_0\gamma - A_0\alpha) + C^2(A_0\alpha - B_0\beta)$$
$$+ 2AB(A_0\beta - B_0\alpha) + 2AC(C_0\alpha - A_0\gamma) + 2BC(B_0\gamma - C_0\beta) = 0$$

$$F_2(p) \equiv A(\alpha C_0^2 - \alpha B_0^2 + 2\beta A_0 B_0 - 2\gamma A_0 C_0)$$
$$+ B(\beta A_0^2 - \beta C_0^2 + 2\gamma B_0 C_0 - 2\alpha A_0 B_0)$$
$$+ C(\gamma B_0^2 - \gamma A_0^2 + 2\alpha A_0 C_0 - 2\beta B_0 C_0) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (28)$$

Setzt man in der Gleichung $F_2(p) = 0$ statt der Coordinaten A_0, B_0, C_0 diejenigen des Inkreiscentrums oder die Coordinaten der Ankreiscentra ein, so ergeben sich für die Tangenten von $F(p)$ in diesen vier Punkten die Gleichungen:

$$A(\beta - \gamma) + B(\gamma - \alpha) + C(\alpha - \beta) = 0$$
$$A(\beta - \gamma) - B(\gamma + \alpha) + C(\alpha + \beta) = 0$$
$$A(\beta + \gamma) + B(\gamma - \alpha) - C(\alpha + \beta) = 0$$
$$-A(\beta + \gamma) + B(\gamma + \alpha) + C(\alpha - \beta) = 0$$

welchen, wie leicht zu erkennen ist, durch die Coordinaten α, β, γ genüge geleistet wird; weshalb folgt:

„Die in den Mittelpunkten der vier Berührungskreise des Drei-„ecks gezogenen Tangenten der Curve $F(p)$ schneiden sich im Er-„zeugungspunkte p.“ . . . . (29)

Oder:

„Die von dem Erzeugungspunkte p an die Curve $F(p)$ auslau-„fenden Tangenten berühren dieselbe in den Punkten J, J_1, J_2, J_3“ . . . . (30)

Setzt man in der Gleichung $F_1(p) = 0$ statt der Coordinaten A_0, B_0, C_0 diejenigen des Punktes $p' \equiv \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$, so erhält man für die konische Polare von p' die Gleichung:

$$BC\alpha(\beta^2 - \gamma^2) + AC\beta(\gamma^2 - \alpha^2) + AB\gamma(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

welcher sowohl die Coordinaten der Eckpunkte des Dreiecks, als auch diejenigen des Punktes $p \equiv \alpha, \beta, \gamma$ genügen. Mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Curven dritter Ordnung folgt nun:

„Die konische Polare des Punktes p' bezüglich der Curve $F(p)$ „berührt dieselbe in diesem Punkte und schneidet sie in den Ecken „des Dreiecks und in dem Erzeugungspunkte p.“; . . . . (31)

„Von dem Punkte p' gehen daher an die Curve $F(p)$ vier Tan-„genten, welche dieselbe in den Ecken des Dreiecks und im Punkte p „berühren.“ . . . . (32)

Die Tangente T im Punkte p' hat nach (28) die Gleichung:

$$A\alpha^3(\beta^2-\gamma^2)+B\beta^3(\gamma^2-\alpha^2)+C\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)=0$$

welche auch die Form:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ \frac{1}{\alpha}, & \frac{1}{\beta}, & \frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\alpha^3}, & \frac{1}{\beta^3}, & \frac{1}{\gamma^3} \end{vmatrix} = 0$$

annimmt, woraus man erkennt, dass diese Tangente T ausser dem Punkte p' auch noch den durch die Coordinaten $\frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}, \frac{1}{\gamma^3}$ bestimmten Punkt enthält.

Will man den Schnittpunkt π der Tangente T mit der Curve $F(p)$ bestimmen, so braucht man nur zu berücksichtigen, dass jeder Punkt von T durch die Coordinaten $A_1=\frac{1}{\alpha}+\frac{\lambda}{\alpha^3}$, $B_1=\frac{1}{\beta}+\frac{\lambda}{\beta^3}$, $C_1=\frac{1}{\gamma}+\frac{\lambda}{\gamma^3}$ darstellbar ist, weshalb man die Grösse λ nur so zu bestimmen hat, dass die Coordinaten A_1, B_1, C_1 der Gleichung $F(p)=0$ genügen. Man hat alsdann:

$$\frac{(\alpha^2+\lambda)^2(\beta^2-\gamma^2)}{\alpha^4}+\frac{(\beta^2+\lambda)^2(\gamma^2-\alpha^2)}{\beta^4}+\frac{(\gamma^2+\lambda)^2(\alpha^2-\beta^2)}{\gamma^4}=0$$

und findet hieraus:

$$\lambda=-\frac{2\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}$$

hiemit folgt:

Die Tangente der Curve $F(p)$ im Punkte p' trifft die Curve noch in dem Punkte:

$$\pi\equiv\frac{1}{\alpha}(-\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2),\quad \frac{1}{\beta}(\beta^2\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2),$$
$$\frac{1}{\gamma}(\beta^2\gamma^2-\alpha^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2)\quad .\ .\ .\ .\ .\ (33)$$

Da die Curve $F(p)$ durch die Ecken des Fundamentaldreiecks geht, so schneidet sie jede Seite desselben in noch je einem Punkte über welche man dadurch Aufschluss erhält, dass man in der Gleichung $F(p)=0$ der Reihe nach für A, B oder C Null setzt, wodurch man bekommt:

$$B\gamma - C\beta = 0 \qquad C\alpha - A\gamma = 0 \qquad A\beta - B\alpha = 0$$

weshalb folgt:

„Die Curve $F(p)$ schneidet die Seiten des Dreiecks in den Schnitt-„punkten der Ecktransversalen des Erzeugungspunktes p.“ . . (34)

Die Tangenten in diesen Schnittpunkten, deren Coordinaten $0, \beta, \gamma$; $\alpha, 0, \gamma$; $\alpha, \beta, 0$ sind, haben die Gleichungen:

$$A\alpha(\beta^2 - \gamma^2) - B\beta\gamma^2 + C\gamma\beta^2 = 0 \qquad A\alpha\gamma^2 + B\beta(\gamma^2 - \alpha^2) - C\gamma\alpha^2 = 0$$
$$-A\alpha\beta^2 + B\beta\alpha^2 + C\gamma(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

und das Verschwinden der aus den Coefficienten von A, B und C dieser Gleichungen gebildeten Determinante zeigt, dass diese Tangenten sich in einem und demselben Punkte schneiden. Durch Auflösung von zwei der obigen Gleichungen ergeben sich aber für den gemeinsamen Schnittpunkt gerade die Coordinaten des in (33) erwähnten Punktes π, weshalb folgt:

„Die Tangenten der Curve $F(p)$ in den drei Schnittpunkten der-„selben mit den Dreiecksseiten und die Tangente im Punkte p' treffen „sich alle vier in einem der Curve $F(p)$ angehörigen Punkte π.“ (35)

Die Polare des Punktes π bezüglich des durch die Gleichung

$$BC\beta\gamma + AC\alpha\gamma + AB\alpha\beta = 0$$

dargestellten Kegelschnittes hat die Gleichung:

$$A\alpha(\beta B_\pi + \gamma C_\pi) + B\beta(\gamma C_\pi + \alpha A_\pi) + C\gamma(\alpha A_\pi + \beta B_\pi) = 0$$

oder

$$A\beta\gamma + B\alpha\gamma + C\alpha\beta = 0$$

d. h.

„Die Dreieckspolare des Punktes p ist zugleich die Kegelschnitts-„polare des Punktes π bezüglich der zum Punkte p' gehörigen ko-„nischen Polare des Dreiecks.“ . . . . (36)

Unter den sämmtlichen konischen Polaren der Curve $F(p)$ befinden sich offenbar auch gleichseitige Hyperbeln, und es ist nun zu untersuchen, welchen Punkten dieselben entsprechen. Da in der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel die Summe der Coefficienten von x^2 und y^2 gleich Null ist, so erhält man für einen Punkt $u \equiv A_0, B_0, C_0$, dessen konische Polare ($F_1(p) = 0$) eine gleichseitige Hyperbel sein soll, die Bedingungsgleichung:

$$(B_0\beta-C_0\gamma)\cos^2\varepsilon_1+(C_0\gamma-A_0\alpha)\cos^2\varepsilon_2+(A_0\alpha-B_0\beta)\cos^2\varepsilon_3$$
$$+2(B_0\gamma-C_0\beta)\cos\varepsilon_2\cos\varepsilon_3+2(C_0\alpha-A_0\gamma)\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_3$$
$$+2(A_0\beta-B_0\alpha)\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2+(B_0\beta-C_0\gamma)\sin^2\varepsilon_1+(C_0\gamma-A_0\alpha)\sin^2\varepsilon_2$$
$$+(A_0\alpha-B_0\beta)\sin^2\varepsilon_3+2(B_0\gamma-C_0\beta)\sin\varepsilon_2\sin\varepsilon_3+2(C_0\alpha-A_0\gamma)\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_3$$
$$+2(A_0\beta-B_0\alpha)\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_2=0$$

oder:

$$(B_0\gamma-C_0\beta)\cos(\varepsilon_2-\varepsilon_3)+(C_0\alpha-A_0\gamma)\cos(\varepsilon_3-\varepsilon_1)$$
$$+(A_0\beta-B_0\alpha)\cos(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=0$$

oder endlich:

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A_0, & B_0, & C_0 \\ \cos w_1, & \cos w_2, & \cos w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Die gesuchte Ortscurve ist also eine Gerade, welche den Punkt $p\equiv\alpha, \beta, \gamma$ und den durch die Coordinaten $\cos w_1$, $\cos w_2$, $\cos w_3$ dargestellten Punkt, nämlich das Umkreiscentrum des Dreiecks enthält; daher folgt:

„Den sämmtlichen Punkten der Geraden, welche den Punkt p „mit dem Umkreiscentrum des Dreiecks verbindet, entsprechen als „konische Polaren bezüglich der Curve $F(p)$ lauter gleichseitige Hy-„perbeln.“ . . . . (37)

„Die konische Polare des Erzeugungspunktes p bezüglich der „Curve $F(p)$ ist daher eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die „Centra der vier Berührungskreise des Dreiecks geht und die Curve „$F(p)$ in p berührt; sie enthält somit alle jene Punkte, welche be-„züglich der Punktepaare von $F(p)$ mit reciproken Coordinaten har-„monisch conjugirt zum Punkte p sind, und ihre Tangente im Punkte „p geht durch den Punkt p'.“ . . . . (38)

Die Dreieckspolare eines beliebigen Punktes $m\equiv A_0, B_0, C_0$, ferner diejenige des Punktes p und die Polare des Punktes m bezüglich der dem Punkte p' entsprechenden konischen Polare des Dreiecks haben beziehungsweise die Gleichungen:

$$AB_0C_0+BA_0C_0+CA_0B_0=0 \qquad A\beta\gamma+B\alpha\gamma+C\alpha\beta=0$$
$$A\alpha(B_0\beta+C_0\gamma)+B\beta(A_0\alpha+C_0\gamma)+C\gamma(A_0\alpha+B_0\beta)=0$$

Damit sich nun die drei genannten Geraden in einem und demselben Punkte schneiden, muss für die Coordinaten des Punktes m die Beziehung bestehen:

oder

$$\begin{vmatrix} B_0C_0, & A_0C_0, & A_0B_0 \\ \beta\gamma, & \alpha\gamma & \alpha\beta \\ \alpha(B_0\beta+C_0\gamma), & \beta(A_0\alpha+C_0\gamma), & \gamma(A_0\alpha+B_0\beta) \end{vmatrix} = 0$$

d. h.

$$F(p) = 0$$

„Jeder Punkt der Curve $F(p)$ besitzt die Eigenschaft, dass seine „Dreieckspolare und seine Polare bezüglich der dem Punkte p' ent-„sprechenden konischen Polare des Dreiecks sich in einem Punkte „der unveränderlichen Dreieckspolare des Erzeugungspunktes p tref-„fen." . . . . (39)

Die Dreieckspolaren der Punkte $m \equiv A_0,\ B_0,\ C_0;\ m' \equiv \frac{1}{A_0}, \frac{1}{B_0}, \frac{1}{C_0}$ und $p' \equiv \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ haben die Gleichungen:

$$AB_0C_0 + BA_0C_0 + CA_0B_0 = 0 \qquad AA_0 + BB_0 + CC_0 = 0$$
$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

woraus sich durch Elimination der Grössen A, B, C ebenfalls die Gleichung $F(p) = 0$ ergibt, weshalb folgt:

„Jeder Punkt der Curve $F(p)$ besitzt die Eigenschaft, dass seine „Dreieckspolare und diejenige des entsprechenden Punktes mit re-„ciproken Coordinaten sich in einem Punkte der Dreieckspolare des „Punktes p' treffen." . . . . (40)

Wählt man den Schwerpunkt S des Dreiecks als Erzeugungspunkt, so erhält man eine Curve $F(s)$, welche bemerkenswerte Aufschlüsse über die gegenseitige Lage der wichtigsten Symmetriepunkte des Dreiecks giebt.

Berücksichtigt man, dass dem Schwerpunkte $S \equiv \frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \frac{1}{s_3}$ der Grebe'sehe Punkt $G \equiv s_1, s_2, s_3$ als Punkt mit reciproken Coordinaten entspricht, so ergibt sich zunächst nach (23):

„Diejenigen Punktepaare mit reciproken Coordinaten, deren Ver-„bindungslinien durch den Schwerpunkt des Dreiecks gehen, liegen „auf einer Curve dritter Ordnung, welche die Ecken des Dreiecks, „die Centra seiner vier Berührungskreise, den Schwerpunkt und den „Grebe'schen Punkt enthält . . . . (41)

Die Gleichung dieser Curve ist:

$$F(S) = A^2 s_1(Bs_3 - Cs_2) + B^2 s_2(Cs_1 - As_3) + C^2 s_3(A_2 - Bs_1) = 0$$

Aus (29) und (30) folgt:

„Die in den Mittelpunkten der vier Berührungskreise des Drei-
„ecks gezogenen Tangenten der Curve $F(S)$ schneiden sich im Schwer-
„punkte.“ . . . . (42)

Oder:

„Die vom Schwerpunkte an din Curve $F(S)$ auslaufenden Tan-
„genten berühren dieselbe in den Punkten J, J_1, J_2, J_3“ . . . (43)

Aus (31) und (32) ergibt sich:

„Die konische Polare des Grebe'schen Punktes bezüglich der
„Curve $F(S)$ berührt dieselbe in diesem Punkte, geht durch die Ecken
„des Dreiecks und durch dessen Schwerpunkt S.“ . . . . . . (44)

„Die von dem Grebe'schen Punkte an die Curve $F(S)$ gezogenen
„Tangenten berühren dieselbe in den Ecken des Dreiecks und im
„Schwerpunkte.“ . . . . (45)

Zufolge (34) hat man:

„Die Curve $F(S)$ geht durch die Mitten der Dreiecksseiten.“ (46)

Die Coordinaten des in (33) erwähntes Punktes π gehen jetzt über in:

$$s_1(-s_1^2+s_2^2+s_3^2), \quad s_2(s_1^2-s_2^2+s_3^2) \quad s_3(s_1^2+s_2^2-s_3^2)$$

wodurch aber das Centrum M des Umkreises dargestellt wird; daher folgt:

„Der Mittelpunkt des Umkreises liegt auf der Curve $F(S)$, und
„die von ihm an die Curve gezogenen Tangenten berühren dieselbe
„im Grebe'schen Punkte und in den Mitten der Dreiecksseiten.“ (47)

Wie früher bemerkt wurde, ist aber das Umkreiscentrum und der Höhenschnittpunkt ein Paar entsprechender Punkte mit reciproken Coordinaten, das mit dem Schwerpunkte auf der sogenannten Euler-schen Geraden liegt; ebenso geht die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte Q und D nach (15) durch den Schwerpunkt, weshalb sich die bemerkenswerte Eigenschaft ergibt:

„Die folgenden 16 Punkte, nämlich die Ecken des Dreiecks, die
„Mitten seiner Seiten, die Mittelpunkte der vier Berührungskreise
„des Dreiecks, der Schwerpunkt, der Grebe'sche Punkt, das Umkreis-
„centrum, der Höhenschnittpunkt und die Symmetriepunkte D und
„Q des Dreiecks liegen auf einer Curve dritter Ordnung, die über-
„dies noch alle jene Punktepaare mit reciproken Coordinaten ent-
„hält, deren Verbindungslinien durch den Schwerpunkt gehen.“ . (48)

Aus (37) und (38) ergibt sich ferner:

„Den Punkten der Euler'schen Geraden entsprechen bezüglich der „Curve $F(S)$ als konische Polaren lauter gleichseitige Hyperbeln; „unter diesen befindet sich auch die konische Polare des Schwer-„punktes, welche durch die Centra der 4 Berührungskreise des Drei-„ecks geht und die Curve $F(S)$ im Schwerpunkte berührt; sie ent-„hält alle jene Punkte, welche bezüglich der Punktepaare mit reci-„proken Coordinaten harmonisch conjugirt zum Schwerpunkte sind „und ihre Tangente in diesem Punkte geht durch den Grebe'schen „Punkt." . . . . (49)

Zieht man durch den Schwerpunkt S eine beliebige Gerade, so schneidet diese die Curve $F(S)$ stets in einem Paare entsprechender Punkte m und m'; die in S, m und m' an die Curve gezogenen Tangenten schneiden dieselbe in noch drei Punkten, welche die Tangentialpunkte von S, m und m' genannt werden und bekanntlich wieder einer Geraden angehören; da aber die Curventangente in S durch den Grebe'schen Punkt geht, so folgt:

„Zieht man in irgend einem Paar entsprechender Punkte der „Curve $F(S)$ die Tangenten an dieselbe, so geht die Verbindungs-„linie der zugehörigen Tangentialpunkte stets durch den Grebe'schen „Punkt." . . . . (50)

Mit Rücksicht auf (42) ergibt sich nun:

„Jede Gerade, welche durch einen der vier Mittelpunkte der „Berührungskreise des Dreiecks geht, schneidet die Curve $F(S)$ in „noch zwei Punkten, deren Tangenten dieselbe stets in einem Paar „entsprechender Punkte mit reciproken Coordinaten treffen." . (51)

Unter den durch das Inkreiscentrum J gehenden Geraden befindet sich aber besonders eine, welche die Curve $F(S)$ in den Punkten G und Q schneidet, da diese nach (16) mit dem Punkte J auf einer Geraden liegen; die Tangente in G trifft aber nach (47) die Curve $F(S)$ in dem Umkreiscentrum M, und daher muss zufolge (51) die in Q gezogene Tangente die Curve im Höhenschnittpunkte H treffen; daher folgt:

„Die Tangenten der drei einer Geraden angehörigen Punkte J, „G und Q der Curve $F(S)$ treffen dieselbe beziehungsweise in den „auf der Euler'schen Geraden liegenden Punkten S, M und H . (52)

Berücksichtigt man, dass die konische Polare des Punktes G bezüglich des Dreiecks der Umkreis desselben und die Dreieckspolare des Schwerpunktes die unendlich ferne Gerade ist, so folgt aus (39):

„Jeder Punkt der Curve $F(S)$ besitzt die Eigenschaft, dass dessen „Dreieckspolare parellel ist zu seiner Umkreispolare.“ . . . . (53)

Ebenso lässt sich Satz (40) auf die hier betrachtete Curve übertragen.

Eine weitere Eigenschaft der Curve $F(S)$ ergibt sich durch folgende Betrachtung:

Jeder beliebige durch die Ecken des Fundamentaldreiecks gehende Kegelschnitt kann durch die Gleiehung:

$$\alpha BC + \beta AC + \gamma AB = 0$$

dargestellt und als die konische Polare eines Punktes $p \equiv \alpha,\ \beta,\ \gamma$ bezüglich des Dreiecks betrachtet werden. Die Tangente dieses Kegelschnittes im Eckpunkte a des Dreiecks hat die Gleichung:

$$\gamma B + \beta C = 0$$

und die durch a gehende Normale desselben kann zunächst durch die Gleichung:

$$B + \lambda C = 0$$

dargestellt werden, worin aber λ noch so zu bestimmen ist, dass die beiden Geraden auf einander senkrecht stehen; so dass also:

$$\frac{\gamma \cos \varepsilon_2 + \beta \cos \varepsilon_3}{\gamma \sin \varepsilon_2 + \beta \sin \varepsilon_3} + \frac{\sin \varepsilon_2 + \lambda \sin \varepsilon_3}{\cos \varepsilon_2 + \lambda \cos \varepsilon_3} = 0$$

ist.

Hieraus findet man:

$$\lambda = -\frac{\gamma - \beta \cos w_1}{\beta - \gamma \cos w_1}$$

und somit hat die Kegelschnittsnormale im Eckpunkte a die Gleichung:

$$B(\beta - \gamma \cos w_1) - C(\gamma - \beta \cos w_1) = 0$$

Ebenso findet man für die Normalen in den beiden anderen Ecken des Dreieks die Gleichungen:

$$C(\gamma - \alpha \cos w_2) - A(\alpha - \gamma \cos w_2) = 0$$

und

$$A(\alpha - \beta \cos w_3) - B(\beta - \alpha \cos w_3) = 0$$

Die Bedingung, dass diese drei Normalen sich in einem und demselben Punkte schneiden, liefert die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta - \gamma \cos w_1 & \beta \cos w_1 - \gamma \\ \gamma \cos w_2 - \alpha & 0 & \gamma - \alpha \cos w_2 \\ \alpha - \beta \cos w_3 & \alpha \cos w_3 - \beta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

woraus man erhält:

$$\alpha(\beta^2-\gamma^2)(\cos w_1+\cos w_2\cos w_3)+\beta(\gamma_2-\alpha^2)(\cos w_2+\cos w_1\cos w_3)$$
$$+\gamma(\alpha^2-\beta^2)(\cos w_3+\cos w_1\cos w_2)=0$$

oder:

$$\alpha(\beta^2-\gamma^2)\sin w_2\sin w_3+\beta(\gamma^2-\alpha^2)\sin w_3\sin w_1+\gamma(\alpha^2-\beta^2)\sin w_1\sin w_2=0$$

und weil

$$\sin w_1:\sin w_2:\sin w_3=s_1:s_2:s_3,$$

so folgt:

$$\alpha s_2 s_3(\beta^2-\gamma^2)+\beta s_1 s_3(\gamma^2-\alpha^2)+\gamma s_1 s_2(\alpha^2-\beta^2)=0$$

Da aber diese Gleichung mit derjenigen der Curve $F(S)$ vollständig übereinstimmt, wenn man statt der Coordinaten α, β, γ des Punktes p die Ausdrücke A, B, C gesetzt denkt, so er ergibt sich:

„Die konischen Polaren aller Punkte der Curve $F(S)$ bezüglich „des Dreiecks haben die Eigenschaft, dass sich ihre in den Ecken „des Dreiecks gezogenen Normalen in einem und demselben Punkte „schneiden; diese Eigenschaft kommt also insbesondere auch den „konischen Polaren der Punkte J, S, G, M, H, D und Q zu“.

Regensburg, October 1883.

IX.

Ein Problem über berührende Kugeln.

Von

R. Hoppe.

In T. LVI. S. 307. ist bewiesen, dass nicht mehr als 12 gleiche Kugeln, ohne sich zu durchdringen, eine gleiche Kugel berühren können. Man kann nun die Frage auch umgekehrt stellen: Wie gross muss eine Kugel mindestens sein, damit eine gegebene Anzahl einander gleicher Kugeln, ohne sich zu durchdringen, sie berühren können?

Was das allgemeine Problem betrifft, so sind n Kugeln K von gleichem Radius, den wir $= 1$ setzen, gegeben. Der gemeinsame Abstand der Mittelpunkte aller K vom Mittelpunkte einer gesuchten Kugel M sei $= r$. Der variable Abstand der $k$ten und $h$ten Kugel K sei $= R_{k,h}$. Dann verlangt das Problem, r zum Minimum zu machen bei $\frac{1}{2}n(n-1)$ Grenzbedingungen:

$$R_{k,h} \overset{=}{>} 2$$

Die Anzahl der letztern vermindert sich sehr bei Specialbetrachtung, da jede Kugel K höchstens von 5 andern berührt werden kann. Auch lassen sich manche Sätze darüber aufstellen, welche Berührungen der K für ein Minimum r notwendig sind, so dass ihnen entsprechend $R_{k,h} = 2$ im voraus bekannt ist.

Gegenwärtig will ich auf das Problem für ein beliebiges n nicht weiter eingehen, sondern die Untersuchung auf Specialwerte von n beschränken. Für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 12$ ist die Lösung sofort zu

ersehen. Die nächsten Zahlen sind also 7 und 8. Die Lösung für diese 2 Fälle soll daher der Gegenstand des Folgenden sein.

Zunächst leuchtet nämlich ein, dass wenn die Mittelpunkte der K ein regelmässiges Tetraeder, Oktaeder oder Ikosaeder für die Kante $= 2$ bilden, r seinen kleinsten Wert haben muss; denn hier ist eine relative Verschiebung der K nicht möglich. Die entsprechenden Werte der r sind dann die Eckradien der genannten Polyeder, mithin bzhw.

$$r = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{2\sqrt{5}\sin\tfrac{3}{5}R}$$

Ebenso ist auch ein System dreier sich berührenden K keiner relativen Verschiebung fähig, also das kleinste r der Eckradius des gleichseitigen Dreiecks

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Für 2 Kugeln K kann M beliebig klein werden; daher ist zu setzen

$$r = 1$$

Auch für $n = 5$ ist die Frage leicht entschieden. Lässt man von 6 Kugeln K, deren Mittelpunkte die Ecken eines Oktaeders sind, eine weg, so bleiben von den 3 Paren als Pole gegenüberliegender K noch 2 Pare übrig. Jedes der Pare kann, nur wenn das andre Par still steht, auf dessen Aequator fortrücken, indem beide Kugeln mit den 2 Polkugeln in Berührung bleiben. Sobald aber dessen diametrale Lage aufhört, sind die bleibenden Polkugeln fest. Folglich ist die einzig mögliche Configuration, dass 2 diametrale Kugeln die 3 übrigen berühren. Da hiernach die K bei constantem r nicht grösser werden können, so kann bei constanten K auch r nicht kleiner werden, und es ergibt sich der eigentümliche Satz:

Auf einer Kugel, welche von 5 einander nicht durchdringenden gleichen Kugeln berührt wird, hat auch eine sechste berührende gleiche Kugel Platz.

Eine Anordnung der K nach regelmässigem Hexaeder und Dodekaeder führt zwar zu keiner definitiven Entscheidung für $n = 8$, und 20, da die Diagonalen der Vier- und Fünfecke einer Verkürzung bei constanten Kanten fähig sind, bis sie diesen gleich werden, doch geben auch hier die Eckradien, bzhw.

$$= \sqrt{3}, \quad 2\sqrt{3}\sin\tfrac{3}{5}R$$

wenigstens eine obere Grenze des Minimums von r.

Stellen wir hiernach alles Bekannte zusammen, so ist als Minimalwert

für $n = 2$	$r = 1$	
für $n = 3$	$r = \frac{2}{\sqrt{3}} =$	1,15470
für $n = 4$	$r = \sqrt{\frac{3}{2}} =$	1,22474
für $n = 5$ u. 6	$r = \sqrt{2} =$	1,41421
für $n = 8$	$r \leqq \sqrt{3} =$	1,73205
für $n = 12$	$r = \sqrt{2\sqrt{5}\sin\frac{3}{5}R} =$	1,90211
für $n = 20$	$r \leqq 2\sqrt{3}\sin\frac{3}{5}R =$	2,80252

Bei Untersuchung des Falles $n = 8$ kann man vom Würfel ausgehen. Hier sind diejenigen R_{kh} einer Verkleinerung fähig, welche die Diagonalen der 6 Quadrate bilden, und zwar einzeln von $2\sqrt{2}$ bis 2. Diese Grenze lässt sich leicht bei 4 Diagonalen gleichzeitig erreichen. Man dreht ein Quadrat in seiner Ebene um $\frac{1}{2}R$ und nähert es seiner Gegenseite, der es parallel bleibt, bis die beide verbindenden 8 Kanten $= 2$ werden.

Nimmt man die x und y parallel zwei Seiten des einen Quadrats, setzt den Abstand der Mittelpunkte beider Quadrate, welche auf der z Axe liegen $= 2a$, und den Anfang der z in die Mitte zwischen beiden, so sind die Coordinaten der 8 Ecken:

	x	y	z		x	y	z
1	0	$\sqrt{2}$	a	5	0	$-\sqrt{2}$	a
2	1	1	$-a$	6	-1	-1	$-a$
3	$\sqrt{2}$	0	a	7	$-\sqrt{2}$	0	a
4	1	-1	$-a$	8	-1	1	$-a$

Damit M von allen K berührt wird, muss sein

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

das ist für alle K zugleich:

$$2 + a^2 = r^2$$

Damit jedes K für $z = a$ die 2 nächsten K für $z = -a$ berührt, muss $R_{k,k+1} = 2$ sein, also

$$R_{12}{}^2 = 1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 + (a + a)^2 = 4 \quad \text{oder}$$
$$-2\sqrt{2} + 4a^2 = 0$$

Aus beiden Bedingungen ergibt sich:

$$a = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}; \quad r = \sqrt{2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}} = 1{,}64533$$

Demnach ist r um

$$\sqrt{3}-\sqrt{2+\sqrt{\tfrac{1}{2}}} = 0{,}08672$$

kleiner bei gegenwärtiger Anordnung der K als bei der Würfelstellung.

Um nun zu untersuchen, ob dieser neue Wert ein Minimum ist, erteilen wir allen K beliebige unendlich kleine Verschiebungen, deren Componenten mit α, β, γ bezeichnet seien, so dass die Coordinaten werden:

	x	y	z		x	y	z
1	α_1	$\sqrt{2}+\beta_1$	$a+\gamma_1$	5	α_5	$-\sqrt{2}+\beta_5$	$a+\gamma_5$
2	$1+\alpha_2$	$1+\beta_2$	$-a+\gamma_2$	6	$-1+\alpha_6$	$-1+\beta_6$	$-a+\gamma_6$
3	$\sqrt{2}+\alpha_3$	β_3	$a+\gamma_3$	7	$-\sqrt{2}+\alpha_7$	β_7	$a+\gamma_7$
4	$1+\alpha_4$	$-1+\beta_4$	$-a+\gamma_4$	8	$-1+\alpha_8$	$1+\beta_8$	$-a+\gamma_8$

Durch die Verschiebungen gehe R_{hk}^2 aus 4 über in $4+\varrho_{hk}$; dann wird in 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}
\varrho_{12} &= 2(\alpha_2-\alpha_1)+2(\sqrt{2}-1)(\beta_1-\beta_2)+4a(\gamma_1-\gamma_2)\\
\varrho_{23} &= 2(\sqrt{2}-1)(\alpha_3-\alpha_2)+2(\beta_2-\beta_3)+4a(\gamma_3-\gamma_2)\\
\varrho_{34} &= 2(\sqrt{2}-1)(\alpha_3-\alpha_4)+2(\beta_3-\beta_4)+4a(\gamma_3-\gamma_4)\\
\varrho_{45} &= 2(\alpha_4-\alpha_5)+2(\sqrt{2}-1)(\beta_4-\beta_5)+4a(\gamma_5-\gamma_4)\\
\varrho_{56} &= 2(\alpha_5-\alpha_6)+2(\sqrt{2}-1)(\beta_6-\beta_5)+4a(\gamma_5-\gamma_6)\\
\varrho_{67} &= 2(\sqrt{2}-1)(\alpha_6-\alpha_7)+2(\beta_7-\beta_6)+4a(\gamma_7-\gamma_6)\\
\varrho_{78} &= 2(\sqrt{2}-1)(\alpha_8-\alpha_7)+2(\beta_8-\beta_7)+4a(\gamma_7-\gamma_8)\\
\varrho_{81} &= 2(\alpha_1-\alpha_8)+2(\sqrt{2}-1)(\beta_1-\beta_8)+4a(\gamma_1-\gamma_8)
\end{aligned}$$

Die Bedingung

$$x^2+y^2+z^2 = r^2 = 2+\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

bestimmt alle γ in den entsprechenden α, β, so dass

$$\begin{aligned}
a\gamma_1 &= -\sqrt{2}\beta_1 & a\gamma_5 &= \sqrt{2}\beta_5\\
a\gamma_2 &= \alpha_2+\beta_2 & a\gamma_6 &= -\alpha_6-\beta_6\\
a\gamma_3 &= -\sqrt{2}\alpha_3 & a\gamma_7 &= \sqrt{2}\alpha_7\\
a\gamma_4 &= \alpha_4-\beta_4 & a\gamma_8 &= -\alpha_8+\beta_8
\end{aligned}$$

Nach Einführung dieser Werte erhält man:

$$\begin{aligned}
\varrho_{12} &= -2(\alpha_1+\alpha_2)-2(\sqrt{2}+1)(\beta_1+\beta_2)\\
\varrho_{23} &= -2(\sqrt{2}+1)(\alpha_2+\alpha_3)-2(\beta_2+\beta_3)\\
\varrho_{34} &= -2(\sqrt{2}+1)(\alpha_3+\alpha_4)+2(\beta_3+\beta_4)\\
\varrho_{45} &= -2(\alpha_4+\alpha_5)+2(\sqrt{2}+1)(\beta_4+\beta_5)
\end{aligned}$$

$$\varrho_{56} = 2(\alpha_5+\alpha_6)+2(\sqrt{2}+1)(\beta_5+\beta_6)$$
$$\varrho_{67} = 2(\sqrt{2}+1)(\alpha_6+\alpha_7)+2(\beta_6+\beta_7)$$
$$\varrho_{78} = 2(\sqrt{2}+1)(\alpha_7+\alpha_8)-2(\beta_7+\beta_8)$$
$$\varrho_{81} = 2(\alpha_8+\alpha_1)-2(\sqrt{2}+1)(\beta_8+\beta_1)$$

Die übrigen ϱ, welche zu den ursprünglichen Quadratseiten gehören, enthalten kein γ und haben unmittelbar die Werte:

$$\varrho_{24} = 4(\beta_2-\beta_4)$$
$$\varrho_{46} = 4(\alpha_4-\alpha_6)$$
$$\varrho_{68} = 4(\beta_8-\beta_6)$$
$$\varrho_{82} = 4(\alpha_2-\alpha_8)$$
$$\varrho_{13} = 2\sqrt{2}(\alpha_3-\alpha_1+\beta_1-\beta_3)$$
$$\varrho_{35} = 2\sqrt{2}(\alpha_3-\alpha_5+\beta_3-\beta_5)$$
$$\varrho_{57} = 2\sqrt{2}(\alpha_5-\alpha_7+\beta_7-\beta_5)$$
$$\varrho_{71} = 2\sqrt{2}(\alpha_1-\alpha_7+\beta_1-\beta_7)$$

Addirt man besonders die 8 erstern und 8 letztern ϱ, die sich durch die Differenzen der Indices 1 und 2 unterscheiden und durch die Bezeichnungen ϱ' und ϱ'' kenntlich gemacht seien, so findet man:

$$\sqrt{2}\Sigma\varrho'+(\sqrt{2}+1)\Sigma\varrho''=0$$

Da nun kein ϱ negativ sein darf, so folgt, dass alle ϱ null sein müssen.

Es fragt sich, ob alsdann eine relative Verschiebung, d. h. eine solche, die nicht einer Rotation des ganzen Systems gleich kommt, möglich ist. Eine Gesamtrotation lässt sich dadurch ausschliessen, dass man den ersten Mittelpunkt festhält und dem zweiten nur Bewegung in gegebener Ebene gestattet, also

$$\alpha_1=0;\quad \beta_1=0;\quad \alpha_2=0$$

setzt. Aus $\varrho_{12}=0$ folgt dann, dass auch $\beta_2=0$ ist; ebenso aus $\varrho_{82}=0$ und $\varrho_{81}=0$, dass α_8 und β_8 null werden.

Hiervon abgesehen, sei

$$\alpha_k+\alpha_{k+1}=\delta_k;\quad \beta_k+\beta_{k+1}=\varepsilon_k$$

in dem Sinne, dass für den Index 9 immer 1 zu schreiben ist. Dann gehen die 16 Gleichungen $\varrho=0$ über in

$$\delta_1 = -(\sqrt{2}+1)\varepsilon_1 \qquad \delta_5 = -(\sqrt{2}+1)\varepsilon_5$$
$$\delta_2 = -(\sqrt{2}-1)\varepsilon_2 \qquad \delta_6 = -(\sqrt{2}-1)\varepsilon_6$$
$$\delta_3 = (\sqrt{2}-1)\varepsilon_3 \qquad \delta_7 = (\sqrt{2}-1)\varepsilon_7$$
$$\delta_4 = (\sqrt{2}+1)\varepsilon_4 \qquad \delta_8 = (\sqrt{2}+1)\varepsilon_8$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_2 = \varepsilon_3 & \qquad &\delta_1 - \delta_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ &\delta_4 = \delta_5 & &\delta_3 - \delta_4 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3 \\ &\varepsilon_6 = \varepsilon_7 & &\delta_5 - \delta_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_6 \\ &\delta_8 = \delta_1 & &\delta_7 - \delta_8 = \varepsilon_8 - \varepsilon_7 \end{aligned}$$

Eliminirt man die δ, so kommt:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_2 = \varepsilon_3 & \qquad &(\sqrt{2}+2)\varepsilon_1 = \sqrt{2}\varepsilon_2 \\ &\varepsilon_4 = \varepsilon_5 & &\sqrt{2}\varepsilon_3 = (\sqrt{2}+2)\varepsilon_4 \\ &\varepsilon_6 = \varepsilon_7 & &(\sqrt{2}+2)\varepsilon_5 = \sqrt{2}\varepsilon_6 \\ &\varepsilon_8 = \varepsilon_1 & &\sqrt{2}\varepsilon_7 = (\sqrt{2}+2)\varepsilon_8 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass, wenn ein ε verschwindet, alle ε, und demzufolge auch gemäss den obern Gleichungen alle δ verschwinden. Sind dann ein α und ein β null, so sind es alle α und β. Dieser Fall findet statt bei der obigen Annahme, wo

$$\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = \varepsilon_1 = 0$$

ist.

Es hat sich ergeben, dass für $r^2 = 2 + \sqrt{\frac{1}{2}}$ von der in Rede stehenden Lage aus eine relative Verschiebung der K unmöglich ist. Werden sie also verschoben, so muss r wachsen. Folglich ist r in jener Lage ein Minimum.

Bei diesem Resultate lassen wir es bewenden. Soll ein kleineres r als dieses Minimum existiren, so muss nach irgend einer endlichen Verschiebung r wieder abnehmen und in einer der anfänglichen nicht congruenten Lage denselben Wert wieder erreichen. So unwahrscheinlich dies auch ist, da die vielen congruenten Lagen einander sehr nahe sind, so ist die Unmöglichkeit aus dem Vorstehenden nicht zu ersehen. Einen positiven Grund für dieselbe liefert indes folgende Betrachtung.

Die Configuration, von der wir ausgiengen, zeichnete sich vor allen andern dadurch aus, dass 16 Abstände R bereits ihren kleinsten Wert 2 hatten. Daraus erhielten wir 16 Relationen zwischen den 16 Verschiebungscomponenten α, β. Da diese in 1. Ordnung homogen linear waren, so mussten, wofern keine identischen Relationen vorkamen, alle mit einer verschwinden. Bei jeder andern Configuration erhält man weniger Relationen, z. B. bei der Würfelform nur 12. Daher bleiben einige der α, β unabhängig variabel, mithin disponibel zur Vergrösserung der ϱ in 2. Ordnung, d. i. zur Verkleinerung von r, so dass ein Minimum nicht vorkommen kann, bis 16 Grössen R = 2 geworden sind.

Zur Untersuchung des Falles $n = 7$ gehen wir vom Würfel aus. Seine Diagonale sei z Axe; die yz Ebene gehe durch deren Enden und durch 2 andre Würfelecken. Die Kugel K am einen Ende der Diagonale ($z = r$) falle weg; ihr zunächst liegen 3 Kugeln (1, 2, 3), deren Mittelpunkte ein gleichseitiges Dreieck normal zur z Axe bilden. Ihr gemeinsames $z = a$ lässt sich durch Parallelverschiebung der Ebene vergrössern, bis die Kugeln zur Berührung gelangen, die Dreiecksseiten also $= 2$ werden. Die folgenden 3 Kugeln (4, 5, 6) liegen gleichfalls bei gemeinsamem $z = -b$ in einem Dreieck, dessen Seiten $= 2c$, normal zur z Axe. Dann sind die Coordinaten der Ecken:

	x	y	z		x	g	z	7
1	0	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	a	4	0	$\frac{2c}{\sqrt{3}}$	$-b$	$x = 0$
2	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	a	5	$-c$	$-\frac{c}{\sqrt{3}}$	$-b$	$y = 0$
3	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	a	6	c	$-\frac{c}{\sqrt{3}}$	$-b$	$z = -r$

Damit M von allen K berührt wird, muss sein:

$$\frac{4}{3} + a^2 = r^2; \quad \frac{4c^2}{3} + b^2 = r^2 \qquad (1) \quad (2)$$

damit sich die K in der Reihenfolge 1, 6, 2, 4, 3, 5 berühren:

$$4\frac{c^2 - c + 1}{3} + (a + b)^2 = 4 \qquad (3)$$

damit die Polkugel 7 von den nächst liegenden Kugeln 4, 5, 6 berührt wird:

$$\frac{4c^2}{3} + (r - b)^2 = 4 \qquad (4)$$

Addirt man die Gl. (1) (3) und subtrahirt (4), so kommt:

$$\frac{4c}{3} = 2b(r + a) \qquad (5)$$

Gl. (4) gibt nach Subtraction der Gl. (2):

$$r(r - b) = 2 \qquad (6)$$

daher ist

$$b = \frac{r^2 - 2}{r}; \qquad c = \frac{3}{2}\,\frac{r^2 - 2}{r}(r + a) \qquad (7)$$

Jetzt hat man nach Gl. (2):

$$\frac{4c^2}{3} = r^2 - b^2 = r^2 - \left(\frac{r^2-2}{r}\right)^2 = 4\frac{r^2-1}{r^2}$$

also:

$$c^2 = 3\frac{r^2-1}{r^2} \tag{8}$$

und nach Einsetzung des Wertes (7):

$$\frac{4}{3}(r^2-1) = (r^2-2)^2(r+a)^2 \tag{9}$$

Erfüllt man Gl. (1) durch

$$r^2 = \frac{4}{3}\frac{1}{1-p^2}; \quad a^2 = \frac{4}{3}\frac{p^2}{1-p^2} \tag{10}$$

und lässt p von gleichem Vorzeichen mit a sein, so geht Gl. (9) über in

$$3(1-p)^2(1+3p^2) = 4(3p^2-1)^2$$

entwickelt lautet sie:

$$27p^4 + 18p^3 - 36p^2 + 6p + 1 = 0$$

une nach Division durch $3p-1$:

$$9p^3 + 9p^2 - 9p - 1 = 0$$

Hieraus ergeben sich leicht die 3 übrigen Wurzeln, und man hat:

$$p = \frac{4\cos\varkappa\nu - 1}{3}; \quad \lambda = 4, 6, 8, 16; \quad \nu = \frac{R}{9}$$

das ist in Zahlen:

$$3p = \begin{cases} 2{,}06418 \\ 1 \\ -0{,}30541 \\ -4{,}75877 \end{cases}$$

Nun muss r ein Mittel sein zwischen seinen Werten für Oktaeder und Würfel, also

$$2 < r^2 < 3$$

woraus nach (10):

$$\sqrt{3} < \pm 3p < \sqrt{5}$$

Da dem nur die erste Wurzel entspricht, so ist ausschliesslich

$$p = \frac{4\cos 4\nu - 1}{3}$$

daher nach (10)

$$r^2 = \frac{12}{9-(4\cos 4\nu - 1)^2} = \frac{3}{2(2\cos 4\nu + 1)(1-\cos 4\nu)}$$
$$= \frac{3}{4(3-4\sin^2 2\nu)\sin^2 2\nu} = \frac{3}{4\sin 6\nu \sin 2\nu} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 2\nu}$$

das ist

$$r = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\sin 2\nu}} = 1{,}59125 \tag{11}$$

Dieser Wert ist nicht nur $< \sqrt{3}$, sondern auch kleiner als das gefundene Minimum für 8 Kugeln. Es fragt sich, ob er für 7 Kugeln Minimum ist.

Zunächst sind noch die Coordinaten der Mittelpunkte der K zu berechnen. Nach (10) ist

$$a = rp = \frac{4\cos 4\nu - 1}{\sqrt{6}\sqrt{3\sin 2\nu}} = 1{,}09486 \tag{12}$$

nach (7) (11)

$$b = r\left(1-\frac{2}{r^2}\right) = \left(1-\frac{4\sin 2\nu}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\sin 2\nu}} = 0{,}30519 \tag{13}$$

nach (8)

$$c^2 = 3\left(1-\frac{1}{r^2}\right) = 2\sqrt{3}(\cos 3\nu - \cos 7\nu) = 4\sqrt{3}\sin 2\nu \cos 4\nu$$

$$c = 2\sqrt{\sqrt{3}\sin 2\nu \cos 4\nu} = 1{,}34731 \tag{14}$$

Von den so bestimmten Punkten aus mögen nun die K unendlich kleine Verschiebungen erleiden, deren Componenten wie oben mit α, β, γ bezeichnet seien. Für jedes sich anfänglich berührende Par von K gehe R^2 aus 4 über in $4+\varrho$. Dann ist in 1. Ordnung

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{12} &= 2(\alpha_2-\alpha_1)+2\sqrt{3}(\beta_2-\beta_1) \\ \varrho_{13} &= 2(\alpha_1-\alpha_3)+2\sqrt{3}(\beta_3-\beta_1) \\ \varrho_{23} &= 4(\alpha_2-\alpha_3) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\varrho_{47} = \frac{4c}{\sqrt{3}}(\beta_4-\beta_7)+2(r-b)(\gamma_4-\gamma_7)$$

$$\varrho_{57} = 2c(\alpha_7-\alpha_5)+\frac{2c}{\sqrt{3}}(\beta_7-\beta_5)+2(r-b)(\gamma_5-\gamma_7)$$

$$\varrho_{67} = 2c(\alpha_6-\alpha_7)+\frac{2c}{\sqrt{3}}(\beta_7-\beta_6)+2(r-b)(\gamma_6-\gamma_7)$$

$$\varrho_{16} = 2c(\alpha_6-\alpha_1)+2\,\frac{2-c}{\sqrt{3}}(\beta_6-\beta_1)+2(a+b)(\gamma_1-\gamma_6)$$

$$\varrho_{26} = 2(c-1)(\alpha_6-\alpha_2)+2\frac{c+1}{\sqrt{3}}(\beta_2-\beta_6)+2(a+b)(\gamma_2-\gamma_6)$$

$$\varrho_{24} = 2(\alpha_2-\alpha_4)+2\frac{2c-1}{\sqrt{3}}(\beta_4-\beta_2)+2(a+b)(\gamma_2-\gamma_4)$$

$$\varrho_{34} = 2(\alpha_4-\alpha_3)+2\frac{2c-1}{\sqrt{3}}(\beta_4-\beta_3)+2(a+b)(\gamma_3-\gamma_4)$$

$$\varrho_{35} = 2(c-1)(\alpha_3-\alpha_5)+2\frac{c+1}{\sqrt{3}}(\beta_3-\beta_5)+2(a+b)(\gamma_3-\gamma_5)$$

$$\varrho_{15} = 2c(\alpha_1-\alpha_5)+2\frac{2-c}{\sqrt{3}}(\beta_5-\beta_1)+2(a+b)(\gamma_1-\gamma_5)$$

Die α, β, γ sind von einander abhängig durch die auf alle K anzuwendende Bedingung:

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

woraus in 1. Ordnung:

$$a\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\beta_1 \qquad b\gamma_4 = \frac{2c}{\sqrt{3}}\beta_4 \qquad \gamma_7 = 0$$

$$a\gamma_2 = -\alpha_2-\frac{1}{\sqrt{3}}\beta_2 \qquad b\gamma_5 = -c\alpha_5-\frac{c}{\sqrt{3}}\beta_5$$

$$a\gamma_3 = \alpha_3-\frac{1}{\sqrt{3}}\beta_3 \qquad b\gamma_6 = c\alpha_6-\frac{c}{\sqrt{3}}\beta_6$$

Dem zufolge wird nach Elimination der γ

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_{47} &= \frac{4c}{\sqrt{3}}\left(\frac{r}{b}\beta_4-\beta_7\right)\\
\varrho_{57} &= 2c\left(\alpha_7-\frac{r}{b}\alpha_5\right)+\frac{2c}{\sqrt{3}}\left(\beta_7-\frac{r}{b}\beta_5\right)\\
\varrho_{67} &= 2c\left(\frac{r}{b}\alpha_6-\alpha_7\right)+\frac{2c}{\sqrt{3}}\left(\beta_7-\frac{r}{b}\beta_6\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

$$\varrho_{16} = -2c\left(\alpha_1+\frac{a}{b}\alpha_6\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(c+\frac{2b}{a}\right)\left(\beta_1+\frac{a}{b}\beta_6\right)$$

$$\varrho_{26} = -2\left(c+\frac{b}{a}\right)\left(\alpha_2+\frac{a}{b}\alpha_6\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(c-\frac{b}{a}\right)\left(\beta_2+\frac{a}{b}\beta_6\right)$$

$$\varrho_{24} = -2\left(\alpha_4+\frac{b}{a}\alpha_2\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2c+\frac{b}{a}\right)\left(\beta_2+\frac{a}{b}\beta_4\right)$$

$$\varrho_{34} = 2\left(\alpha_4+\frac{b}{a}\alpha_3\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2c+\frac{b}{a}\right)\left(\beta_3+\frac{a}{b}\beta_4\right)$$

$$\varrho_{35} = 2\left(c+\frac{b}{a}\right)\left(\alpha_3+\frac{a}{b}\alpha_5\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(c-\frac{b}{a}\right)\left(\beta_3+\frac{a}{b}\beta_5\right)$$

$$\varrho_{15} = 2c\left(\alpha_1+\frac{a}{b}\alpha_5\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(c+\frac{2b}{a}\right)\left(\beta_1+\frac{a}{b}\beta_5\right)$$

Bezeichnet man die 3 ersten ϱ in (15) durch ϱ', die 3 folgenden in (16) durch ϱ'', die 6 übrigen durch ϱ''', so ist zufolge ihrer Werte

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2b}{a}+c\right)\Sigma\varrho'+\frac{1}{r}\left(2a+\frac{b}{c}\right)\Sigma\varrho''+\Sigma\varrho'''=0$$

folglich sind, sofern kein ϱ negativ sein kann, alle ϱ null.

Nimmt man nun, um eine Gesamtrotation der ganzen Figur auszuschliessen,

$$\alpha_1=0;\quad \beta_1=0;\quad \alpha_2=0$$

so ergibt sich, nachdem man alle ϱ null gesetzt hat, aus den Gl. (15) sofort auch:

$$\alpha_3=0;\quad \beta_2=0;\quad \beta_3=0$$

wodurch die letzten 6 Gleichungen übergehen in

$$c\alpha_6=\left(c+\frac{2b}{a}\right)\frac{\beta_6}{\sqrt{3}};\quad \left(c+\frac{b}{a}\right)\alpha_6=\left(c-\frac{b}{a}\right)\frac{\beta_6}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha_4=-\left(1+\frac{2ac}{b}\right)\frac{\beta_4}{\sqrt{3}};\quad \alpha_4=\left(1+\frac{2ac}{b}\right)\frac{\beta_4}{\sqrt{3}}$$

$$\left(c+\frac{b}{a}\right)\alpha_5=-\left(c-\frac{b}{a}\right)\frac{\beta_5}{\sqrt{3}};\quad c\alpha_5=-\left(c+\frac{2b}{a}\right)\frac{\beta_5}{\sqrt{3}}$$

Die neben einander stehenden Gleichungen lassen sich offenbar nur durch Nullsetzung aller α und β vereinen.

Aus den Gl. (16) folgt dann, wie leicht zu sehen, auch

$$\alpha_7=0\quad\text{und}\quad\beta_7=0.$$

Es hat sich ergeben, dass eine relative Verschiebung der K von der in Rede stehenden Configuration aus für constantes r unmöglich ist, also ein wachsendes r verlangt. Folglich ist der Wert (11) ein Minimum.

Hieran will ich noch zwei Bemerkungen knüpfen.

Nach dem Vorstehenden scheint es, dass überhaupt diejenige Configuration der K dem kleinsten r entspricht, welche die grösstmögliche Anzahl von Berührungen enthält.

Zwei Einwänden, die sich durch leichte Betrachtung heben, will ich nur nachträglich begegnen. Obgleich in den 2 untersuchten Fällen bei jeder Verschiebung alle ϱ in 1. Ordnung null sind, war es nicht überflüssig die Unmöglichkeit einer Verschiebung besonders zu beweisen. Denn könnte eine Verschiebung stattfinden, so wären die R eines Wachsens in 2. Ordnung fähig; bei gehöriger Verteilung der Incremente würden alle Berührungen der K aufhören, mithin eine Verkleinerung von r zulassen. Dagegen konnte, nachdem alle α, β, γ in 1. Ordnung null waren, eine Frage nach höherer Ordnung nicht mehr entstehen, weil die niedrigste Ordnung immer die Stelle der ersten einnimmt, und der Beweis für das Verschwinden auf sie anwendbar wird.

Kurze Notizen betreffend die Fälle von 9, 10 und 11 Kugeln.

Neun K lassen sich auf 3 parallelen Ebenen in Form dreier gleichseitigen Dreiecke ordnen. Die mittelste Ebene ist Aequator, die je 3 Kugeln auf den 2 äussersten berühren einander und ausserdem sechsfach den Mittelkranz. Im ganzen finden also 18 Berührungen statt. Die Figur hat 4 Symmetrieebenen, so dass die Berechnung leicht ist. Es ergibt sich:

$$r = \sqrt{3}$$

wie bei 8 Kugeln in Würfelform, und man hat den eigentümlichen Satz:

Eine Kugel M, die von 8 Kugeln K in Würfelform berührt wird, kann gerade noch von einer 9ten Kugel K in andrer Anordnung berührt werden.

Schaltet man am Pole vom M eine 10te K ein, welche die Berührung des nächsten Kugelkranzes natürlich aufheben muss, so fällt die Symmetrie in Bezug auf den Aequator weg. Die Gleichung für r würde entwickelt von sehr hohem Grade sein. Die approximative Lösung ist daher leichter am ursprünglichen Gleichungssystem zu vollziehen; sie ergibt:

$$r = 1{,}83397$$

Dieser Wert ist um 0,06814 kleiner als der für 12 Kugeln.

Schaltet man ebenso am andern Pole eine 11te Kugel ein, so wird die Symmetrie in Bezug auf den Aequator wieder hergestellt. Die Gleichung für r wird dann einfach und gibt genau denselben

Wert als den für 12 Kugeln. Es zeigt sich also, dass auf derselben Kugel M 11 Kugeln K in zweierlei Ordnung sich auflegen lassen, in der eben genannten und in der Ikosaederform mit Wegfall einer Ecke. Bei ersterer finden nur 18, bei letzterer 25 Berührungen der K unter einander statt. Ist der so erhaltene Wert von r wirklich der kleinst mögliche, so ist die Analogie des Falles mit dem bei 5 Kugeln hervorgetretenen bemerkenswert. Nämlich 6 und 12 Kugeln sind, was man so nennen kann, einer vollkommenen Berührung fähig, d. h. wo alle K, die eine K berühren, auch einander der Reihe nach berühren, so dass eine Verschiebung nicht denkbar ist. Lässt man nun eine Kugel K weg, so lässt sich bei aller Verschiebung r nicht kleiner machen. Auf 4 Kugeln, die sich gleichfalls vollkommen berühren, findet der Satz keine Anwendung.

X.

Zur Transformation der Thetafunctionen.

Von

Ferdinand Müller

aus Parchim.

In seinem handschriftlichen Nachlasse bringt Gauss meist ohne Ableitung und Beweis eine Reihe sehr eleganter Beziehungen zwischen Functionen, die sich später als identisch mit den Jacobi'schen Thetafunctionen erwiesen. Die methodische Aufstellung dieser Beziehungen ist schon wiederholt der Gegenstand von mathematischen Arbeiten gewesen, besonders haben sich Herr Professor Schröter und seine Schüler vielfach mit diesem Thema beschäftigt. In der Tat ist es auch Herrn Dr. Göring gelungen, eine einheitliche und zum Teil noch erweiterte Darstellung dieser Beziehungen zu geben, und zwar auf Grund der Inaugural-Dissertation und der Habilitationsschrift von Herrn Prof. Schröter (cf. Göring, Ueber die Teilwerte der Jacobi'schen Thetafunctionen, Math. Annalen VII. 1874. Pag. 311 etc.).

In neuerer Zeit hat nun Herr Prof. Krause in den Acta mathematica 3. Pag. 93 etc. eine Notiz veröffentlicht, in der er nachweist, dass man auch unmittelbar durch die Transformationsgleichungen zu solchen Beziehungen gelangen müsse, wenn man einerseits die in ihnen auftretenden Coefficienten nach der gewöhnlichen Methode durch die Wurzelwerte der Gleichungen bestimmt und andrerseits Relationen zwischen diesen Coefficienten herstellt, indem man jedes Glied der Gleichungen nach Potenzen des Arguments entwickelt und dann die Coefficienten gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten einander gleich setzt.

In Folge dieser Wahrnehmung liess Herr Prof. Krause während des vorigen Semesters im mathematischen Seminar nach dieser Richtung hin arbeiten, und übernahm ich gegen Schluss des Semesters, nachdem für den speciellen Fall $n = 3$ die Gleichungen Göring § 3 (3) und (8) gefunden waren, die vollständige Durchführung dieser Untersuchung, um die Anwendbarkeit dieser Methode sowohl für den allgemeinen Fall, als auch für die speciellen Fälle nachzuweisen.

In der Tat stellte es sich auch im Laufe der Arbeit heraus, dass man auf diesem Wege nicht nur die Göring'schen Formeln erhält, sondern eine unbeschränkte Anzahl von Beziehungen zwischen diesen Grössen aufstellen kann, dass ferner die von Göring angegebenen Formeln zum Teil in viel allgemeinerem Sinne gelten, und dass endlich für den allgemeinen Fall diese Methode viel weiter reicht; und dabei ist diese Methode so ausserordentlich einfach, es kommt lediglich darauf an, die Theta- resp. Elliptischen Functionen und deren Potenzen und Producte in nach Potenzen des Arguments fortschreitenden Reihen zu entwickeln und dann die erhaltenen Resultate geschickt zu combiniren. Es ist somit das nach der Göring'schen Arbeit so complicirt erscheinende Problem zurückgeführt auf das in neuerer Zeit so vielfach behandelte Problem die Theta- resp. Elliptischen Functionen und deren Potenzen in Potenzreihen zu entwickeln. Die Arbeiten, die hierfür besonders in Betracht kommen, sind:

Jacobi, Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenzreihen Crelle Journal LIV. 1857 (cf. auch Schellbach, Elliptische Integrale §§ 93—96).

Die Arbeiten von Didon (Annales de Mathématiques 1872)
von Moreau Nouvelles Annales 1876
von Hermite Crelle Journal 1876 und besonders
Désiré André, Développements en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances. Annales de l'École Normale VI. 1878. Pag. 265 etc.

Charakterisch ist noch für diese Methode, dass die Beziehungen zwischen den transformirten Thetafunctionen mit dem Argument 0 unter einander von den Beziehungen zwischen diesen und den Teilwerten der Thetafunctionen vollständig unabhängig gefunden werden.

In der vorliegenden Arbeit ist nur erst der specielle Fall der unpaaren Transformation behandelt, es leuchtet jedoch sofort ein, dass die hier befolgte Methode mit unwesentlichen Modificationen auch auf den paaren Transformationsgrad angewandt werden kann.

— Besonderes Gewicht ist darauf gelegt, für die speciellen Fälle sämmtliche unter diesen Gesichtspunkt fallende Gauss'sche und Göring'sche Relationen zu erhalten, und habe ich deshalb unter jeder Formel die entsprechende Göring'sche in Klammer citirt und nur die nicht von Göring gebrachten Relationen zum Teil mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Was speciell den Gang der Abhandlung anlangt, so sind im ersten Abschnitt die Beziehungen zwischen den transformirten Thetafunctionen für das Argument 0, also die sogenannten Gauss'schen Relationen, aufgestellt und im zweiten Abschnitt die Beziehungen zwischen diesen und den Teilwerten der Thetafunctionen, und zwar befindet sich für jeden Abschnitt in § 1 das zu Grunde gelegte Material zusammengestellt, in § 2 die allgemeinen Untersuchungen, in § 3 die speciellen Betrachtungen für $n = 3$, und in § 4 die für $n = 5$.

Schliesslich möchte ich noch an dieser Stelle Herrn Prof. Krause öffentlich meinen Dank aussprechen für das Interesse, welches er dieser Arbeit stets entgegenbrachte, und für die Bereitwilligkeit, mit der er mir zu jeder Zeit die nötigen Hülfsmittel an die Hand gab.

Abschnitt I.

§ 1.

Für diese ganze Arbeit kommt nur in Betracht die Kenntnis der Theorie der Thetafunctionen und der elliptischen Functionen, soweit Jacobi sie in den ersten sechs Paragraphen seiner Abhandlung „Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet" bringt, also die Kenntnis des Zusammenhanges der Thetafunctionen unter einander und mit dem elliptischen Integral erster Gattung und das Additionstheorem der Thetafunctionen und der elliptischen Functionen; ferner die Kenntnis der drei Transformationsgleichungen für den unpaaren Transformationsgrad, welche die Grundlage dieser ganzen Abhandlung bilden:

$$\text{I.}\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v',\tau') = x_1\vartheta_1^{n}(v,\tau)+x_2\vartheta_1^{n-2}(v,\tau)\vartheta_0^{2}(v,\tau)+\dots$$
$$\dots+x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_1(v,\tau)\vartheta_0^{n-1}(v,\tau)$$

$$\text{II.}\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v',\tau') = x_1\vartheta_1^{n}(v,\tau)+x_2\vartheta_1^{n-2}(v,\tau)\vartheta_2^{2}(v,\tau)+\dots$$
$$\dots+x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_1(v,\tau)\vartheta_2^{n-1}(v,\tau)$$

$$\text{III.}\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v',\tau') = x_1\vartheta_1{}^n(v,\tau) + x_2\vartheta_1{}^{n-2}(v,\tau)\vartheta_3{}^2(v,\tau) + \dots$$
$$\dots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_1(v,\tau)\vartheta_3{}^{n-1}(v,\tau)$$

wo n irgend eine beliebige ungerade Zahl ist, ferner $v' = tv$, $\tau' = \frac{t\tau - 8\xi}{t_1}$, wenn t ein Teiler von n, $t_1 = \frac{n}{t}$ und ξ eine beliebige ganze Zahl (0 incl.) $< t_1$, aber ohne einen gemeinsamen Teiler mit t und t_1 zugleich ist.

(cf. Königsberger, die Transformation der elliptischen Functionen).

Vermehrt man in diesen Gleichungen das Argument um halbe Perioden der Einheit und des Moduls τ, so folgen aus denselben unmittelbar auch die Ausdrücke für die drei andern transformirten Thetafunctionen, so dass man aus diesen drei Gleichungen sofort drei Gleichungssysteme von je vier Gleichungen erhält, die man vereinigt so schreiben kann:

A.

$$1)\quad \vartheta_{\alpha_1}(v',\tau') = x_1\vartheta_{\alpha_1}{}^n(v,\tau) \pm x_2\vartheta_{\alpha_1}{}^{n-2}(v,\tau)\vartheta_1{}^2(v,\tau) + \dots$$
$$\dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_{\alpha_1}(v,\tau)\vartheta_1{}^{n-1}(v,\tau)$$

$$2)\quad \vartheta_{\alpha_2}(v',\tau') = x_1\vartheta_{\alpha_2}{}^n(v,\tau) \pm x_2\vartheta_{\alpha_2}{}^{n-2}(v,\tau)\vartheta_{\alpha_3}{}^2(v,\tau) + \dots$$
$$\dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_{\alpha_2}(v,\tau)\vartheta_{\alpha_3}{}^{n-1}(v,\tau)$$

$$3)\quad \vartheta_{\alpha_3}(v',\tau') = x_1\vartheta_{\alpha}{}^n(v,\tau) \pm x_2\vartheta_{\alpha_3}{}^{n-2}(v,\tau)\vartheta_{\alpha_2}{}^2(v,\tau) + \dots$$
$$\dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_{\alpha_3}(v,\tau)\vartheta_{\alpha_2}{}^{n-1}(v,\tau)$$

$$4)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v',\tau') = x_1\vartheta_1{}^n(v,\tau) + x_2\vartheta_1{}^{n-2}(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^2(v,\tau) + \dots$$
$$\dots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_1(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^{n-1}(v,\tau)$$

wo die Indices α nach einander für die drei Fälle die Werte annehmen:

für I. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$

für II. $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 0$

für III. $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 2$

und wo im ersten Fall rechts überall das positive Zeichen zu wählen ist, im zweiten in den Ausdrücken für ϑ_{α_2} und ϑ_{α_3} abwechselnd positives und negatives Zeichen, und ein gleiches im dritten Fall in den Ausdrücken für ϑ_{α_1} und ϑ_{α_2}.

Man kann nun schon diese sich unmittelbar ergebenden Gleichungssysteme zu Grunde legen und aus ihnen Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen mit dem Argument 0 herstellen, indem man auf beiden Seiten jedes Glied nach Potenzen von v entwickelt, nach Potenzen von v ordnet und dann die Coefficienten gleich hoher Potenzen von v auf beiden Seiten einander gleich setzt. Die Anzahl der sich so ergebenden Relationen wird um so grösser sein, da ausser den zu eliminirenden unbekannten Grössen x nur noch die Unbekannten $\vartheta_\alpha''(0,\tau)$ und $\vartheta_\alpha''(0,\tau')$ auftreten, wo man α fest gleich 0, 2 oder 3 annehmen kann, denn man kann ja die zweiten und höheren Ableitungen aller Thetafunctionen durch die Thetafunctionen selbst und die zweite Ableitung einer einzigen der drei genannten Thetafunctionen ausdrücken.

Hierbei aber tritt der Umstand erschwerend ein, dass diese zweiten Ableitungen nicht nur linear auftreten, sondern auch die Potenzen derselben. Deshalb ist es besser, man legt den Betrachtungen diese Gleichungen in der Form zu Grunde, wie sie Herr Prof. Krause für den Fall I. in seiner Notiz, Acta mathematica 3. Pag. 95 unter (3) angiebt. Diese Gleichungen folgen unmittelbar aus den obigen durch den Zusammenhang der Thetafunctionen mit elliptischen Functionen und lauten für den Fall I. folgendermassen:

B.

I. 1)
$$\vartheta_3^n \frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0^n(v,\tau)} = x_1\vartheta_3^n + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2\,\mathrm{sn}^2(u,k) + \dots$$
$$\dots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}\,\mathrm{sn}^{n-1}(u,k)$$

2)
$$\frac{O_2}{O_0}\vartheta_0^n\,\mathrm{cn}(u',c)\frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0^n(v,\tau)}$$
$$= x_1\vartheta_2^n\,\mathrm{cn}^n(u,k) + x_2\vartheta_2^{n-2}\vartheta_3^2\,\mathrm{cn}^{n-2}(u,k)\,\mathrm{dn}^2(u,k) + \dots$$
$$\dots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\,\mathrm{cn}(u,k)\,\mathrm{dn}^{n-1}(u,k)$$

3)
$$\frac{O_3}{O_0}\vartheta_0^n\,\mathrm{dn}(u',c)\frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0^n(v,\tau)}$$
$$= x_1\vartheta_3^n\,\mathrm{dn}^n(u,k) + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2\,\mathrm{dn}^{n-2}(u,k)\,\mathrm{cn}^2(u,k) + \dots$$
$$\dots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}\,\mathrm{dn}(u,k)\,\mathrm{cn}^{n-1}(u,k)$$

$$4)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{O_2}{O_3}\vartheta_3^{n}\,\mathrm{sn}\,(u'\,c)\frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0^{n}(v,\tau)}$$
$$= x_1\vartheta_2^{n}\mathrm{sn}^{n}(u,k)+x_2\vartheta_2^{n-2}\vartheta_3^{2}\mathrm{sn}^{n-}\,(u,k)$$
$$\ldots+x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\mathrm{sn}(u,k)$$

wobei folgende Beziehungen stattfinden:

$$u=\pi\vartheta_3^{2}v,\quad u'=\pi O_3^{2}v'=tu\frac{O_3^{2}}{\vartheta_3^{2}},\quad k=\frac{\vartheta_2^{2}}{\vartheta_3^{2}},\quad c=\frac{O_2^{2}}{O_3^{2}},$$

wenn man setzt

$$\vartheta_\alpha(0,\tau)=\vartheta_\alpha\quad\text{und}\quad\vartheta_\alpha(0,\tau')=O_\alpha.$$

Aehnliche, jedoch nicht so analoge Ausdrücke, dass man sie wie die Gleichungssysteme A. zusammenfassen kann, ergeben sich, wenn man A_{II} und A_{III} umformt. Der Kürze wegen gebe ich sie hier nicht an, zumal man sie sehr leicht aus den Gleichungssytemen A ableiten kann.

Um nun aus diesen Gleichungen Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen zu erhalten, muss man die elliptischen Functionen sn, cn, dn, sowie die Potenzen und Producte derselben nach Potenzen von u entwickeln. Es ist nun aber nach Königsberger, Elliptische Functionen II. Pag. 81 und 82, wenn man die Moduln und Complementarmoduln durch die Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausdrückt:

$$\mathrm{sn}(u)=u-\frac{u^3}{3!}\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4}+\frac{u^5}{5!}\frac{\vartheta_2^8+4\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8}$$
$$-\frac{u^7}{7!}\frac{\vartheta_2^{12}+135\vartheta_2^8\vartheta_3^4+135\vartheta_2^4\vartheta_3^8+\vartheta_3^{12}}{\vartheta_3^{12}}+\ldots$$

$$\mathrm{cn}(u)=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}\frac{4\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4}-\frac{u^6}{6!}\frac{16\vartheta_2^8+44\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8}+\ldots$$

$$\mathrm{dn}(u)=1-\frac{u^2}{2!}\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}+\frac{u^4}{4!}\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}\frac{4\vartheta_3^4+\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}-\frac{u^6}{6!}\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}\frac{\vartheta_2^8+44\vartheta_2^4\vartheta_3^4+16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8}$$
$$+\ldots$$

$$\mathrm{sn}^2(u)=u^2-\frac{2}{3!}u^4\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4}+\frac{1}{3.5!}u^6\frac{16\vartheta_2^8+44\vartheta_2^4\vartheta_3^4+16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8}-\ldots$$

$$\mathrm{sn}^3(u)=u^3-\frac{1}{2}u^5\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4}+\frac{1}{5!}u^7\frac{13\vartheta_2^8+32\vartheta_2^4\vartheta_3^4+13\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8}-\ldots$$

$$\mathrm{sn}^4(u)=u^4-u^6\frac{4}{3!}\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4}+\ldots$$

$$\mathrm{sn}^5(u) = u^5 - u^7 \frac{5}{3!} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} + \ldots$$

. . . .

$$\mathrm{cn}^2(u) = 1 - u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{3.5!} \frac{16\vartheta_2^8 + 104\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{cn}^3(u) = 1 - \frac{3}{2!} u^2 + u^4 \frac{3}{4!} \frac{4\vartheta_2^4 + 7\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{2.5!} \frac{16\vartheta_2^8 + 164\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 61\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{cn}^4(u) = 1 - \frac{4}{2!} u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{2\vartheta_2^4 + 5\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{2}{3.5!} \frac{16\vartheta_2^8 + 224\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 136\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{cn}^5(u) = 1 - \frac{5}{2!} u^2 + u^4 \frac{1}{4!} \frac{20\vartheta_2^4 + 65\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{6!} \frac{80\vartheta_2^8 + 1420\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 1205\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

. . . .

$$\mathrm{dn}^2(u) = 1 - \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{3.5!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{16\vartheta_2^8 + 104\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}^3(u) = 1 - \frac{3}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} u^2 + u^4 \frac{3\vartheta_1^4(7\vartheta_2^4 + 4\vartheta_3^4)}{\vartheta_3^4.\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{2.5!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{61\vartheta_2^8 + 164\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}^4(u) = 1 - \frac{4}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{5\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{2}{3.5!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{136\vartheta_2^8 + 244\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}^5(u) = 1 - \frac{5}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} u^2 + u^4 \frac{1}{4!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{65\vartheta_2^4 + 20\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{6!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{1205\vartheta_2^8 + 1420\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 80\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

. . . .

Ich habe hier diese Entwicklungen und nicht die Jacobi'schen zu Grunde gelegt, weil sie sich in dieser Form besser für unsern Zweck eignen; und ferner habe ich die Potenzen aus den einfachen

$$4)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{O_2}{O_3}\vartheta_3^{\,n}\,\mathrm{sn}\,(u'\,c)\,\frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0^{\,n}(v,\tau)}$$
$$= x_1\vartheta_2^{\,n}\mathrm{sn}^n(u,k)+x_2\vartheta_2^{\,n-2}\vartheta_3^{\,2}\mathrm{sn}^{n-}\,(u,k)$$
$$\ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{\,n-1}\mathrm{sn}(u,k)$$

wobei folgende Beziehungen stattfinden:

$$u = \pi\vartheta_3^{\,2}v,\quad u' = \pi O_3^{\,2}v' = tu\frac{O_3^{\,2}}{\vartheta_3^{\,2}}.\quad k = \frac{\vartheta_2^{\,2}}{\vartheta_3^{\,2}}.\quad c = \frac{O_2^{\,2}}{O_3^{\,2}}.$$

wenn man setzt

$$\vartheta_\alpha(0,\tau) = \vartheta_\alpha \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha(0,\tau') = O_\alpha.$$

Aehnliche, jedoch nicht so analoge Ausdrücke, dass man sie wie die Gleichungssysteme A. zusammenfassen kann, ergeben sich, wenn man A_{II} und A_{III} umformt. Der Kürze wegen gebe ich sie hier nicht an, zumal man sie sehr leicht aus den Gleichungssytemen A ableiten kann.

Um nun aus diesen Gleichungen Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen zu erhalten, muss man die elliptischen Functionen sn, cn, dn, sowie die Potenzen und Producte derselben nach Potenzen von u entwickeln. Es ist nun aber nach Königsberger, Elliptische Functionen II. Pag. 81 und 82, wenn man die Moduln und Complementarmoduln durch die Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausdrückt:

$$\mathrm{sn}(u) = u - \frac{u^3}{3!}\,\frac{\vartheta_2^{\,4}+\vartheta_3^{\,4}}{\vartheta_3^{\,4}} + \frac{u^5}{5!}\,\frac{\vartheta_2^{\,8}+4\vartheta_2^{\,4}\vartheta_3^{\,4}+\vartheta_3^{\,8}}{\vartheta_3^{\,8}}$$
$$-\frac{u^7}{7!}\,\frac{\vartheta_2^{\,12}+135\vartheta_2^{\,8}\vartheta_3^{\,4}+135\vartheta_2^{\,4}\vartheta_3^{\,8}+\vartheta_3^{\,12}}{\vartheta_3^{\,12}} + \ldots$$

$$\mathrm{cn}(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!}\,\frac{4\vartheta_2^{\,4}+\vartheta_3^{\,4}}{\vartheta_3^{\,4}} - \frac{u^6}{6!}\,\frac{16\vartheta_2^{\,8}+44\vartheta_2^{\,4}\vartheta_3^{\,4}+\vartheta_3^{\,8}}{\vartheta_3^{\,8}} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}(u) = 1 - \frac{u^2}{2!}\,\frac{\vartheta_2^{\,4}}{\vartheta_3^{\,4}} + \frac{u^4}{4!}\,\frac{\vartheta_2^{\,4}}{\vartheta_3^{\,4}}\,\frac{4\vartheta_3^{\,4}+\vartheta_2^{\,4}}{\vartheta_3^{\,4}} - \frac{u^6}{6!}\,\frac{\vartheta_2^{\,4}}{\vartheta_3^{\,4}}\,\frac{\vartheta_2^{\,8}+44\vartheta_2^{\,4}\vartheta_3^{\,4}+16\vartheta_3^{\,8}}{\vartheta_3^{\,8}}$$
$$+ \ldots$$

$$\mathrm{sn}^2(u) = u^2 - \frac{2}{3!}u^4\,\frac{\vartheta_2^{\,4}+\vartheta_3^{\,4}}{\vartheta_3^{\,4}} + \frac{1}{3.5\,!}u^6\,\frac{16\vartheta_2^{\,8}+44\vartheta_2^{\,4}\vartheta_3^{\,4}+16\vartheta_3^{\,8}}{\vartheta_3^{\,8}} - \ldots$$

$$\mathrm{sn}^3(u) = u^3 - \frac{1}{2}u^5\,\frac{\vartheta_2^{\,4}+\vartheta_3^{\,4}}{\vartheta_3^{\,4}} + \frac{1}{5!}u^7\,\frac{13\vartheta_2^{\,8}+32\vartheta_2^{\,4}\vartheta_3^{\,4}+13\vartheta_3^{\,8}}{\vartheta_3^{\,8}} - \ldots$$

$$\mathrm{sn}^4(u) = u^4 - u^6\,\frac{4}{3!}\,\frac{\vartheta_2^{\,4}+\vartheta_3^{\,4}}{\vartheta_3^{\,4}} + \ldots$$

$$\mathrm{sn}^5(u) = u^5 - u^7 \frac{5}{3!} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} + \dots$$

. . . .

$$\mathrm{cn}^2(u) = 1 - u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{3.5!} \frac{16\vartheta_2^8 + 104\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \dots$$

$$\mathrm{cn}^3(u) = 1 - \frac{3}{2!} u^2 + u^4 \frac{3}{4!} \frac{4\vartheta_2^4 + 7\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{2.5!} \frac{16\vartheta_2^8 + 164\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 61\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \dots$$

$$\mathrm{cn}^4(u) = 1 - \frac{4}{2!} u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{2\vartheta_2^4 + 5\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{2}{3.5!} \frac{16\vartheta_2^8 + 224\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 136\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \dots$$

$$\mathrm{cn}^5(u) = 1 - \frac{5}{2!} u^2 + u^4 \frac{1}{4!} \frac{20\vartheta_2^4 + 65\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{6!} \frac{80\vartheta_2^8 + 1420\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 1205\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \dots$$

. . . .

$$\mathrm{dn}^2(u) = 1 - \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{3.5!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{16\vartheta_2^8 + 104\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \dots$$

$$\mathrm{dn}^3(u) = 1 - \frac{3}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} u^2 + u^4 \frac{3\vartheta_1^4(7\vartheta_2^4 + 4\vartheta_3^4)}{\vartheta_3^4 . \vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{2.5!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{61\vartheta_2^8 + 164\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \dots$$

$$\mathrm{dn}^4(u) = 1 - \frac{4}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{5\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{2}{3.5!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{136\vartheta_2^8 + 244\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \dots$$

$$\mathrm{dn}^5(u) = 1 - \frac{5}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} u^2 + u^4 \frac{1}{4!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{65\vartheta_2^4 + 20\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{6!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{1205\vartheta_2^8 + 1420\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 80\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \dots$$

. . . .

Ich habe hier diese Entwicklungen und nicht die Jacobi'schen zu Grunde gelegt, weil sie sich in dieser Form besser für unsern Zweck eignen; und ferner habe ich die Potenzen aus den einfachen

berechnet und sie nicht aus den von Désiré André gegebenen allgemeinen Resultaten durch Specialisirung abgeleitet, da ersteres für die bisher von mir behandelten speciellen Fälle viel leichter ist.

Ferner sind nun noch für die speciellen Fälle die Producte je zweier dieser Ausdrücke zu bilden und zwar die Producte, für welche die Summe der Exponenten respective $= 3, 5 \dots 2q+1$ sind. Der Kürze halber will ich jedoch auch diese hier nicht angeben, nur das möchte ich bemerken, dass die Producte $\mathrm{cn}^p(u)\,\mathrm{dn}^r(u)$ den Producten $\mathrm{cn}^r(u)\,\mathrm{dn}^p(u)$ ganz analog sind, dass man die letzteren unmittelbar bekommt, wenn man bei den Aus rücken für die ersteren die Indices 2 und 3 in den Zählern vertauscht.

Endlich ist nun noch der Quotient $\frac{\vartheta_\alpha(v', \tau')}{\vartheta_\alpha^n(v, \tau)}$ zu entwickeln. Da $v' = \frac{tu}{\pi\vartheta_3^2}$ und $v = \frac{u}{\pi\vartheta_3^2}$ ist, so kann man diesen Quotient als eine Function von u ansehen, und er wird entwickelt die Form annehmen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v', \tau')}{\vartheta_\alpha^n(v, \tau)} = f(u) = y_0 + y_1 u + y_2 u^2 + y_3 u^3 + \dots$$

Es lässt sich jedoch nachweisen und stellt sich auch bei den weiteren Untersuchungen heraus, dass alle $y_{2m+1} = 0$ sind, man erhält somit für $f(u)$ endgültig die Form:

$$f(u) = y_0 + y_2 u^2 + y_4 u^4 + \dots$$

Die Grössen y enthalten, wie man unmittelbar erkennt, wieder die Unbekannten ϑ_α'' und O_α'' und zwar in der Form $t^2 \frac{O_\alpha''}{O_\alpha} - n \frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}$ und der Potenzen von diesem Ausdruck. Wir betrachten deshalb bei der Aufstellung der Gauss'schen Relationen die y als Unbekannte und haben es so, wenn wir dann die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u auf beiden Seiten einander gleich setzen, mit Gleichungen zu tun, in denen die Unbekannten x und y nur linear auftreten, was die Elimination derselben wesentlich erleichtert.

Bei den allgemeinen Betrachtungen müssen wir die Grössen y jedoch berechnen, da dort nicht so viele Gleichungen vorliegen, um auch die y zu eliminiren.

Hierbei ist es dann wesentlich, dass man die verschiedenen Ableitungen der Thetafunctionen mit dem Argument 0 durch die Thetafunctionen mit dem Argument 0 selbst und die zweite Ableitung einer einzigen ausdrücken kann. Ich will deshalb hier die Beziehungen zwischen diesen Grössen zusammenstellen, wie sie sich aus der Ent-

wicklung der Gleichungen der Jacobi'schen Tabelle C. (Jacobi's gesammelte Werke I. Pag. 510) ergeben:

Nach der hier gewählten Bezeichnungsweise ist

$$\vartheta_1' = \pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3$$

$$\vartheta_3^3\vartheta_3'' = \vartheta_0^3\vartheta_0'' + \vartheta_2^3\vartheta_2''$$

$$\vartheta_3\vartheta_0'' = \vartheta_0\vartheta_3'' + \pi^2\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_2^4$$

$$\vartheta_3\vartheta_2'' = \vartheta_2\vartheta_3'' - \pi^2\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0^4$$

$$\vartheta_1''' = 3\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3'' - \pi^3\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4) = 3\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0'' - \pi^3\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) = \ldots$$

$$\vartheta_0^{IV} = 3\frac{\vartheta_0''^2}{\vartheta_0} - 2\pi^4\vartheta_0\vartheta_2^4\vartheta_3^4 = \ldots$$

$$\vartheta_2^{IV} = 3\frac{\vartheta_0''^2}{\vartheta_2} - 2\pi^4.\vartheta_0^4\vartheta_2\vartheta_3^4 = 3\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0^2}\vartheta_0''^2 - 6\pi^2\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\vartheta_3^4\vartheta_0'' + \pi^4\vartheta_2\vartheta_3^4(3\vartheta_3^4 - 2\vartheta_0^4) = \ldots$$

$$\vartheta_3^{IV} = 3\frac{\vartheta_3''^2}{\vartheta_3} + 2\pi^4\vartheta_0^4\vartheta_2^4\vartheta_3 = 3\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0^2}\vartheta_0''^2 - 6\pi^2\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\vartheta_2^4\vartheta_0'' + \pi^4\vartheta_2^4\vartheta_3(3\vartheta_2^4 + 2\vartheta_0^4) = \ldots$$

$$\vartheta_1^{V} = 15\pi\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0}\vartheta_0''^2 - 10\pi^3\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0''(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) + \pi^5\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2^8 + 4\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + \vartheta_3^8) = \ldots$$

. . . .

§ 2.

Setzt man in den Gleichungen B_I für die Potenzen und Producte der elliptischen Functionen und für $f(u)$ die Werte ein, so nehmen dieselben, wenn man bis zur fünften Potenz von u fortschreitet, folgende Gestalt an:

1) $$\vartheta_3^n(y_0 + y_2u^2 + y_4u^4 + \ldots) = x_1\vartheta_3^n + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2\left(u^2 - \frac{u^4}{3}\frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} + \ldots\right) + x_3\vartheta_3^{n-4}\vartheta_2^4(u^4 - \ldots) + \ldots$$

2) $$\frac{O_2}{O_0}\vartheta_0^n(y_0 - \ldots) = x_1\vartheta_2^n(1 - \ldots) + x_2\vartheta_2^{n-2}\vartheta_3^2(1 - \ldots) + \ldots$$
$$\ldots + x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2^3\vartheta_3^{n-3}(1 - \ldots) + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}(1 - \ldots)$$

$$3)\quad \frac{O_3}{O_0}\vartheta_0^n(y_0-\ldots)=x_1\vartheta_3^n(1-\ldots)+x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2(1-\ldots)+\ldots$$
$$\ldots+x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_3^3\vartheta_2^{n-3}(1-\ldots)+x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}(1-\ldots)$$

$$4)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{O_2}{O_3}\vartheta_3^n\Big\{tu\,y_0\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}-\frac{u^3}{3\,!}\Big(y_0t^3\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}\,\frac{O_2^4+O_3^4}{\vartheta_3^4}-6ty_2\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}\Big)$$
$$+\frac{u^5}{5\,!}\Big(y_0t^5\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}\,\frac{O_2^8+4O_2^4O_3^4+O_3^8}{\vartheta_3^8}$$
$$-20t^3y_2\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}\,\frac{O_2^4+O_3^4}{\vartheta_3^4}+120t\,y_4\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}\Big)-\ldots\Big\}=$$
$$x_1\vartheta_2^n(u^n-\ldots)+\ldots x_{\frac{n-3}{2}}\vartheta_2^5\vartheta_3^{n-5}(u^5-\ldots)$$
$$+x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2^3\vartheta_3^{n-3}\Big(u^3-\frac{u^5}{2}\,\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4}+\ldots\Big)$$
$$+x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\Big(u-\frac{u^3}{3!}\,\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4}+\frac{u^5}{5!}\,\frac{\vartheta_2^8+4\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8}-\ldots\Big)$$

Hieraus ergeben sich durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von u folgende Gleichungen:

Aus 1)

a) $y_0=x_1$

b) $\vartheta_3^2y_2=\vartheta_2^2x_2$

c) $3\vartheta_3^6y_4=-x_2\vartheta_2^2(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)+3x_3\vartheta_2^4\vartheta_3^2$

. . . .

Aus 2)

a) $$\frac{O_2}{O_0}\vartheta_0^ny_0=x_1\vartheta_2^n+x_2\vartheta_2^{n-2}\vartheta_3^2+\ldots$$
$$\ldots+x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2^3\vartheta_3^{n-3}+x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}$$

. . . .

Aus 3)

a) $$\frac{O_3}{O_0}\vartheta_0^ny_0=x_1\vartheta_3^n+x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2+\ldots$$
$$\ldots+x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_3^3\vartheta_2^{n-3}+x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}$$

. . . .

Aus 4)

a) $$(-1)^{\frac{t-1}{2}}tO_2O_3y_0=\vartheta_2\vartheta_3x_{\frac{n+1}{2}}$$

b) $$(-1)^{\frac{t-1}{2}}t(y_0t^2O_2O_3(O_2^4+O_3^4)-6y_2\vartheta_3^4O_2O_3)$$
$$=x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)-6x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2^3\vartheta_3^3$$

$$\text{c)}\ (-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_2 O_3 \{t^4 y_0 (O_2^8 + 4 O_2^4 O_3^4 + O_3^8) \\ - 20 t^2 y_2 \vartheta_3^4 (O_2^4 + O_3^4) + 120 y_4 \vartheta_3^8\} \\ = \vartheta_2 \vartheta_3 \{x_{\frac{n+1}{2}} (\vartheta_2^8 + 4 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^8) \\ - 60 x_{\frac{n-1}{2}} \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) + 120 x_{\frac{n-3}{2}} \vartheta_2^4 \vartheta_3^4\}$$

Man sieht nun unmittelbar, dass diese Gleichungen nicht hinreichen, um alle y und x zu eliminiren, zumal man die sich aus 2) und 3) ergebenden allgemein garnicht benutzen kann, denn in denselben treten immer alle Grössen x von x_1 bis $x_{\frac{n+1}{2}}$ auf. Wohl aber können wir mit Hülfe aller sich aus 1) und 4) ergebenden Gleichungen nach einander alle Grössen x durch Thetafunctionen mit dem Argument 0 und die Grössen y ausdrücken, und da die y sich durch die Thetafunctionen und jenen die zweite Ableitung einer derselben für das Argument 0 enthaltenden Ausdruck, darstellen lassen, so wird man jede der Grössen x durch die genannten Grössen ausdrücken können. Da dieses später für die allgemeinen Betrachtungen bei den Teilwerten der Thetafunctionen benutzt wird, so will ich es gleich hier für die Grössen x_1, x_2, x_3, $x_{\frac{n+1}{1}}$, $x_{\frac{n-1}{2}}$ und $x_{\frac{n-3}{2}}$ durchführen:

Aus dem Taylor'schen und dem Leibnitz'schen Satz ergeben sich ür die y in der Entwicklung von $\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v, \tau)}$, wenn man noch die Beziehungen zwischen den Grössen u und v berücksichtigt, folgende Werte:

$$y_0 = \frac{O_0}{\vartheta_0^n}$$

$$y_2 = \frac{1}{2!\,\pi^2} \frac{O_0}{\vartheta_3^4 \vartheta_0^n} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)$$

$$y_4 = \frac{1}{4!\,\pi^4} \frac{O_0}{\vartheta_3^8 \vartheta_0^n} \left\{3 \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2 - 2\pi^4 (t^4 O_2^4 O_3^4 - n \vartheta_2^4 \vartheta_3^4)\right\}$$

. . . .

Analoge Werte erhält man in den beiden andern Fällen für die y.

Setzt man diese Werte in die obigen Gleichungen ein, so ergeben sich für die Coefficienten folgende Ausdrücke:

I. für $\alpha_1 = 0$

$$x_1 = \frac{O_0}{\vartheta_0^n}$$

$$x_{\frac{n+1}{2}} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0^n \vartheta_2 \vartheta_3}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \frac{O_0}{\pi^2 \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 \vartheta_0^n} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)$$

$$x_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{t O_0 O_2 O_3}{6 \vartheta_0^n \vartheta_2^3 \vartheta_3^3} \left\{\frac{3}{\pi^2}\left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right) - \left(t^2(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\right)\right\}$$

$$x_3 = \frac{O_0}{\vartheta_0^n \vartheta_2^4 \vartheta_3^4} \left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2 + \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{6\pi^2}\left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right) - \frac{1}{12}(t^4 O_2^4 O_3^4 - n \vartheta_2^4 \vartheta_3^4)\right\}$$

$$x_{\frac{n-3}{2}} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{t O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0^n \vartheta_2^5 \vartheta_3^5} \left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2 - \frac{t^2(O_2^4 + O_3^4) - 3(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right) - \frac{1}{12}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\left[t^2(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\right] - \frac{1}{120}\left[t^4(O_2^8 + 4 O_2^4 O_3^4 + O_3^8) - (\vartheta_2^8 + (10n - 6)\vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^8)\right]\right\}$$

II. für $\alpha_1 = 2$

$$x_1' = \frac{O_2}{\vartheta_2^n}$$

$$x_{\frac{n+1}{2}}' = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0 \vartheta_2^n \vartheta_3}$$

$$x_2' = \frac{1}{2} \frac{O_2}{\pi^2 \vartheta_0^2 \vartheta_2^n \vartheta_3^2} \left(t^2 \frac{O_2''}{O_2} - n \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)$$

$$x_{\frac{n-1}{2}}' = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{t O_0 O_2 O_3}{6 \vartheta_0^3 \vartheta_2^n \vartheta_3^3} \left\{\frac{3}{\pi^2}\left(t^2 \frac{O_2''}{O_2} - n \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right) + \left(t^2(O_0^4 + O_3^4) - (\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4)\right)\right\}$$

$$x_2' = \frac{O_2}{\vartheta_0^4\vartheta_2^n\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(t^2\frac{O_2''}{O_2} - n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)^2\right.$$

$$\left. - \frac{\vartheta_0^4+\vartheta_3^4}{6\pi^2}\left(t^2\frac{O_2''}{O_2} - n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right) - \frac{1}{12}(t^4O_0^4O_3^4 - n\vartheta_0^4\vartheta_3^4)\right\}$$

$$x_{\frac{n-3}{2}}' = (-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{tO_0O_2O_3}{\vartheta_0^5\vartheta_2^n\vartheta_3^5}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(t^2\frac{O_2''}{O_2} - n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)^2\right.$$

$$+ \frac{t^2(O_0^4+O_3^4) - 3(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(t^2\frac{O_2''}{O_2} - n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)$$

$$- \frac{1}{12}(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)[t^2(O_0^4+O_3^4) - (\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)]$$

$$- \frac{1}{120}[t^4(O_0^8 + 4O_0^4O_3^4 + O_3^8)$$

$$\left. - (\vartheta_0^8 + (10n-6)\vartheta_0^4\vartheta_3^4 + \vartheta_3^8)]\right\}$$

III. für $\alpha_2 = 3$

$$x_1'' = \frac{O_3}{\vartheta_3^n}$$

$$x_{\frac{n+1}{2}}'' = (-1)^{\frac{t-1}{2}}t\,\frac{O_0O_2O_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_{3\,n}}$$

$$x_2'' = -\frac{1}{2}\frac{O_3}{\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_3^n}\left(t^2\frac{O_3''}{O_3} - n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)$$

$$x_{\frac{n-1}{2}}'' = (-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{tO_0O_2O_3}{6\vartheta_0^3\vartheta_2^3\vartheta_3^n}\left\{\frac{3}{\pi^2}\left(t^2\frac{O_3''}{O_3} - n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)\right.$$

$$\left. - (t^2(O_0^4 - O_2^4) - (\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4))\right\}$$

$$x_3'' = \frac{O_3}{\vartheta_0^4\vartheta_2^4\vartheta_3^n}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(t^2\frac{O_3''}{O_3} - n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4}{6\pi^2}\left(t^2\frac{O_3''}{O_3} - n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right) + \frac{1}{12}(t^4O_0^4O_2^4 - n\vartheta_0^4\vartheta_2^4)\right\}$$

$$x_{\frac{n-3}{2}}'' = (-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{tO_0O_2O_3}{\vartheta_0^5\vartheta_2^5\vartheta_3^n}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(t^2\frac{O_3''}{O_3} - n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2\right.$$

$$- \frac{t^2(O_0^4 - O_2^4) - 3(\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4)}{12\pi^2}\left(t^2\frac{O_3''}{O_3} - n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)$$

$$- \frac{1}{12}(\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4)[t^2(O_0^4 - O_2^4) - (\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4)]$$

$$- \frac{1}{120}[t^4(O_0^8 - 4O_0^4O_2^4 + O_2^8)$$

$$\left. - (\vartheta_0^8 - (10n-6)\vartheta_0^4\vartheta_2^4 + \vartheta_2^8)]\right\}.$$

§ 3.

In dem speciellen Falle $n = 3$ können wir uns auf eins der drei Gleichungssysteme B. beschränken z. B. auf B_I, denn man bekommt durch alle drei dieselben Gleichungen. Das System B_I nimmt aber für $n = 3$ folgende Form an:

$$1)\quad \vartheta_3{}^3 \frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0{}^3(v,\tau)} = x_1\vartheta_3{}^3 + x_2\vartheta_3\vartheta_2{}^2 \operatorname{sn}^2(u,k)$$

$$2)\quad \frac{O_2}{O_0}\vartheta_0{}^3 \operatorname{cn}(u',c)\frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0{}^3(v,\tau)} = x_1\vartheta_2{}^3 \operatorname{cn}^3(u,k) + x_2\vartheta_2\vartheta_3{}^2 \operatorname{cn}(u,k)\operatorname{dn}^2(u,k)$$

$$3)\quad \frac{O_3}{O_0}\vartheta_0{}^3 \operatorname{dn}(u',c)\frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0{}^3(v,\tau)} = x_1\vartheta_3{}^3 \operatorname{dn}^3(u,k) + x_2\vartheta_3\vartheta_2{}^2 \operatorname{dn}(u,k)\operatorname{cn}^2(u,k)$$

$$4)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{O_2}{O_3}\vartheta_3{}^3 \operatorname{sn}(u',c)\frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0{}^3(v,\tau)} = x_1\vartheta_2{}^3 \operatorname{sn}^3(u,k) + x_2\vartheta_2\vartheta_3{}^2 \operatorname{sn}(u,k)$$

Entwickelt man hier nun in der angegebenen Weise und setzt dann die Coefficienten gleich hoher Potenznu von u auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man, wenn man in den Entwicklungen bis zur fünften Potenz fortschreitet, folgende Gleichnugen:

$$(1)\quad y_0 = x_1$$

$$(2)\quad y_0\vartheta_0{}^3O_2 = x_1\vartheta_2{}^3O_0 + x_2\vartheta_2\vartheta_3{}^2O_0$$

$$(3)\quad y_0\vartheta_0{}^3O_3 = x_1\vartheta_3{}^3O_0 + x_2\vartheta_2{}^2\vartheta_3O_0$$

$$(4)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}} y_0tO_2O_3 = x_2\vartheta_2\vartheta_3$$

$$(5)\quad y_2\vartheta_3{}^2 = x_2\vartheta_2{}^2$$

$$(6)\quad t^2y_0\vartheta_0{}^3O_2O_3{}^4 - 2y_2\vartheta_0{}^3\vartheta_3{}^4O_2 = 3x_1\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^4O_0 + x_2\vartheta_2\vartheta_3{}^2O_0(2\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)$$

$$(7)\quad t^2y_0\vartheta_0{}^3O_2{}^4O_3 - 2y_2\vartheta_0{}^3\vartheta_3{}^4O_3 = 3x_1\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^3O_0 + x_2\vartheta_2{}^2\vartheta_3O_0(\vartheta_2{}^4 + 2\vartheta_3{}^4)$$

$$(8)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}} tO_2O_3\{-t^2y_0(O_2{}^4 + O_3{}^4) + 6y_2\vartheta_3{}^4\} = 6x_1\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^3 - x_2\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)$$

$$(9)\quad 3y_4\vartheta_3{}^6 = -x_2\vartheta_2{}^2(\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)$$

(10) $t^4 y_0 \vartheta_0^3 O_2 O_3^4 (4 O_2^4 + O_3^4) - t^2 .12 y_2 \vartheta_0^3 \vartheta_3^4 O_2 O_3^4 + 24 y_4 \vartheta_0^3 \vartheta_3^8 O_2$
$= 3x_1 \vartheta_2^3 \vartheta_3^4 O_0 (4\vartheta_2^4 + 7\vartheta_3^4) + x_2 \vartheta_2 \vartheta_3^2 O_0 (8\vartheta_2^8 + 24\vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^8)$

(11) $t^4 y_0 \vartheta_0^3 O_2^4 O_3 (O_2^4 + 4 O_3^4) - t^2 .12 y_2 \vartheta_0^3 \vartheta_3^4 O_2^4 O_3 + 24 y_4 \vartheta_0^3 \vartheta_3^8 O_3$
$= 3x_1 \vartheta_2^4 \vartheta_3^3 O_0 (7\vartheta_2^4 + 4\vartheta_3^4) + x_2 \vartheta_2^2 \vartheta_3 O_0 (\vartheta_2^8 + 24\vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + 8\vartheta_3^8)$

(12) $(-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_2 O_3 \{t^4 y_0 (O_2^8 + 4 O_2^4 O_3^4 + O_3^8)$
$- 20 t^2 y_2 \vartheta_3^4 (O_2^4 + O_3^4) + 120 y_4 \vartheta_3^8\} = - x_1 60 \vartheta_2^3 \vartheta_3^3 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$
$+ x_2 \vartheta_2 \vartheta_3 (\vartheta_2^8 + 4\vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^8).$

Diese 12 Formeln, die man ja noch beliebig vermehren kann, wenn man in den Entwicklungen weiter geht, sind eine ergiebige Quelle für Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau')$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$. Combinirt man sie nach und nach mit einander, wie es die Klammern vorn angeben, so erhält man folgende Relationen:

(1, 2, 3) I $\vartheta_3 O_3 = \vartheta_0 O_0 + \vartheta_2 O_2$

(1, 2, 4) II $\frac{\vartheta_0^3}{O_0} - \frac{\vartheta_2^3}{O_2} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \vartheta_3 O_3$

(1, 3. 4) III $\frac{\vartheta_0^3}{O_0} - \frac{\vartheta_3^3}{O_3} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \vartheta_2 O_2$

(2, 3, 4) IV $\frac{\vartheta_3^3}{O_3} - \frac{\vartheta_2^3}{O_2} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \vartheta_0 O_0$

(1, 2, 5, 6) V $t^2 O_3^4 - \vartheta_3^4 = 2 \frac{\vartheta_0 \vartheta_2}{O_0 O_2} (\vartheta_2^2 O_0^2 + \vartheta_0^2 O_2^2)$

(1, 3, 5, 7) VI $t^2 O_2^4 - \vartheta_2^4 = 2 \frac{\vartheta_0 \vartheta_3}{O_0 O_3} (\vartheta_0^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_0^2)$

(V—VI) VII $t^2 O_0^4 + \vartheta_0^4 = 2 \vartheta_0 O_0 \left(\frac{\vartheta_2^3}{O_2} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)$

(1, 5, 6, 4) VIII $t^2 O_3^4 - \vartheta_3^4 = 2 \vartheta_2 \vartheta_3 \frac{O_3}{O_2} ((-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_2^2 + \vartheta_2^2)$

(1, 5, 7, 4) IX $t^2 O_2^4 - \vartheta_2^4 = 2 \vartheta_2 \vartheta_3 \frac{O_2}{O_3} ((-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_3^2 + \vartheta_3^2)$

(VIII—IX) X $t^2 O_0^4 - \vartheta_0^4 = 2 \frac{\vartheta_2 \vartheta_3}{O_2 O_3} (\vartheta_2^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_2^2)$

(1, 2, 5, 7) XI $t^2 O_2^4 + \vartheta_2^4 = 2 \vartheta_2 O_2 \left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)$

(1, 3, 5, 6) XII $t^2 O_3^4 + \vartheta_3^4 = 2\vartheta_3 O_3 \left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_2^3}{O_2}\right)$

(1, 4, 6, 7) XIII $t O_2 O_3 \{-(-1)^{\frac{t-1}{2}} \vartheta_3^4 + t\vartheta_3^2 O_3^2 - t\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3 + t\vartheta_2^2 O_2^2$
$-(-1)^{\frac{t-1}{2}} \vartheta_2^4\} = 3\vartheta_2^3\vartheta_3^3$

(1, 2, 6, 7) XIV $t^2\vartheta_0^3 O_0^4 O_2 O_3 = 3\vartheta_2^3\vartheta_3^3\vartheta_0 O_0^2$
$+ \frac{\vartheta_0^4 O_0 O_2 - \vartheta_0\vartheta_2^3 O_0^2}{\vartheta_3}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4 - (-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3)$

(1, 3, 6, 7) XV $t^2\vartheta_0^3 O_0^4 O_2 O_3 = 3\vartheta_2^3\vartheta_3^3\vartheta_0 O_0^2$
$+ \frac{\vartheta_0^4 O_0 O_3 - \vartheta_0\vartheta_3^3 O_0^2}{\vartheta_2}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4 - (-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3)$

1, 5, 6, 7) XVI $3\vartheta_0\vartheta_2^2\vartheta_3^2 O_0(2t^2 O_2^2 O_3^2 + 3\vartheta_2^2\vartheta_3^2)$
$= t^2\vartheta_2 O_2 O_3^4(\vartheta_2^4 + 4\vartheta_3^4) - t^2\vartheta_3 O_2^4 O_3(4\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$

(1, 4, 5, 8) XVII $(-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_2 O_3\{t^2(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\}$
$= 6\vartheta_2\vartheta_3(t^2 O_2^2 O_3^2 - \vartheta_2^2\vartheta_3^2)$

(1, 2, 5, 8) XVIII $-(-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 O_2 O_3(O_2^4 + O_3^4)$
$+6(-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_0^3\vartheta_2 \frac{O_2^3 O_3}{O_0} - 6(-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_2^4 O_2 O_3$
$= 6\vartheta_2^3\vartheta_3^3 - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\left(\frac{\vartheta_0^3 O_2}{\vartheta_3 O_0} - \frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3}\right)$

(1, 3, 5, 8) XIX $-(-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 O_2 O_3(O_2^4 + O_3^4)$
$+6(-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_0^3\vartheta_3 \frac{O_2 O_3^3}{O_0} - 6(-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_3^4 O_2 O_3$
$= 6\vartheta_2^3\vartheta_3^3 - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\left(\frac{\vartheta_0^3 O_3}{\vartheta_2 O_0} - \frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_2}\right)$

(1, 4, 6, 8) XX $-(-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 O_3^4 + (-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 O_2^4$
$= -(-1)^{\frac{t-1}{2}} 9t \frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_0^3} \frac{O_0}{O_2} \vartheta_3^4 - 6\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3^3}{O_2 O_3}$
$-3t^2 \frac{\vartheta_3 O_0 O_3}{\vartheta_0^3}(2\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) + (-1)^{\frac{t-1}{2}} t(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$

$$(1,\,4,\,7,\,8)\quad \text{XXI}\quad -(-1)^{\frac{t-1}{2}}2t^3O_2^4+(-1)^{\frac{t-1}{2}}t^3O_3^4$$
$$=-(-1)^{\frac{t-1}{2}}9t\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_0^3}\frac{O_0}{O_2}\vartheta_2^4-6\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3^3}{O_2O_3}$$
$$-3t^2\frac{\vartheta_2O_0O_2}{\vartheta_0^3}(\vartheta_2^4+2\vartheta_3^4)+(-1)^{\frac{t-1}{2}}t(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)$$

$$(1,\,5,\,6,\,8)\quad \text{XXII}\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}2t^3\vartheta_0^3\vartheta_2\vartheta_3O_2^6O_3+(-1)^{\frac{t-1}{2}}2t^3\vartheta_2^4\vartheta_3O_0O_2^5O_3$$
$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}}2t^3\vartheta_2^4\vartheta_3O_0O_2O_3^5+(-1)^{\frac{t-1}{2}}t^3\vartheta_3^5O_0O_2^5O_3$$
$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}}t^3\vartheta_3^5O_0O_2O_3^5+30\vartheta_0^3\vartheta_2^4\vartheta_3^4O_2-3\vartheta_2^7\vartheta_3^4O_0$$
$$+9\vartheta_2^3\vartheta_3^8O_0=(-1)^{\frac{t-1}{2}}4t^3\vartheta_0^3\vartheta_2\vartheta_3O_2^2O_3^5$$
$$+t^2\vartheta_0^3O_2O_3^4(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)$$

$$(1,\,5,\,7,\,8)\quad \text{XXIII}\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}2t^3\vartheta_0^3\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3^6+(-1)^{\frac{t-1}{2}}2t^3\vartheta_2\vartheta_3^4O_0O_2O_3^5$$
$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}}2t^3\vartheta_2\vartheta_3^4O_0O_2^5O_3+(-1)^{\frac{t-1}{2}}t^3\vartheta_2^5O_0O_2O_3^5$$
$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}}t^3\vartheta_2^5O_0O_2^5O_3+30\vartheta_0^3\vartheta_2^4\vartheta_3^4O_3-3\vartheta_2^4\vartheta_3^7O_0$$
$$+9\vartheta_2^8\vartheta_3^3O_0=(-1)^{\frac{t-1}{2}}4t^3\vartheta_0^3\vartheta_2\vartheta_3O_2^5O_3^2$$
$$+t^2\vartheta_0^3O_2^4O_3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)$$

$$(1,\,6,\,7,\,8)\quad \text{XXIV}\quad 3t^3\vartheta_2(2\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)O_2^6O_3-3t^3\vartheta_3(2\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)O_2O_3^6$$
$$+6t^3\vartheta_3(2\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)O_2^5O_3^2-6t^3\vartheta_2(\vartheta_2^4+2\vartheta_3^4)O_2^2O_3^5$$
$$+72(-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_2^4\vartheta_3^7O_2-72(-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_2^7\vartheta_3^4O_3$$
$$+27(-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_2^8\vartheta_3^3O_2-27(-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_2^3\vartheta_3^8O_3$$
$$=-3(-1)^{\frac{t-1}{2}}t^2\vartheta_0^3O_0^3O_2O_3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)$$

Alle diese Formeln gelten für $O_\alpha=\vartheta_\alpha(0,\tau')$ und $\vartheta_\alpha=\vartheta_\alpha(0,\tau)$, also für den Fall $t=3$ für $O_\alpha=\vartheta_\alpha(0,3\tau)$ und $\vartheta_\alpha=\vartheta_\alpha(0,\tau)$, und für den Fall $t=1$ für $O_\alpha=\vartheta_\alpha\left(0,\frac{\tau-8\xi}{3}\right)$ und $\vartheta_\alpha=\vartheta_\alpha(0,\tau)$ oder, wenn man hier für $\frac{\tau-8\xi}{3}$ τ einsetzt, für $O_\alpha=\vartheta_\alpha(0,\tau)$ und $\vartheta_\alpha=\vartheta_\alpha(0,3\tau+8\xi)$. Man erhält mithin auch im letzteren Falle für $\xi=0$ Relationen zwischen $\vartheta_\alpha(0,3\tau)$ und $\vartheta_\alpha(0,\tau)$.

Specialisirt man jetzt wirklich, so erkennt man unmittelbar, dass von allen so erhaltenen 48 Gleichungen zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$ nur die ersten vier für jeden Fall Gauss'sche Relationen sind, und zwar die, welche Göring §. 3 unter (2) und (3) angiebt, und die Formel $\vartheta_3 O_3 = \vartheta_0 O_0 + \vartheta_2 O_2$, welche letztere man sowohl für $t = 3$ als auch für $t = 1$, $\xi = 0$ aus I erhält. Auch wenn man noch weiter geht und aus den obigen 12 Gleichungen noch weitere Beziehungen aufstellt, so erhält man doch keine Gauss'schen Formeln mehr — für den speciellen Fall $t = 3$ habe ich deren 53 aufgestellt und zwar die einfachsten, von diesen sind aber die letzteren schon ausserordentlich complicirt. —

Somit kann es auf den ersten Blick scheinen, als ob man durch die hier eingeschlagene Methode allerdings auch Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen erhält, aber meist neue und nicht die gewünschten Gauss'schen. Dies ist jedoch nur scheinbar der Fall, denn in Wirklichkeit sind letztere schon sämtlich in den ersten 13 dieser Gleichungen enthalten, und wir erhalten sie zum Teil noch erweitert und ausserdem eine Menge andrer Beziehungen, wenn wir die Gleichungen V—XIII mit Hülfe der ersten 4 und der bekannten sich unmittelbar aus dem Additionstheorem der Thetafunctionen ergebenden Gleichung

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4$$

umformen.

Indem ich dies jetzt durchführe, will ich zugleich hinter jeder Formel die entsprechenden Göring'schen citiren, welche für die speciellen Fälle $t = 3$ und $t = 1$, $\xi = 0$ darin enthalten sind; im letzteren Falle muss man natürlich dann immer die Θ und ϑ vertauschen, da den Θ im ersten Falle die ϑ im zweiten Fall entsprechen und umgekehrt; ferner will ich, falls die Formeln nicht unter den von Göring angegebenen enthalten sind, die analogen durch gleiche lateinische Buchstaben mit Indices bezeichnen.

Die Gleichung I giebt sowohl für $t = 3$, als $t = 1$, $\xi = 0$ die von Göring angegebene Relation

$$\vartheta_3 O_3 = \vartheta_0 O_0 + \vartheta_2 O_2,$$

für $\xi = 1$ und 2 giebt sie eine Erweiterung derselben, da O_α dann auch resp. $\vartheta_\alpha(0, 3\tau + 8)$ oder $\vartheta_\alpha(0, 3\tau + 16)$ bezeichnet.

II, III und IV geben für $t = 3$ das Göring'sche Gleichungssystem § 3, (3) und für $t = 1$, $\xi = 0$ das Gleichungssystem (2) mit einer Erweiterung wie bei I. Aus (2) und (3) folgt sofort (4).

V, VI und X liefern uns in der unmittelbar vorliegenden Form das System

$$
\text{(A)}\quad
\begin{aligned}
t^2\Theta_3^4-\vartheta_3^4 &= 2\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{\Theta_0\Theta_2}(\vartheta_2^2\Theta_0^2+\vartheta_0^2\Theta_2^2)\\
t^2\Theta_2^4-\vartheta_2^4 &= 2\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{\Theta_0\Theta_3}(\vartheta_0^2\Theta_3^2-\vartheta_3^2\Theta_0^2)\\
t^2\Theta_0^4-\vartheta_0^4 &= 2\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\Theta_2\Theta_3}(\vartheta_2^2\Theta_3^2-\vartheta_3^2\Theta_2^2)
\end{aligned}
$$

ein System, welches uns wie alle folgenden allgemeinen Systeme vier verschiedene Systeme repräsentirt, je nachdem man $t=3$ oder bei $t=1$, $\xi=0$, 1 oder 2 setzt.

Subtrahirt man in Gleichung V auf beiden Seiten $2\vartheta_3^4$ und setzt für ϑ_3^4 rechts den Wert ein, der sich durch Multiplication von I mit III ergiebt, so erhält man die Gleichung

$$t^2\Theta_3^4-3\vartheta_3^4 = 2(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_3\Theta_3(\vartheta_2\Theta_2-\vartheta_0\Theta_0)$$

Diese Gleichung liefert sowohl für $t=3$, als auch für $t=1$, $\xi=0$ die Gleichung (8), für $\xi=1$ und $\xi=2$ wieder eine Erweiterung derselben. Verfährt man in analoger Weise mit VI und VII, so erhält man das Gleichungssystem

$$
\text{(8)}\quad
\begin{aligned}
t^2\Theta_3^4-3\vartheta_3^4 &= 2(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_3\Theta_3(\vartheta_2\Theta_2-\vartheta_0\Theta_0)\\
t^2\Theta_2^4-3\vartheta_2^4 &= 2(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_2\Theta_2(\vartheta_0\Theta_0+\vartheta_3\Theta_3)\\
t^2\Theta_0^4-3\vartheta_0^4 &= -2(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_0\Theta_0(\vartheta_2\Theta_2+\vartheta_3\Theta_3)
\end{aligned}
$$

Formt man die Gleichungen V, VI und VII durch wiederholte Anwendung der Gleichungen II, III und IV so um, dass sie in Bezug auf die Θ homogen werden, so ergeben sich die Beziehungen

$$
\text{(B)}\quad
\begin{aligned}
\frac{(\vartheta_3^2\Theta_2^2-\vartheta_2^2\Theta_3^2)(\vartheta_0^2\Theta_3^2-\vartheta_3^2\Theta_0^2)}{\vartheta_2^2\Theta_0^2+\vartheta_0^2\Theta_2^2} &= 2\vartheta_0\vartheta_2\Theta_0\Theta_2\\
\frac{(\vartheta_2^2\Theta_0^2+\vartheta_0^2\Theta_2^2)(\vartheta_3^2\Theta_2^2-\vartheta_2^2\Theta_3^2)}{\vartheta_0^2\Theta_3^2-\vartheta_3^2\Theta_0^2} &= 2\vartheta_0\vartheta_3\Theta_0\Theta_3\\
\frac{(\vartheta_2^2\Theta_0^2+\vartheta_0^2\Theta_2^2)(\vartheta_0^2\Theta_3^2-\vartheta_3^2\Theta_0^2)}{\vartheta_3^2\Theta_2^2-\vartheta_2^2\Theta_3^2} &= 2\vartheta_2\vartheta_3\Theta_2\Theta_3
\end{aligned}
$$

Beachtet man nun, dass in diesen drei Gleichungen links nur dieselben drei Klammern auftreten, so folgen multiplicando unmittelbar folgende sehr elegante Relationen

$$
\text{(F)}\quad
\begin{aligned}
\vartheta_3^2 O_0^2 - \vartheta_0^2 O_3^2 &= 2\vartheta_2 O_2 \sqrt{\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_3}\\
\vartheta_2^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_2^2 &= 2\vartheta_0 O_0 \sqrt{\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3}\\
\vartheta_0^2 O_2^2 + \vartheta_2^2 O_0^2 &= 2\vartheta_3 O_3 \sqrt{\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2}
\end{aligned}
$$

Diese drei Gleichungen sind für $t = 3$ und $t = 1$, $\xi = 0$ identisch mit den Gleichungen (10), für $\xi = 1$ und $\xi = 2$ erweitern sie dieses Gleichungssystem.

Addirt man ferner in den Gleichungen V, VI und VII auf beiden Seiten $4\vartheta_3^4$ und dividirt resp. durch $\vartheta_3 O_3$, $\vartheta_2 O_2$ und $\vartheta_0 O_0$, so erhält man mit Hülfe von II, III und IV

$$
\text{(9)}\quad \frac{t^2 O_3^4 + 3\vartheta_3^4}{\vartheta_3 O_3} = \frac{t^2 O_2^4 + 3\vartheta_2^4}{\vartheta_2 O_2} = \frac{t^2 O_0^4 + 3\vartheta_0^4}{\vartheta_0 O_0} =
6\frac{\vartheta_2^3}{O_2} + 2(-1)^{\frac{t-1}{2}} t(\vartheta_0 O_0 + \vartheta_3 O_3) = \ldots
$$

Auch hier sind wieder die Formeln, die uns die speciellen Fälle $t = 3$ und $t = 1$, $\xi = 0$ liefern, identisch.

VII giebt uns mit XI und XII zusammen in der ursprünglichen Form das System

$$
\text{(C)}\quad
\begin{aligned}
t^2 O_3^4 + \vartheta_3^4 &= 2\vartheta_3 O_3 \left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_2^3}{O_2}\right)\\
t^2 O_2^4 + \vartheta_2^4 &= 2\vartheta_2 O_2 \left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)\\
t^2 O_0^4 + \vartheta_0^4 &= 2\vartheta_0 O_0 \left(\frac{\vartheta_2^3}{O_2} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)
\end{aligned}
$$

Ergänzen wir die linken Seiten dieser drei Gleichungen zum Quadrat, so erhalten wir eine Reihe sehr hübscher Relationen, die sich jedoch einfacher gestalten für die speciellen Fälle als für den allgemeinen; z. B. ergiebt sich aus XI die Beziehung

$$
(tO_2^2 \pm \vartheta_2^2)^2 = 2\vartheta_2 O_2 \left\{ \frac{\vartheta_0^3}{O_0}\left(1 \pm (-1)^{\frac{t-1}{2}}\right) + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\left(1 \mp (-1)^{\frac{t-1}{2}}\right) \right\}
$$

Es ist nun aber $(-1)^{\frac{t-1}{2}}$ entweder $= +1$ oder $= -1$, in jedem Fall fällt also eins der Glieder rechts fort, welches ist aber im Allgemeinen nicht zu entscheiden; deshalb will ich hier die Formeln für die speciellen Fälle anführen und dabei gleich für den Fall $t = 1$, $\xi = 0$ die ϑ und Θ vertauschen, so dass überall ist $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$.

$$\text{(H)}\quad \begin{aligned}
&(3O_0^2-\vartheta_0^2)^2 = 4\vartheta_0 O_0 \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\,; && (3O_0^2+\vartheta_0^2)^2 = 4\vartheta_0 O_0 \frac{\vartheta_2^3}{O_2}\\
&(3O_2^2-\vartheta_2^2)^2 = 4\vartheta_2 O_2 \frac{\vartheta_0^3}{O_0}\,; && (3O_2^2+\vartheta_2^2)^2 = 4\vartheta_2 O_2 \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\\
&(3O_3^2-\vartheta_3^2)^2 = 4\vartheta_3 O_3 \frac{\vartheta_0^3}{O_0}\,; && (3O_3^2+\vartheta_3^2)^2 = 4\vartheta_3 O_3 \frac{\vartheta_2^3}{O_2}\\
&(O_0^2-\vartheta_0^2)^2 = 4\vartheta_0 O_0 \frac{O_2^3}{\vartheta_2}\,; && (O_0^2+\vartheta_0^2)^2 = 4\vartheta_0 O_0 \frac{O_3^3}{\vartheta_3}\\
&(O_2^2-\vartheta_2^2)^2 = 4\vartheta_2 O_2 \frac{O_3^3}{\vartheta_3}\,; && (O_2^2+\vartheta_2^2)^2 = 4\vartheta_2 O_2 \frac{O_0^3}{\vartheta_0}\\
&(O_3^2-\vartheta_3^2)^2 = 4\vartheta_3 O_3 \frac{O_2^3}{\vartheta_2}\,; && (O_3^2+\vartheta_3^2)^2 = 4\vartheta_3 O_3 \frac{O_0^3}{\vartheta_0}
\end{aligned}$$

Aus diesen Relationen folgen noch unmittelbar einige andere:

$$\text{(7)}\quad \begin{aligned}
O_3^2(3O_0^2-\vartheta_0^2) &= \vartheta_3^2(O_0^2+\vartheta_0^2)\\
O_0^2(\vartheta_2^2-3O_2^2) &= \vartheta_0^2(O_2^2+\vartheta_2^2)\\
O_3^2(3O_2^2+\vartheta_2^2) &= \vartheta_3^2(\vartheta_2^2-O_2^2)
\end{aligned}$$

ausserdem noch einige andre, die sich jedoch aus diesen ergeben, wenn man anders zusammenfasst.

Ferner folgt aus (H), wenn man je zwei Gleichungen multiplicirt:

$$\text{(J)}\quad \begin{aligned}
&9O_0^4-\vartheta_0^4 = 4\vartheta_0 O_0\sqrt{\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3^3}{O_2 O_3}}\,; && \vartheta_0^4-O_0^4 = -4\vartheta_0 O_0\sqrt{\frac{O_2^3 O_3^3}{\vartheta_2\vartheta_3}}\\
&9O_2^4-\vartheta_2^4 = -4\vartheta_2 O_2\sqrt{\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3}}\,; && \vartheta_2^4-O_2^4 = 4\vartheta_2 O_2\sqrt{\frac{O_0^3 O_3^3}{\vartheta_0\vartheta_3}}\\
&9O_3^4-\vartheta_3^4 = 4\vartheta_3 O_3\sqrt{\frac{\vartheta_0^3\vartheta_2^3}{O_0 O_2}}\,; && \vartheta_3^4-O_3^4 = 4\vartheta_3 O_3\sqrt{\frac{O_0^3 O_2^3}{\vartheta_0\vartheta_2}}
\end{aligned}$$

Die gerade nicht sehr eleganten Gleichungen VIII und IX übergehe ich hier: macht man sie aber in Bezug auf die O homogen, so erhalten wir, je nachdem wir dies mit der einen oder den andern der Gleichungen II, III und IV bewerkstelligen, folgende symmetrische Formeln

$$\begin{aligned}
&\vartheta_0^4 O_3^4 - 4\vartheta_0^3\vartheta_3 O_0^3 O_3 + 6\vartheta_0^2\vartheta_3^2 O_0^2 O_3^2 - 4\vartheta_0\vartheta_3^3 O_0 O_3^3 + \vartheta_3^4 O_0^4 = 0\\
&\vartheta_2^4 O_3^4 - 4\vartheta_2^3\vartheta_3 O_2^3 O_3 + 6\vartheta_2^2\vartheta_3^2 O_2^2 O_3^2 - 4\vartheta_2\vartheta_3^3 O_2 O_3^3 + \vartheta_3^4 O_2^4 = 0\\
&\vartheta_0^4 O_2^4 - 4\vartheta_0^3\vartheta_2 O_0^3 O_2 - 6\vartheta_0^2\vartheta_2^2 O_0^2 O_2^2 - 4\vartheta_0\vartheta_2^3 O_0 O_2^3 + \vartheta_2^4 O_0^4 = 0.
\end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen kann man, wenn man die Glieder in bestimmter Weise zusammenfasst, sowohl das Gleichungssytem (10) als auch das Gleichungssystem (5) herstellen. (10) hatten wir aber schon vorher direct bekommen und ebenso erhalten wir (5) unmittelbar, wenn wir die Gleichungssysteme (2) und (3) mit einander multipliciren. Aus obigen Gleichungen folgt nun aber, dass sie nicht nur für $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ gelten, sondern auch für $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau+8)$ und $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau+16)$. Das Gleichungssystem (5) lautet folgendermassen

$$(5)\quad \begin{aligned} \left(\frac{O_0^3}{\vartheta_0} - \frac{O_3^3}{\vartheta_3}\right)\left(\frac{\vartheta_3^3}{O_3} - \frac{\vartheta_0^3}{O_0}\right) &= 3\vartheta_2^2 O_2^2 \\ \left(\frac{O_3^3}{\vartheta_3} - \frac{O_2^3}{\vartheta_2}\right)\left(\frac{\vartheta_2^3}{O_2} - \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right) &= 3\vartheta_0^2 O_0^2 \\ \left(\frac{O_0^3}{\vartheta_0} - \frac{O_2^3}{\vartheta_2}\right)\left(\frac{\vartheta_2^3}{O_2} - \frac{\vartheta_0^3}{O_0}\right) &= 3\vartheta_3^2 O_3^2 \end{aligned}$$

Macht man ferner auch XI und XII homogen, so ergeben sich die Relationen

$$(\mathrm{E})\quad \begin{aligned} &\vartheta_3^2 O_2^2(\vartheta_2^2 O_0^2+\vartheta_0^2 O_2^2)+\vartheta_2^2 O_3^2(\vartheta_2^2 O_0^2-\vartheta_0^2 O_2^2) = \\ &\qquad 2\vartheta_2 O_0 O_2 O_3(\vartheta_3^3 O_2+\vartheta_3^3 O_0) \\ &\vartheta_2^2 O_3^2(\vartheta_3^2 O_0^2-\vartheta_0^2 O_3^2)+\vartheta_3^2 O_2^2(\vartheta_3^2 O_0^2+\vartheta_0^2 O_3^2) = \\ &\qquad 2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3(\vartheta_0^3 O_2+\vartheta_2^3 O_0) \end{aligned}$$

Endlich liefert uns noch XIII, wenn wir es homogen machen, die aufgelösten Gleichungen (1) und zwar für $t = 3$ $(1)_1$ und für $t = 1$, $\xi = 0$ $(1)_2$. XIII erhält so die Form:

$$\begin{aligned} &\vartheta_2^6 O_0^2 O_3^2+\vartheta_3^6 O_0^2 O_2^2+\vartheta_0^6 O_2^2 O_3^2 = \\ &\qquad 2(\vartheta_2^3\vartheta_3^3 O_0^2 O_2 O_3+\vartheta_0^3\vartheta_2^3 O_0 O_2 O_3^2+\vartheta_0^3\vartheta_3^3 O_0 O_2^2 O_3) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (1) selbst erhält man hieraus durch folgendes Verfahren:

Für den Fall $t = 3$ kann man die Gleichung auch so schreiben

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)^2 - 2\frac{\vartheta_2^3}{O_2}\left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3} - \frac{\vartheta_2^3}{O_2}\right) + 4\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3} + \frac{\vartheta_2^6}{O_2^2} \\ = 2\frac{\vartheta_2^3}{O_2}\left(\frac{\vartheta_3^3}{O_3} - 3\vartheta_3 O_3\right) + 4\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3} + \frac{\vartheta_2^6}{O_2^2} \quad \text{(nach II)} \\ = 2\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3}{O_2 O_3}(\vartheta_3^2 - 3O_3^2) + 4\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3} + \frac{\vartheta_2^6}{O_2^2} \\ = \frac{\vartheta_2^6}{O_2^2} - 4\frac{\vartheta_2^3}{O_2}\sqrt{\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3}} + 4\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3} \quad (\text{nach } \mathrm{H}_3) \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun unmittelbar

$$\frac{\vartheta_0^3}{O_0}+\frac{\vartheta_3^3}{O_3}+2\sqrt{\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3}}=\frac{\vartheta_2^3}{O_2}$$

oder

$$\sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{O_2}}=(1)_1.$$

Ganz analog ergiebt sich für $t=1$ $(1)_2$, so dass man erhält

$$(1)\quad \begin{cases}\sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{O_2}}=0\\[2ex] \sqrt{\frac{O_3^3}{\vartheta_3}}+\sqrt{\frac{O_2^3}{\vartheta_2}}-\sqrt{\frac{O_0^3}{\vartheta_0}}=0\end{cases}$$

Mit den Gleichungssystemen (1) (2) und (3) ist nach Vorgang von Göring auch sofort (6) gefunden. Zerlegt man nämlich die Gleichungen (2) und (3) und beachtet die Beziehungen (1), so folgt leicht

$$(6)\quad \begin{cases}\sqrt{\frac{O_3^3}{\vartheta_3}}-\sqrt{\frac{O_2^3}{\vartheta_2}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{O_0}}=0\\[2ex] \sqrt{\frac{O_3^3}{\vartheta_3}}+\sqrt{\frac{O_0^3}{\vartheta_0}}-\sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{O_2}}=0\\[2ex] \sqrt{\frac{O_0^3}{\vartheta_0}}+\sqrt{\frac{O_2^3}{\vartheta_2}}-\sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{O_3}}=0\\[2ex] 3\sqrt{\frac{O_3^3}{\vartheta_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{O_0}}-\sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{O_2}}=0\\[2ex] 3\sqrt{\frac{O_0^3}{\vartheta_0}}-\sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{O_2}}-\sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{O_3}}=0\\[2ex] 3\sqrt{\frac{O_2^3}{\vartheta_2}}+\sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{O_0}}-\sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{O_3}}=0\end{cases}$$

In gleicher Weise könnte man fortfahren und auch die übrigen Gleichungen umformen.

Dieselben werden aber um so complicirter, je weiter man geht, und will ich für jetzt davon abstehen.

Ferner kann man auch noch die Gleichungen, die sich für die speciellen Fälle $t=3$, und $t=1$, $\xi=0$ ergeben, mit einander combiniren, zumal die Gleichungen für $t=3$ mit Hülfe von II, III und IV für $t=1$, $\xi=0$ umformen und umgekehrt.

Tut man dies bei den linken Seiten der Gleichungen F, so erhält man

$$\text{(11)}\qquad \begin{aligned} \vartheta_0^2(\vartheta_2^2\vartheta_3^2-\Theta_2^2\Theta_3^2) &= \Theta_0^2(\vartheta_2^2\Theta_3^2-\vartheta_3^2\Theta_2^2) \\ \Theta_0^2(\vartheta_2^2\vartheta_3^2-9\Theta_2^2\Theta_3^2) &= \vartheta_0^2(\vartheta_2^2\Theta_3^2-\vartheta_3^2\Theta_2^2) \end{aligned}$$

und noch vier andre Gleichungen, die aber auch direct aus diesen entstehen, wenn man anders zusammenfasst.

Aus diesen Gleichungen und aus (F) folgt noch sofort

$$\text{(G)}\qquad \begin{aligned} (\vartheta_2^2\vartheta_3^2-\Theta_2^2\Theta_3^2)^2 &= 4\frac{\Theta_0^6}{\vartheta_0^2}\vartheta_2\vartheta_3\Theta_2\Theta_3 \\ (\vartheta_0^2\vartheta_3^2-\Theta_0^2\Theta_3^2)^2 &= 4\frac{\Theta_2^6}{\vartheta_2^2}\vartheta_0\vartheta_3\Theta_0\Theta_3 \\ (\vartheta_0^2\vartheta_2^2+\Theta_0^2\Theta_2^2)^2 &= 4\frac{\Theta_3^6}{\vartheta_3^2}\vartheta_0\vartheta_2\Theta_0\Theta_2 \\ (\vartheta_2^2\vartheta_3^2-9\Theta_2^2\Theta_3^2)^2 &= 4\frac{\vartheta_0^6}{\Theta_0^2}\vartheta_2\vartheta_3\Theta_2\Theta_3 \\ (\vartheta_0^2\vartheta_3^2-9\Theta_0^2\Theta_3^2)^2 &= 4\frac{\vartheta_2^6}{\Theta_2^2}\vartheta_0\vartheta_3\Theta_0\Theta_3 \\ (\vartheta_0^2\vartheta_2^2+9\Theta_0^2\Theta_2^2)^2 &= 4\frac{\vartheta_3^6}{\Theta_3^2}\vartheta_0\vartheta_2\Theta_0\Theta_2 \end{aligned}$$

Die meisten Gleichungen, die man so erhält, sind schon unter den früheren als specielle Fälle enthalten, als neue habe ich nur noch gefunden:

$$\text{(D)}\qquad \begin{aligned} \frac{3\Theta_3^4-\vartheta_3^4}{\vartheta_3\Theta_3} &= 2\,\frac{\vartheta_0\vartheta_2^3-3\Theta_0^3\Theta_2}{\vartheta_0\Theta_2} \\ \frac{3\Theta_2^4-\vartheta_2^4}{\vartheta_2\Theta_2} &= 2\,\frac{\vartheta_0\vartheta_3^3-3\Theta_0^3\Theta_3}{\vartheta_0\Theta_3} \end{aligned}$$

Fassen wir jetzt Alles zusammen, so sehen wir, dass sämmtliche von Göring angegebene Relationen auch auf diesem Wege gefunden sind, und dass dieselben zum grossen Teil in erweitertem Sinne gelten, es bestehen nämlich die Relationen $(1)_2$, (2), (5), (8), (9) und (10) nicht nur zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$, sondern allgemein zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau+8\xi)$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$, wo ξ die Werte 0, 1 und 2 annehmen kann.

Ausser diesen Beziehungen sind aber noch eine ganze Reihe anderer abgeleitet, von denen die meisten auch ganz allgemein gelten wenigstens für den Fall $t = 1$.

Die Formeln, die Göring zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau)$, $\vartheta_\alpha(0, \tau)$ und $\vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau}{3}\right)$ angiebt, liegen ausserhalb des Bereiches der hier geführten Betrachtungen, ich wende mich deshalb jetzt sofort zum Fall $n = 5$.

§ 4.

Auch für den Fall $n = 5$ genügt es Zwecks Herstellung der Gauss'schen Formeln eins der Systeme B zu entwickeln. Ich wähle hier wieder das System B_I, dasselbe nimmt für $n = 5$ folgende Gestalt an:

$$1)\quad \vartheta_3^5 \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^5(v, \tau)} = x_1\vartheta_3^5 + x_2\vartheta_3^3\vartheta_2^2 \mathrm{sn}^2(u, k) + x_3\vartheta_3\vartheta_2^4 \mathrm{sn}^4(u, k)$$

$$2)\quad \frac{O_2}{O_0}\vartheta_0^5 \mathrm{cn}(u', c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^5(v, \tau)} = x_1\vartheta_2^5 \mathrm{cn}^5(u, k) + x_2\vartheta_2^3\vartheta_3^2 \mathrm{cn}^3(u, k)\mathrm{dn}^2(u, k)$$
$$+ x_3\vartheta_2\vartheta_3^4 \mathrm{cn}(u, k)\mathrm{dn}^4(u, k)$$

$$3)\quad \frac{O_3}{O_0}\vartheta_0^5 \mathrm{dn}(u', c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^5(v, \tau)} = x_1\vartheta_3^5 \mathrm{dn}^5(u, k) + x_2\vartheta_3^3\vartheta_2^2 \mathrm{dn}^3(u, k)\mathrm{cn}^2(u, k)$$
$$+ x_3\vartheta_3\vartheta_2^4 \mathrm{dn}(u, k)\mathrm{cn}^4(u, k)$$

$$4)\quad \frac{O_2}{O_3}\vartheta_3^5 \mathrm{sn}(u', c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^5(v, \tau)} = x_1\vartheta_2^5 \mathrm{sn}^5(u, k) + x_2\vartheta_2^3\vartheta_3^2 \mathrm{sn}^3(u, k)$$
$$+ x_3\vartheta_2\vartheta_3^4 \mathrm{sn}(u, k)$$

Schreitet man auch hier bei der Entwicklung bis zur fünften Potenz von u vor, so erhält man folgende 12 Gleichungen:

$$(1)\quad y_0 = x_1$$

$$(2)\quad \vartheta_0^5 O_2 y_0 = \vartheta_2^5 O_0 x_1 + x_2\vartheta_2^3\vartheta_3^2 O_0 + x_3\vartheta_2\vartheta_3^4 O_0$$

$$(3)\quad \vartheta_0^5 O_3 y_0 = \vartheta_3^5 O_0 x_1 + x_2\vartheta_2^2\vartheta_3^3 O_0 + x_3\vartheta_2^4\vartheta_3 O_0$$

$$(4)\quad t O_2 O_3 y_0 = \vartheta_2\vartheta_3 x_3$$

$$(5)\quad \vartheta_3^2 y_2 = \vartheta_2^2 x_2$$

$$(6)\quad t^2\vartheta_0^5 O_2 O_3^4 y_0 - 2y_2\vartheta_0^5\vartheta_3^4 O_2 = 5x_1\vartheta_2^5\vartheta_3^4 O_0$$
$$+ x_2\vartheta_2^3\vartheta_3^2 O_0(2\vartheta_2^4 + 3\vartheta_3^4) + x_3\vartheta_2\vartheta_3^4 O_0(4\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

$$(7)\quad t^2\vartheta_0^5 O_2^4 O_3 y_0 - 2y_2\vartheta_0^5\vartheta_3^4 O_3 = 5x_1\vartheta_2^4\vartheta_3^5 O_0$$
$$+ x_2\vartheta_2^2\vartheta_3^3 O_0(3\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4) + x_3\vartheta_3^4\vartheta_3 O_0(\vartheta_2^4 + 4\vartheta_3^4)$$

$$(8)\quad t^3 y_0 O_2 O_3(O_2^4+O_3^4)-6ty_2\vartheta_3^4 O_2 O_3$$
$$=-6x_2\vartheta_2^3\vartheta_3^3+x_3\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)$$

$$(9)\quad 3\vartheta_3^6 y_4=-x_2\vartheta_2^2(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)+3x_3\vartheta_2^4\vartheta_3^2$$

$$(10)\quad t^4 y_0\vartheta_0^5 O_2 O_3^4(4O_2^4+O_3^4)-12t^2 y_2\vartheta_0^5\vartheta_3^4 O_2 O_3^4+24y_4\vartheta_0^5\vartheta_3^8 O_2$$
$$=x_1\vartheta_2^5\vartheta_3^4 O_0(20\vartheta_2^4+65\vartheta_3^4)$$
$$+x_2\vartheta_2^3\vartheta_3^2 O_0(8\vartheta_2^8+56\vartheta_2^4\vartheta_3^4+21\vartheta_3^8)$$
$$+x_3\vartheta_2\vartheta_3^4 O_0(40\vartheta_2^8+44\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)$$

$$(11)\quad t^4 y_0\vartheta_0^5 O_2^4 O_3(O_2^4+4O_3^4)-12t^2 y_2\vartheta_0^5\vartheta_3^4 O_2^4 O_3+24y_4\vartheta_0^5\vartheta_3^8 O_3$$
$$=x_1\vartheta_2^4\vartheta_3^5 O_0(65\vartheta_2^4+20\vartheta_3^4)$$
$$+x_2\vartheta_2^2\vartheta_3^3 O_0(21\vartheta_2^8+56\vartheta_2^4\vartheta_3^4+8\vartheta_3^8)$$
$$+x_3\vartheta_2^4\vartheta_3 O_0(\vartheta_2^8+44\vartheta_2^4\vartheta_3^4+40\vartheta_3^8)$$

$$(12)\quad t^5 y_0 O_2 O_3(O_2^8+4O_2^4 O_3^4+O_3^8)-20t^3 y_2\vartheta_3^4 O_2 O_3(O_2^4+O_3^4)$$
$$+120ty_4\vartheta_3^8 O_2 O_3=120x_1\vartheta_2^5\vartheta_3^5-60x_2\vartheta_2^3\vartheta_3^3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)$$
$$+x_3\vartheta_2\vartheta_4(\vartheta_3^8+4\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)$$

Diese 12 Gleichungen enthalten nur die 6 Unbekannten $y_0, y_2, y_4, x_1, x_2, x_3$, ergeben also, wenn man diese eliminirt, eine Menge Relationen zwischen $\vartheta_\alpha(0,\tau')$ und $\vartheta_\alpha(0,\tau)$, wo $\vartheta_\alpha(0,\tau')=O_\alpha$ für $t=5$ den Wert $\vartheta_\alpha(0,5\tau)$ hat, dagegen für $t=1$ die 5 verschiedenen Werte annehmen kann $\vartheta_\alpha\left(0,\frac{\tau-8\xi}{5}\right)$, $\xi=0, 1, 2, 3$ und 4. Die elegantsten dieser Relationen sind:

$$(1, 2, 3, 4)\quad \text{I}\quad \vartheta_0\vartheta_3 O_2-\vartheta_0\vartheta_2 O_3+\vartheta_2\vartheta_3 O_0=tO_0 O_2 O_3$$

oder

$$(21)\quad \frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}+\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}-\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}=t \quad \text{oder}$$
$$\frac{O_0}{\vartheta_0}+\frac{O_2}{\vartheta_2}-\frac{O_3}{\vartheta_3}=t\,\frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}$$

Diese Formeln repräsentiren uns für die speciellen Fälle $t=5$ und $t=1$ das Göring'sche Gleichungssystem § 4. (21), für den Fall $t=1$ natürlich wieder eine Erweiterung der Gleichungen $(21)_1$ und $(21)_3$.

Die übrigen Beziehungen, die man durch die Combination der Gleichungen (1), (2), (3), (4) (5), (6), (7) erhält, bieten sich zum Teil zunächst in nicht sehr schöner Form dar; da man sie ausserdem alle bis auf die Formel, die man durch Combination von (4), (5), (6) und (7) bekommt, mit Hülfe von I auf einander reduciren kann, will ich hier nur die elegantesten derselben angeben:

(2, 4, 5, 6) II $t^2 O_3^4 - 3\vartheta_3^4 = 2\frac{\vartheta_0^5 O_2}{\vartheta_2 O_0} + 2\frac{\vartheta_2^5 O_0}{\vartheta_0 O_2} - 2t\vartheta_3^3 O_3\left(\frac{O_2}{\vartheta_2}+\frac{O_0}{\vartheta_0}\right)$

(3, 4, 5, 7) III $t^2 O_2^4 - 3\vartheta_2^4 = 2\frac{\vartheta_0^5 O_3}{\vartheta_3 O_0} - 2\frac{\vartheta_3^5 O_0}{\vartheta_0 O_3} + 2t\vartheta_2^3 O_2\left(\frac{O_0}{\vartheta_0}-\frac{O_3}{\vartheta_3}\right)$

(II—III) IV $t^2 O_0^4 - 3\vartheta_0^4 = 2\frac{\vartheta_2^5 O_3}{\vartheta_3 O_2} - 2\frac{\vartheta_3^5 O_2}{\vartheta_2 O_3} + 2t\vartheta_0^3 O_0\left(\frac{O_2}{\vartheta_2}-\frac{O_3}{\vartheta_3}\right)$

(2, 3, 5, 6) V $t^2 O_3^4 + \vartheta_3^4$
$= 2\vartheta_3^3 O_3\left(\frac{\vartheta_0}{O_0}+\frac{\vartheta_2}{O_2}\right) - 2\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}(\vartheta_0^2 O_0^2 + \vartheta_2^2 O_2^2)$

(2, 3, 5, 7) VI $t^2 O_2^4 + \vartheta_2^4$
$= 2\vartheta_2^3 O_2\left(\frac{\vartheta_3}{O_3}-\frac{\vartheta_0}{O_0}\right) + 2\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}(\vartheta_3^2 O_3^2 - \vartheta_0^2 O_0^2)$

(2, 3, 6, 7) VII $t^2 O_0^4 + \vartheta_0^4$
$= 2\vartheta_0^3 O_0\left(\frac{\vartheta_3}{O_3}-\frac{\vartheta_2}{O_2}\right) + 2\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}(\vartheta_3^2 O_3^2 - \vartheta_2^2 O_2^2)$

(4, 5, 6, 7) VIII $2t^2\vartheta_0^6 O_0^4 O_2 O_3 + 3t^2\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3(\vartheta_2^3 O_3^3 - \vartheta_3^3 O_2^3)$
$+ 2t^2\vartheta_0 O_0 O_2 O_3(\vartheta_3^5 O_3^3 - \vartheta_2^5 O_2^3) + 2t\vartheta_0 O_0 O_2 O_3$
$\times(\vartheta_2^7 O_2 + 4\vartheta_2^3\vartheta_3^4 O_2 - 4\vartheta_2^4\vartheta_3^3 O_3 - \vartheta_3^7 O_3)$
$- tO_0^2 O_2 O_3(2\vartheta_2^8 - 9\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 2\vartheta_3^8) = 5\vartheta_2^5\vartheta_3^5 O_0^2.$

(2, 4, 5, 8) IX $t\vartheta_3 O_0 O_2 O_3\{t^2(O_2^4+O_3^4) - (\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\}$
$= 6t^2\vartheta_0^5 O_2 O_3^2 - 6t^2 O_3^2\vartheta_2^3 O_0 O_2^2 O_3^2 + 6\vartheta_3^2(\vartheta_2^5 O_0 - \vartheta_0^5 O_2)$

(3, 4, 5, 8) X $t\vartheta_2 O_0 O_2 O_3\{t^2(O_2^4+O_3^4) - (\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\}$
$= 6t\vartheta_0^5 O_2^2 O_3 - 6t^2\vartheta_3^3 O_0 O_2^2 O_3^2 + 6\vartheta_2^2(\vartheta_3^5 O_0 - \vartheta_0^5 O_3)$

(2, 3, 5, 8) XI $t^3 O_0^2 O_2 O_3(O_2^4+O_3^4)$
$= (\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)(\vartheta_2\vartheta_3 O_0^2 - 5\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_2 + 5\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_3 + 6\vartheta_0^2 O_2 O_3)$
$- 6\vartheta_0^2 O_2 O_3(\vartheta_3^2 O_3^2 + \vartheta_2^2 O_2^2)$

(2, 4, 6, 8) XII $t\vartheta_0 O_0 O_2 O_3\{t^2(2O_3^4 - O_2^4) - (5\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4)\}$
$= -6t^2\vartheta_3^3 O_0^2 O_2 O_3^2 + 6t\vartheta_2^5 O_0^2 O_3 + 6\vartheta_0\vartheta_3(\vartheta_0^5 O_2 - \vartheta_2^5 O_0)$

(3, 4, 7, 8) XIII $t\vartheta_0 O_0 O_2 O_3\{t^2(2O_2^4 - O_3^4) - (2\vartheta_2^4 + 5\vartheta_3^4)\}$
$= 6t^2\vartheta_2^3 O_0^2 O_2^2 O_3 - 6t\vartheta_3^5 O_0^2 O_2 + 6\vartheta_0\vartheta_2(\vartheta_0^5 O_3 - \vartheta_3^5 O_0)$

(3, 4, 6, 8) XIV $t\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_2 O_3\{t^2(2O_3^4 - O_2^4) + (7\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\}$
$= 3t^2 O_0^2 O_2 O_3^2(2\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) - 9t\vartheta_2\vartheta_3^5 O_0^2 O_3$
$+ 3t\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_3^2(2\vartheta_2^4 + 3\vartheta_3^4) + 6\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_0^5 O_3 - \vartheta_3^5 O_0)$

(2, 4, 7, 8) XV $t\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2 O_3\{t^2(2O_2^4 - O_3^4) + (\vartheta_2^4 + 7\vartheta_3^4)\}$
$= -3t^2 O_0^2 O_2^2 O_3(\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4) + 9t\vartheta_2^5\vartheta_3 O_0^2 O_2$
$+ 3t\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_2^2(3\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4) + 6\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_0^5 O_2 - \vartheta_2^5 O_0)$

$$\left\{\begin{aligned}
&(4,\,5,\,6,\,8)\quad \text{XVI}\quad 2t^3\vartheta_0^5 O_2^2 O_3(O_2^4-2O_3^4)+2t^3\vartheta_2^5 O_0 O_2 O_3(O_2^4+O_3^4)\\
&\qquad +3t^3\vartheta_2\vartheta_3^4 O_0 O_2 O_3(O_2^4+O_3^4)+6t^2\vartheta_3^3 O_0 O_2^2 O_3^2(4\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\\
&\qquad +6t^2\vartheta_0^5\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3^4 = 2t\vartheta_0^5 O_2^2 O_3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\\
&\qquad +t\vartheta_2 O_0 O_2 O_3(2\vartheta_2^8-\vartheta_2^4\vartheta_3^4+9\vartheta_3^8)+30\vartheta_2^6\vartheta_3^5 O_0\\
&(4,\,5,\,7,\,8)\quad \text{XVII}\quad 2t^3\vartheta_0^5 O_2 O_3^2(O_3^4-2O_2^4)+2t^3\vartheta_3^5 O_0 O_2 O_3(O_2^4+O_3^4)\\
&\qquad +3t^3\vartheta_2^4\vartheta_3 O_0 O_2 O_3(O_2^4+O_3^4)+6t^2\vartheta_2^3 O_0 O_2^2 O_3^2(\vartheta_2^4+4\vartheta_3^4)\\
&\qquad +6t^2\vartheta_0^5\vartheta_2\vartheta_3 O_2^4 O_3 = 2t\vartheta_0^5 O_2 O_3^2(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\\
&\qquad +t\vartheta_3 O_0 O_2 O_3(9\vartheta_2^8-\vartheta_2^4\vartheta_3^4+2\vartheta_3^8)+30\vartheta_2^5\vartheta_3^6 O_0.
\end{aligned}\right.$$

. . . .

Aus diesen Relationen, die zum Teil schon sehr einfach sind, erhält man noch eine Reihe anderer, wenn man sie mit Hülfe der Gleichung I umformt. Macht man durch wiederholte Anwendung von I die Gleichungen II, III und IV homogen in Bezug auf die O, so ergeben sich folgende elegante Beziehungen

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned}
&(\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)^2(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^2 = 2\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)\\
&(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^2(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^2 = 2\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_3(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)\\
&(\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)^2(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^2 = 2\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)
\end{aligned}$$

Hieraus folgen unmittelbar durch Division je zweier Gleichungen die Formeln

$$\text{(F)}\quad \begin{aligned}
&\vartheta_3 O_3(\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)^2 = \vartheta_2 O_2(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^2\\
&\vartheta_2 O_3(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^2 = \vartheta_0 O_0(\vartheta_0 O_3+\vartheta_2 O_0)^2\\
&\vartheta_2 O_2(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^2 = \vartheta_0 O_0(\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)^2
\end{aligned}$$

und somit nach (A)

$$\text{(G)}\quad 2\vartheta_3^2 O_3^2-2\vartheta_0^2 O_0^2-2\vartheta_2^2 O_2^2 = \frac{(\vartheta_3 O_0-\vartheta_0 O_3)^4}{\vartheta_2^2 O_2^2} = \frac{(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^4}{\vartheta_0^2 O_0^2} = \frac{(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^4}{\vartheta_3^2 O_3^2}$$

Ergänzt man ferner die linken Seiten der Gleichungen V, VI, VII zum Quadrat, so erhält man folgende sehr schöne Beziehungen:

$$\text{(B)}\quad \begin{aligned}
&(\vartheta_3^2-tO_3^2)^2 = 2\,\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)\\
&(\vartheta_2^2-tO_2^2)^2 = 2\,\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)\\
&(\vartheta_0^2-tO_0^2)^2 = 2\,\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)
\end{aligned}$$

Aus (B) und (G) könnte man nun noch eine Reihe von Beziehungen herleiten, ich verschiebe dies jedoch auf später.

Man hat somit schon eine ganze Reihe zum Teil sehr eleganter Relationen, unter allen diesen befinden sich ausser in I keine von Göring angegebene. Solche erhält man erst, wenn man die speciellen Fälle $t=5$ und $t=1$, $\xi=0$ mit einander combinirt, dann aber ergeben sie sich meist in sehr einfacher Weise, wie folgt:

Ich will zu diesem Zwecke die Formeln, welche sich aus den obigen für $t=5$ ergeben, mit einem Strich bezeichnen, und die für $t=1$, $\xi=0$ mit zweien.

Addirt man I′ und I″, so erhält man, wenn man richtig zusammenfasst, $\underline{(17)_2}$, subtrahirt man beide Gleichungen, so $\underline{(17)_1}$; und multiplicirt man I′ mit $\sqrt{5}$ und I″ mit 5, so ergibt sich addendo $\underline{(17)_4}$ und subtrahendo $\underline{(17)_3}$:

$$(17)\quad \begin{aligned} &(\vartheta_3-O_3)(\vartheta_0+O_0)(\vartheta_2+O_2) = 4O_0O_2O_3 \\ &(\vartheta_3+O_3)(\vartheta_0-O_0)(O_2-\vartheta_2) = 4O_0O_2O_3 \\ &(\sqrt{5}O_3-\vartheta_3)(\sqrt{5}O_0+\vartheta_0)(\sqrt{5}O_2+\vartheta_2) = 4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 \\ &(\sqrt{5}O_3+\vartheta_3)(\sqrt{5}O_0-\vartheta_0)(\vartheta_2-\sqrt{5}O_2) = 4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 \end{aligned}$$

Mit dem Gleichungssystem (17) hat man auch sofort $\underline{(16)}$, wenn man je zwei Gleichungen von (17) mit einander multiplicirt.

$$\underline{(16)}\quad \begin{aligned} &(\vartheta_3^2-O_3^2)(O_0^2-\vartheta_0^2)(\vartheta_2^2-O_2^2) = 16O_0^2O_2^2O_3^2 \\ &(\vartheta_3^2-5O_3^2)(\vartheta_0^2-5O_0^2)(\vartheta_2^2-5O_2^2) = 16\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2 \end{aligned}$$

Multiplicirt man I′ und I″, so folgt

$$(E)\quad \begin{aligned} 8\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3 = {} & \vartheta_3O_3(\vartheta_0O_2+\vartheta_2O_0)^2-\vartheta_0O_0(\vartheta_2O_3-\vartheta_3O_2)^2 \\ & -\vartheta_2O_2(\vartheta_0O_3-\vartheta_3O_0)^2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält sämmtliche Formeln (15) in sich. Man kann sie nämlich auch schreiben

$$\begin{aligned} &\vartheta_0^2\vartheta_2O_3^2O_2+\vartheta_2\vartheta_3^2O_0^2O_2+2\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3-\vartheta_0\vartheta_3O_2(\vartheta_0O_2O_3-\vartheta_3O_0O_2) \\ &\qquad -\vartheta_2O_0O_3(\vartheta_2\vartheta_3O_0-\vartheta_0\vartheta_2O_3)=0 \end{aligned}$$

Ergänzt man die Klammern so, dass man resp. I′ und I″ darauf anwenden kann, so erhält man unmittelbar die Gleichung $\underline{(15)_1}$, in gleicher Weise erhält man, wenn man die Glieder, in denen die Ausdrücke $\vartheta_2\vartheta_3O_0$ und $\vartheta_0O_2O_3$ vorkommen, zusammenfasst, $\underline{(15)_2}$ und ganz analog $\underline{(15)_3}$:

$$(15)\quad \begin{aligned} &\vartheta_0^2O_3^2+\vartheta_3^2O_0^2+4\vartheta_0\vartheta_3O_0O_3-\vartheta_0^2\vartheta_3^2-5O_0^2O_3^2=0 \\ &\vartheta_2^2O_3^2+\vartheta_3^2O_2^2+4\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3-\vartheta_2^2\vartheta_3^2-5O_2^2O_3^2=0 \\ &\vartheta_2^2O_0^2+\vartheta_0^2O_2^2+4\vartheta_0\vartheta_2O_0O_2-\vartheta_0^2\vartheta_2^2-5O_0^2O_2^2=0 \end{aligned}$$

Ersetzt man ferner in (E) zwei der Klammern durch Ausdrücke mit der dritten nach (F), so folgt die wichtige Relation

$$8\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0O_2O_3 = (\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^2 \frac{\vartheta_3^2O_3^2-\vartheta_0^2O_0^2-\vartheta_2^2O_2^2}{\vartheta_3 O_3}$$

oder nach G

$$\text{(H)}\quad 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3 = \frac{(\vartheta_0O_2+\vartheta_2O_0)^6}{\vartheta_3^3O_3^3} = \frac{(\vartheta_3O_0-\vartheta_0O_3)^6}{\vartheta_2^3O_2^3}$$
$$= \frac{(\vartheta_2O_3-\vartheta_3O_2)^6}{\vartheta_0^3O_0^3}.$$

und andrerseits

$$\underline{(14)}\quad 2\vartheta_3^2O_3^2-2\vartheta_0^2O_0^2-2\vartheta_2^2O_2^2 = (16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac{2}{3}}$$

Multiplicirt man (B)′ mit (B)″, so ergibt sich unmittelbar

$$\underline{(8)} \text{ und } \underline{(9)}\quad (\vartheta_3^2-O_3^2)(5O_3^2-\vartheta_3^2) = (\vartheta_2^2-O_2^2)(\vartheta_2^2-5O_2^2)$$
$$= (\vartheta_0^2-O_0^2)(\vartheta_0^2-5O_0^2) = 2(\vartheta_3^2O_3^2-\vartheta_0^2O_0^2-\vartheta_2^2O_2^2)$$

Diese Gleichung enthält ferner noch das Gleichungssystem (7), man erhält dieses daraus nur mit Hülfe von der Gleichung

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4+\vartheta_2^4.$$

Es lautet

$$\underline{(7)}\quad \begin{aligned}
&(\vartheta_3^2-O_3^2)^2-(\vartheta_0^2-O_0^2)^2 = 4O_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\\
&(\vartheta_3^2-O_3)^2-(\vartheta_2^2-O_2^2)^2 = 4O_0^2(\vartheta_0^2-O_0^2)\\
&(\vartheta_2^2-O_2^2)^2+(\vartheta_0^2-O_0^2)^2 = 4O_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)\\
&(5O_3^2-\vartheta_3^2)^2-(5O_0^2-\vartheta_0^2)^2 = 4\vartheta_2^2(5O_2^2-\vartheta_2^2)\\
&(5O_3^2-\vartheta_3^2)^2-(5O_2^2-\vartheta_2^2)^2 = 4\vartheta_0^2(5O_0^2-\vartheta_0^2)\\
&(5O_2^2-\vartheta_2^2)^2+(5O_0^2-\vartheta_0^2)^2 = 4\vartheta_3^2(5O_3^2-\vartheta_3^2)
\end{aligned}$$

Die Gleichungssysteme (8) (9) und (14) liefern uns sofort auch

$$(13)\quad (\vartheta_2^2-O_2^2)(\vartheta_2^2-5O_2^2) = (\vartheta_0^2-O_0^2)(\vartheta_0^2-5O_0^2)$$
$$= (\vartheta_3^2-O_3^2)(5O_3^2-\vartheta_3^2) = (16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}$$

und ebenso (B) und (14) die beiden Gleichungssysteme

$$\underline{(18)}\quad \begin{aligned}
\vartheta_3^2-O_3^2 &= \sqrt{\frac{\vartheta_3}{O_3}}\,\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}\\
\vartheta_2^2-O_2^2 &= \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}}\,\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}\\
O_0^2-\vartheta_0^2 &= \sqrt{\frac{\vartheta_0}{O_0}}\,\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}
\end{aligned}$$

und

$$5\Theta_3^2-\vartheta_3^2=\sqrt{\frac{\Theta_3}{\vartheta_3}}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}{(4\Theta_0\Theta_2\Theta_3)^{\frac{1}{6}}}$$

$$(19)\qquad 5\Theta_0^2-\vartheta_0^2=\sqrt{\frac{\Theta_0}{\vartheta_0}}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}{(4\Theta_0\Theta_2\Theta_3)^{\frac{1}{6}}}$$

$$\vartheta_2^2-5\Theta_2^2=\sqrt{\frac{\Theta_2}{\vartheta_2}}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}{(4\Theta_0\Theta_2\Theta_3)^{\frac{1}{6}}}$$

Mit den Gleichungen (18) und (19) sind dann aber nach Göring auch die Systeme (20) und (22) unmittelbar gefunden.

Zum Schluss möchte ich noch eine andere Schreibweise der Relationen (21) anführen, welche uns unmittelbar zu einer von Gauss angegebenen, von Göring aber nicht erwähnten Formel führt. Fasst man die Glieder in den Formeln (21) in bestimmter Weise zusammen, so nimmt dieses System die Form an

(L)

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(\vartheta_2\vartheta_3-\Theta_2\Theta_3)&=\Theta_0(\vartheta_2\Theta_3-\vartheta_3\Theta_2); & \Theta_0(\vartheta_2\vartheta_3-5\Theta_2\Theta_3)&=\vartheta_0(\vartheta_2\Theta_3-\vartheta_3\Theta_2)\\
\vartheta_2(\vartheta_0\vartheta_3-\Theta_0\Theta_3)&=\Theta_2(\vartheta_0\Theta_3-\vartheta_3\Theta_0); & \Theta_2(\vartheta_0\vartheta_3-5\Theta_0\Theta_3)&=\vartheta_2(\vartheta_0\Theta_3-\vartheta_3\Theta_0)\\
\vartheta_3(\vartheta_0\vartheta_2+\Theta_0\Theta_2)&=\Theta_3(\vartheta_0\Theta_2+\vartheta_2\Theta_0); & \Theta_3(\vartheta_0\vartheta_2+5\Theta_0\Theta_2)&=\vartheta_3(\vartheta_0\Theta_2+\vartheta_2\Theta_0)
\end{aligned}$$

und hieraus folgt unmittelbar

$$(N)\qquad\begin{aligned}
\vartheta_0^2(\vartheta_2\vartheta_3-\Theta_2\Theta_3)&=\Theta_0^2(\vartheta_2\vartheta_3-5\Theta_2\Theta_3)\\
\vartheta_2^2(\vartheta_0\vartheta_3-\Theta_0\Theta_3)&=\Theta_2^2(\vartheta_0\vartheta_3-5\Theta_0\Theta_3)\\
\vartheta_3^2(\vartheta_0\vartheta_2+\Theta_0\Theta_2)&=\Theta_3^2(\vartheta_0\vartheta_2+5\Theta_0\Theta_2)
\end{aligned}$$

Mit Hülfe von (K) liefert uns ferner (L) folgendes Gleichungssystem:

$$(M)\qquad\begin{aligned}
(\vartheta_2\vartheta_3-\Theta_2\Theta_3)^6&=16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\Theta_0\Theta_2\Theta_3\,\frac{\Theta_0^9}{\vartheta_0^3}\\
(\Theta_0\Theta_3-\vartheta_0\vartheta_3)^6&=16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\Theta_0\Theta_2\Theta_3\,\frac{\Theta_2^9}{\vartheta_2^3}\\
(\vartheta_0\vartheta_2+\Theta_0\Theta_2)^6&=16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\Theta_0\Theta_2\Theta_3\,\frac{\Theta_3^9}{\vartheta_3^3}\\
(\vartheta_2\vartheta_3-5\Theta_2\Theta_3)^6&=16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\Theta_0\Theta_2\Theta_3\,\frac{\vartheta_0^9}{\Theta_0^3}\\
(\vartheta_0\vartheta_3-5\Theta_0\Theta_3)^6&=16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\Theta_0\Theta_2\Theta_3\,\frac{\vartheta_2^9}{\Theta_2^3}\\
(\vartheta_0\vartheta_2+5\Theta_0\Theta_2)^6&=16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\Theta_0\Theta_2\Theta_3\,\frac{\vartheta_3^9}{\Theta_3^3}
\end{aligned}$$

Eine dieser Gleichungen giebt Gauss an (cf. Gauss Werke II 475), jedoch muss dort ein Versehen vorliegen, denn er giebt als Wert von $\vartheta_0\vartheta_2 + O_0O_2$ den, welchen wir für $\vartheta_0\vartheta_2 + 5\,O_0O_2$ haben.

Es ergeben sich also auch für den Fall $n = 5$ alle von Göring und Gauss angegebenen Formel nach unsrer Methode und ausserdem noch eine ganze Reihe andrer eleganter Beziehungen.

Nach diesen Ausführungen wird es einleuchten, wie lohnend der hier eingeschlagene Weg ist, um Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen aufzustellen, und offenbar erhält man für jeden Wert von n eine ganze Reihe von Beziehungen. Jedoch will ich für jetzt hier abbrechen, indem ich hoffe, dass es mir gelungen ist, die Fruchtbarkeit dieser Methode nach dieser Richtung hin nachzuweisen.

Abschnitt II.

§ 1.

Um die Beziehungen zwischen den Teilwerten der Thetafunctionen und den transformirten Thetafunctionen für das Argument 0 aufzustellen, müssen wir nur noch den drei Gleichungssystemen A eine dritte Form geben. Sucht man die n verschiedenen Wurzeln der rechten Seite, so ergiebt sich unmittelbar, dass man die Gleichung A_4) für den Fall $t = n$ auch so schreiben kann:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\vartheta_1(nv, n\tau) = c\vartheta_1(v)\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h\left(\vartheta_1^2(v)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right) - \vartheta_\alpha^2(v),\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\right)$$

wobei

$$c = \frac{x_1}{\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h\,\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$

ist.

Analog erhält man für den Fall $t = 1$

$$\vartheta_1\left(v, \frac{\tau-8\xi}{n}\right) = c\vartheta_1(v)\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h\left(\vartheta_1^2(v)\,\vartheta_\alpha^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\right.$$
$$\left.-\vartheta_\alpha^2(v)\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\right)$$

wobei

$$c = \frac{x_1}{\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_\alpha^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

ist.

Diese Formeln ergeben sich auch als specielle Fälle aus den von Herrn Prof. Königsberger angegebenen (siehe Königsberger, Elliptische Functionen II Pag. 95 oder Transformation der elliptischen Functionen § 24).

Vermehrt man jetzt wieder um halbe Perioden von 1 und τ, so folgen für $t = n$ die drei Gleichungssysteme

$$\Gamma''$$

1) $\vartheta_{\alpha_1}(nv, n\tau) =$

$$c\vartheta_{\alpha_1}(v,\tau)\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h\left(\vartheta_{\alpha_1}^2(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}^2\left(\frac{h}{n},\tau\right)\mp\vartheta_1^2(v,\tau)\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n},\tau\right)\right)$$

2) $\vartheta_{\alpha_2}(nv, n\tau) =$

$$c\vartheta_{\alpha_2}(v,\tau)\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h\left(\vartheta_{\alpha_2}^2(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}^2\left(\frac{h}{n},\tau\right)\mp\vartheta_{\alpha_3}^2(v,\tau)\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n},\tau\right)\right)$$

3) $\vartheta_{\alpha_3}(nv, n\tau) =$

$$c\vartheta_{\alpha_3}(v,\tau)\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h\left(\vartheta_{\alpha_3}^2(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}^2\left(\frac{h}{n},\tau\right)\mp\vartheta_{\alpha_2}^2(v,\tau)\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n},\tau\right)\right)$$

4) $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1(nv, n\tau) =$

$$c\vartheta_1(v,\tau)\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h\left(\vartheta_1^2(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}^2\left(\frac{h}{n},\tau\right)-\vartheta_{\alpha_1}^2(v,\tau)\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n},\tau\right)\right)$$

wo die Indices α der Reihe nach wieder dieselben Werte annehmen wie bei A, und wo überall das negative Zeichen gültig ist ausser in den Fällen, wo bei A abwechselndes Zeichen zu nehmen ist, dann muss man hier das positive Zeichen wählen.

Ganz analoge Formeln erhält man für den Fall $t = 1$, nur tritt überall an Stelle von $\frac{h}{n}$ rechts $h\frac{\tau-8\xi}{n}$ und links natürlich an Stelle von $\vartheta_\alpha(nv, n\tau)$, $\vartheta_\alpha\left(v, \frac{\tau-8\xi}{n}\right)$; wir wollen diese Gleichungen hier nicht angeben, sie jedoch mit Γ'' bezeichnen.

§. 2.

Für die allgemeinen Betrachtungen sowohl wie für die speciellen Fälle wollen wir hier überall von vorne herein die Fälle $t = n$ und $t = 1$ unterscheiden, erstere liefern uns die Beziehungen für die Teilwerte der reellen Periode, und letztere die für die Teilwerte der imaginären Periode.

Bestimmt man zunächst die Coefficienten der Gleichungssysteme A durch die Wurzelwerte der Gleichungen, wie sie sich unmittelbar durch Vergleichung der Gleichungssysteme A und Γ ergeben, so erhält man für den Fall $t = n$:

$$x_1 = c \prod_1^{\frac{n-1}{2}} {}_h \vartheta_a^2\left(\frac{h}{n}\right) = \frac{O_a}{\vartheta_a^n};$$

also

$$c = \frac{O_a}{\vartheta_a^n} \frac{1}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} {}_h \vartheta_a^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$

$$x_{\frac{n+1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . c \prod_1^{\frac{n-1}{2}} {}_h \vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{O_a}{\vartheta_a^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} {}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_a^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$

$$x_2 = - c \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}_h \vartheta_a^2\left(\frac{1}{n}\right)\vartheta_a^2\left(\frac{2}{n}\right) \ldots \vartheta_a^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_a^2\left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots \vartheta_a^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$= - \frac{O_a}{\vartheta_a^n} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_a^2\left(\frac{h}{n}\right)} \quad \text{oder}$$

$$= - \frac{O_a}{\vartheta_a^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} {}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_a^2\left(\frac{h}{n}\right)} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}_h \frac{\vartheta_a^2\left(\frac{1}{n}\right) \ldots \vartheta_a^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_a^2\left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots \vartheta_a^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{1}{n}\right) \ldots \vartheta_1^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots \vartheta_1^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}$$

$$x_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-3}{2}} c \sum_1^{\frac{n-3}{2}} \vartheta_1^2\left(\frac{1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{2}{n}\right) \ldots \vartheta_1^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_a^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots$$

$$\ldots \vartheta_1^2\left(\frac{n-1}{2n}\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}$$

$$= (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} {}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}_h \frac{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$

$$x_3 = c \sum_{h=1\; k=2}^{h=\frac{n-1}{2}\; k=\frac{n-1}{2}} {}_{h,k}\, \vartheta_\alpha^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$= \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \sum_{h=1\; k=2}^{h=\frac{n-1}{2}\; k=\frac{n-1}{2}} {}_{h,k} \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$= \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} {}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)} \sum_{h=1\; k=2}^{h=\frac{n-1}{2}\; k=\frac{n-1}{2}} {}_{h,k} \frac{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots}{\vartheta_1^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots}$$

$$\frac{\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}{\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}$$

wo überall die Summe nach h und k zu nehmen ist, und für jeden Wert von h, k alle ganzzahligen Werte von $h+1$ bis $\frac{n-1}{2}$ durchlaufen muss; dasselbe gilt von den folgenden Ausdrücken

$$x_{\frac{n-3}{2}} = (-1)^{\frac{n-5}{2}} c \sum_{h=1\; k=2}^{h=\frac{n-1}{2}\; k=\frac{n-1}{2}} {}_{h,k}\, \vartheta_1^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n-5}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sum_{k=2}^{k=\frac{n-1}{2}}{}_{h,k} \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{1}{n}\right) \dots \vartheta_1^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\dots}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{1}{n}\right) \dots \vartheta_\alpha^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\dots}$$

$$\frac{\dots\vartheta_1^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\dots\vartheta_1^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}{\dots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\dots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}$$

$$= (-1)^{\frac{n-5}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)} \sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sum_{k=2}^{k=\frac{n-1}{2}}{}_{h,k} \frac{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Ganz analoge Ausdrücke erhält man für den Fall $t = 1$, nur tritt überall an Stelle von $\frac{l}{n}$ $\frac{l(\tau - 8\xi)}{n}$.

Setzt man nun in diesen Formeln für die Coefficienten x_r die in Abschnitt I. §2. gefundenen Werte ein, so kann man jede dieser Summen resp. Producte der Teilwerte der Thetafunctionen durch die transformirten Thetafunctionen und jenen die zweiten Ableitungen derselben enthaltenden Ausdruck darstellen. Der Ausdruck für x_1 liefert so nichts Neues, wohl aber alle übrigen von $x_{\frac{n+1}{2}}$ ab. Man erhält so folgende merkwürdigen Relationen zwischen diesen Grössen:

a) durch den Coefficienten $x_{\frac{n+1}{2}}$.

α) für die imaginäre Periode.

$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\,.\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(h\,.\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{O_2 O_3}{\vartheta_2 \vartheta_3}$$

$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\,.\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h\,.\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{O_0 O_3}{\vartheta_0 \vartheta_3}$$

$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\,.\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(h\,.\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{O_0 O_2}{\vartheta_0 \vartheta_2}$$

Diese drei Gleichungen setzen uns in den Stand, sämmtliche von Herrn Dr. Göring für den allgemeinen Fall abgeleiteten Beziehungen zwischen den Teilwerten der imaginären Periode und den transformirten Thetafunctionen herzustellen, wenn wir nur die Gleichung hinzuziehen

$$2\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(2x,\tau)$$

Auch Herr Dr. Göring hat dieselbe benutzt und giebt sie § 1 (19) an, sie folgt unmittelbar aus der ersten Gleichung der Jacobi'schen Tabelle A (Jacobi's Werke I 507)

$$\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)\vartheta_3(v) + \vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)\vartheta_2(v) = \vartheta_3(x', y', z', v') + \vartheta_2(x', y', z', v')$$

wenn man $x = x - \frac{1}{2}$, $y = x - \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$, $z = x + \frac{\tau}{2}$ und $u = x$ setzt.

Giebt man x der Reihe nach die Werte $\frac{\tau - 8\xi}{n}$, $2\frac{\tau - 8\xi}{n}$, ... $\frac{n-1}{2}\frac{\tau - 8\xi}{n}$ und multiplicirt alle diese Gleichungen, so folgt

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_0\left(h.\frac{\tau - 8\xi}{n}\right) \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1\left(h.\frac{\tau - 8\xi}{n}\right) \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_2\left(h.\frac{\tau - 8\xi}{n}\right) \times$$
$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_3\left(h.\frac{\tau - 8\xi}{n}\right) = (\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1\left(2h\frac{\tau - 8\xi}{n}\right)$$

Es ist nun aber, wenn $\frac{n-1}{2}$ eine gerade Zahl bezeichnet,

$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1\left(2h\frac{\tau - 8\xi}{n}\right) = \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1\left(h\frac{\tau - 8\xi}{n}\right) e^{-\frac{\pi i \tau}{n}\frac{(n+1).(n-1)}{8}} e^{2\pi i\xi\frac{(3n+1).(n-1)}{n}}$$

wie sich analog den Göring'schen Betrachtungen für den speciellen Fall $\xi = 0$ § 9 I leicht nachweisen lässt.

Ist dagegen $\frac{n-1}{2}$ eine ungerade Zahl, so erhält der letzte Factor die Form $e^{2\pi i\xi\frac{(3n-1).(3n+1)}{n}}$.

Man müsste demnach im Folgenden zwischen diesen zwei Fällen

unterscheiden, setzt man jedoch jetzt $\frac{\tau - 8\xi}{n} = \tau$, so ergiebt sich sowohl, wenn $\frac{n-1}{2}$ gerade ist, als auch, wenn es ungerade ist,

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1(2h\tau, n\tau + 8\xi) = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1(h\tau, n\tau + 8\xi) e^{-\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{8}}$$

denn der letzte Factor nimmt dann in beiden Fällen die Form $e^{2\pi i m} = 1$ an.

Für den speciellen Wert $\xi = 0$ fällt diese Gleichung mit der Göring'schen § 9 I (5) zusammen.

Setzt man dies in der früheren Gleichung ein, so folgt

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_0(h\tau, n\tau + 8\xi) \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_2(h\tau, n\tau + 8\xi) \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_3(h\tau, n\tau + 8\xi) =$$

$$(\vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{8}}$$

wo

$$\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau + 8\xi)$$

ist; diese Formel schliesst wieder als speciellen Fall die Göring'sche § 9 I (6) in sich.

Nach den früheren Gleichungen können wir nun aber jedes der in der letzten Gleichung auftretenden Producte durch jedes andere ausdrücken, eliminirt man mithin zwei derselben, so bekommt man einen Ausdruck für das dritte Product und somit auch sofort die entsprechenden Werte der anderen Producte ausgedrückt in Thetafunctionen mit dem Argument 0.

Eliminiren wir z. B. die Producte der Teilwerte ϑ_2 und ϑ_3, so erhalten wir die Relation

$$2^{\frac{n-1}{2}} e^{\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_0(h\tau, n\tau + 8\xi) = \sqrt{\frac{O_0}{\vartheta_0} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}}}$$

oder

$$e^{\pi i \tau \frac{n+1.n-1}{24}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_0(h\tau, n\tau + 8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_2 \vartheta_3}{O_2 O_3}} \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{n-3}{6}} \left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

wobei

$$O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau), \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau + 8\xi)$$

ist.

Mit dieser Relation sind aber sofort auch die folgenden gefunden:

$$(-1)^{\frac{n-1}{4}} 2^{\frac{n-1}{2}} e^{\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1(h\tau, n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}}}$$

oder

$$(-1)^{\frac{n-1}{4}} e^{\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1(h\tau, n\tau+8\xi) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{n-3}{6}} \left(\frac{O_0O_2O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = A.$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} e^{\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_2(h\tau, n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_2}{\vartheta_2} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}}}$$

oder

$$e^{\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_2(h\tau, n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0O_3}}\, A.$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} e^{\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_3(h\tau, n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_3}{\vartheta_3} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}}}$$

oder

$$e^{\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_3(h\tau, n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}}\, A.$$

Diese Gleichungen repräsentiren uns für den speciellen Fall $\xi = 0$ genau die Gleichungssysteme von Göring § 9 2. (16) und (17), wenn wir beachten, dass unser $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau+8\xi)$ und $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$, und dass $n = \alpha$ bei Göring, dagegen jenes $n = \frac{n-1}{2}$ ist.

β) für die reelle Periode.

Verfährt man in analoger Weise, wie für $t = 1$, für $t = n$, so erhält man unmittelbar die Göring'schen Gleichnngen § 9 3. (23) und (24):

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{5}\sqrt{\frac{O_0O_2O_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}}}$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_0\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{O_0}{\vartheta_0} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}}$$

(23)

(23)

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_2\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{O_2}{\vartheta_2}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_3\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{O_3}{\vartheta_3}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

oder, wenn man

$$\left(\frac{O_0O_2O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{n-3}{6}} = B$$

setzt

(24)

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{n}\, B$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_0\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2O_3}}\, B$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_2\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0O_3}}\, B$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_3\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}}\, B$$

Combinirt man diese Resultate noch mit denen der imaginären Periode, so ergeben sich ohne weiteres auch die Gleichungen (25) (26) und (27).

Wir haben damit nach unsrer Methode nicht nur sämmtliche Göring'schen Formeln für den allgemeinen Fall, dass n eine ungerade Zahl ist, gefunden, sondern auch noch wenigstens für die imaginäre Periode bedeutende Erweiterungen dieser Resultate.

Unsre Methode reicht jedoch noch viel weiter, wir erhalten völlig neue Relationen, wenn wir nun auch die Ausdrücke für die übrigen Coefficienten vergleichen, und zwar zunächst

b) die für die Coefficienten x_2 und $x_{\frac{n-1}{2}}$.

α) Für die imaginäre Periode ergeben sich so folgende Beziehungen:

$$\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} = \frac{1}{2\pi^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left(n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{O_0''}{O_0}\right)$$

$$\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{6\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left\{\frac{3}{\pi^2}\left(n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{O_0''}{O_0}\right) - \left((\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)-(O_2^4+O_3^4)\right)\right\}$$

$$\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} = \frac{1}{2\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\left(n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{O_2''}{O_2}\right)$$

$$\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\left\{\frac{3}{\pi^2}\left(n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = \frac{O_2''}{O_2}\right) + \left((\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)-(O_0^4+O_3^4)\right)\right\}$$

$$\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} = -\frac{1}{2\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\left(n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{O_3''}{O_3}\right)$$

$$\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\left\{\frac{3}{\pi^2}\left(n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{O_3''}{O_3}\right) - \left((\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)-(O_0^4-O_2^4)\right)\right\}$$

Ganz ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die Summen der Producte der Quotienten zu je $\frac{n-3}{2}$, wie sie in den dritten Werten für die Coefficienten x_2 und $x_{\frac{n-1}{2}}$ enthalten sind. Da man diese jedoch direct aus den obigen erhält, wenn man respective mit

$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_a^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} \text{ oder } \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_a^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

multiplicirt und diese Pro-

ducte rechts nach a) durch die transformirten Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausdrückt, so will ich sie hier nicht noch speciell angeben.

β) In gleicher Weise folgen für die reelle Periode folgende Relationen:

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)} = -\frac{n}{2\pi^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$

$$= -\frac{1}{6\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left\{\frac{3n}{\pi^2}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)-\left(n^2(O_2^4+O_3^4)-(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\right)\right\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)} = -\frac{n}{2\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\left(n\frac{O_2''}{O_2}-\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$

$$= -\frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\left\{\frac{3n}{\pi^2}\left(n\frac{O_2''}{O_2}-\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)+\left(n^2(O_0^4+O_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)\right)\right\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{h}{n}\right)} = \frac{n}{2\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\left(n\frac{O_3''}{O_3}-\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_3^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$

$$= -\frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\left\{\frac{3n}{\pi^2}\left(n\frac{O_3''}{O_3}-\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)-\left(n^2(O_0^4-O_2^4)-(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)\right)\right\}$$

In diesen letzten sechs Gleichungen ist überall $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$, während in b)α) $O_\alpha = \vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau-8\xi}{n}\right)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$ ist.

Diese Formeln finden sich nicht mehr in der Göring'schen Abhandlung, wohl aber gelangt man durch Specialisirung der von Herrn Dr. Herstowski in seiner Inaugural-Dissertation § 3 (6)—(17) aufgestellten Relationen zu ganz ähnlichen, jedoch nicht mit diesen identischen Formeln. Es sind dies die schon von Herrn Prof. Kronecker angegebenen Formeln. — In obigen Gleichungen tritt ausser den Teilwerten der Thetafunctionen und den transformirten Thetafunctionen noch jener die zweiten Ableitungen derselben enthaltende Ausdruck auf. Diesen zu entfernen ist im Allgemeinen nicht möglich, wenigstens nicht auf dem hier eingeschlagenen Wege; für die speciellen Fälle jedoch können wir obige Summen rational durch die transformirten Thetafunctionen allein ausdrücken, da wir dann $n^2\frac{O_\alpha''}{O_\alpha} - n\frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}$ durch diese Grössen darstellen können. Z. B. ist

für $\underline{n = 3}$

$$3\frac{\vartheta_0''(0, 3\tau)}{\vartheta_0(0, 3\tau)} - \frac{\vartheta_0''(0, \tau)}{\vartheta_0(0, \tau)} = -2\pi^2\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3 = \ldots$$

für $\underline{n = 5}$

$$5\frac{\vartheta_0''(0, 5\tau)}{\vartheta_0(0, 5\tau)} - \frac{\vartheta_0''(0, \tau)}{\vartheta_0(0, \tau)} = \frac{1}{15}\pi^2\{25(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\} = \ldots$$

Können wir nun auch die einzelnen Summen nicht allein durch Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausdrücken, so können wir doch Relationen zwischen diesen Summen aufstellen, in denen ausserdem nur noch Thetafunctionen mit dem Argument 0 auftreten. Ich will mich hier auf die der reellen Periode und auf die der imaginären Periode beschränken, in denen die Teilwerte derselben zwei Thetafunctionen vorkommen, und auf solche zwischen der reellen und imaginären Periode unter einander, für die ein gleiches statt hat. Offenbar kann man auch zwischen allen übrigen Relationen aufstellen, was unmittelbar klar ist, wenn man bedenkt, dass die Gleichungen bestehen

$$\left(n\frac{\vartheta_3''(0, n\tau)}{\vartheta_3(0, n\tau)} - \frac{\vartheta_3''(0, \tau)}{\vartheta_3(0, \tau)}\right) = \left(n\frac{\vartheta_0''(0, n\tau)}{\vartheta_0(0, n\tau)} - \frac{\vartheta_0''(0, \tau)}{\vartheta_0(0, \tau)}\right)$$
$$= \pi^2(nO_2^4 - \vartheta_2^4), \text{ etc.}$$

Man findet so durch Elimination der zweiten Ableitungen folgende Beziehungen:

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)} - \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)} = -\frac{1}{6\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\{n^2(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)} - \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)} = \frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\{n^2(O_0^4 + O_3^4) - (\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4)\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{h}{n}\right)} + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_3^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)} = \frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\{n^2(O_0^4 - O_2^4) - (\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4)\}$$

wobei

$$O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau) \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$$

ist; ferner

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} - \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{6\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\{(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) - (O_2^4 + O_3^4)\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} - \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= -\frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\{(\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4) - (O_0^4 + O_3^4)\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= -\frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\{(\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4) - (O_0^4 - O_2^4)\}$$

wo

$$O_\alpha = \vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau-8\xi}{n}\right), \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$$

ist.

Um nun Beziehungen zwischen den Summen der Teilwerte der reellen und imaginären Periode für $\xi = 0$ herzustellen, müssen wir noch in den Gleichungen für die imaginäre Periode statt $\frac{\tau}{n}$ τ einführen; dann nehmen die in denselben auftretenden Ausdrücke die Form an, es wird

$$\vartheta_\alpha\left(h\frac{\tau}{n}, \tau\right) = \vartheta_\alpha(h\tau, n\tau), \quad O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau) \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau)$$

Es ist dann also O_α der imaginären Periode gleich, ϑ_α der reellen Periode und ϑ_α der imaginären Periode gleich, O_α der reellen. Vertauscht man deshalb in den Ausdrücken der imaginären Periode O_α und ϑ_α und eliminirt dann $n\frac{O_\alpha''}{O_\alpha}-\frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}$, so erhält man

$$\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2(h\tau, n\tau)}{\vartheta_0^2(h\tau, n\tau)} = -\frac{\vartheta_2^2\vartheta_3^2}{nO_2^2O_3^2}\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}, \tau\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}, \tau\right)}$$

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^2\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}, \tau\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}, \tau\right)} + nO_2^2O_3^2\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2(h\tau, n\tau)}{\vartheta_1^2(h\tau, n\tau)}$$

$$= \frac{n-1}{6}\{n(O_2^4+O_3^4)+(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\}$$

und analog für die andern Summen.

c) Gehen wir jetzt noch einen Schritt weiter und untersuchen, welche Relationen sich aus der Vergleichung der Ausdrücke für die Coefficienten x_3 und $x_{\frac{n-3}{2}}$ ergeben, so erhalten wir

α) für die imaginäre Periode.

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_0^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{O_0''}{O_0}-n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2+\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{6\pi^2}\left(\frac{O_0''}{O_0}-n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{12}(O_2^4O_3^4-n\vartheta_2^4\vartheta_3^4)\right\}$$

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_0^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{O_0''}{O_0}-n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2-\frac{(O_2^4+O_3^4)-3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(\frac{O_0''}{O_0}-n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)[(O_2^4+O_3^4)-(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)]$$

$$\left.-\frac{1}{120}[(O_2^8+4O_2^4O_3^4+O_3^8)-(\vartheta_2^8+(10n-6)\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)]\right\}$$

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_2^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{\Theta_2''}{\Theta_0}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)^2-\frac{\vartheta_0^4+\vartheta_3^4}{6\pi^2}\left(\frac{\Theta_2''}{\Theta_2}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{12}(\Theta_0^4\Theta_3^4-n\vartheta_0^4\vartheta_3^4)\right\}$$

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_2^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{\Theta_2''}{\Theta_2}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)^2+\frac{(\Theta_0^4+\Theta_3^4)-3(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(\frac{\Theta_2''}{\Theta_2}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)[(\Theta_0^4+\Theta_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)]$$

$$\left.-\frac{1}{120}[(\Theta_0^8+4\Theta_0^4\Theta_3^4+\Theta_3^8)-(\vartheta_0^8+(10n-6)\vartheta_0^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)]\right\}$$

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_3^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_2^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{\Theta_3''}{\Theta_3}-n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2+\frac{\vartheta_0^4-\vartheta_2^4}{6\pi^2}\left(\frac{\Theta_3''}{\Theta_3}-n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}(\Theta_0^4\Theta_2^4-n\vartheta_0^4\vartheta_2^4)\right\}$$

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_3^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_2^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{\Theta_3''}{\Theta_3}-n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2-\frac{(\Theta_0^4-\Theta_2^4)-3(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)}{12\pi^2}\left(\frac{\Theta_3''}{\Theta_3}-n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)[(\Theta_0^4-\Theta_2^4)-(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)]$$

$$\left.-\frac{1}{120}[(\Theta_0^8-4\Theta_0^4\Theta_2^4+\Theta_2^8)-(\vartheta_0^8-(10n-6)\vartheta_0^4\vartheta_2^4+\vartheta_2^8)]\right\}$$

Ganz analoge Formeln ergeben sich für die Summe der Producte zu je $\frac{n-5}{2}$ nach den dritten Ausdrücken für die Coefficienten x_3 und $x_{\frac{n-3}{2}}$,

dieselben unterscheiden sich von den obigen nur durch die Factoren vor den gewundenen Klammern und entstehen aus ihnen einfach durch Multiplication mit $\Pi_h \dfrac{\vartheta_\alpha^2\left(h\dfrac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\dfrac{\tau-8\xi}{n}\right)}$ resp. $\Pi_h \dfrac{\vartheta_1^2\left(h\dfrac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(h\dfrac{\tau-8\xi}{n}\right)}$.

In allen obigen Gleichungen ist die Summe nach h und k zu nehmen von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ und zwar muss k für jeden Wert von h alle Werte von $h+1$ bis $\frac{n-1}{2}$ durchlaufen; ferner bedeutet überall O_α $\vartheta_\alpha\left(0, \dfrac{\tau-8\xi}{n}\right)$, ϑ_α $\vartheta_\alpha(0, \tau)$.

β) Auch die Beziehungen für die reelle Periode haben eine ganz ähnliche Form, und will ich mich deshalb damit begnügen, die zwei ersten anzugeben:

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_0^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$
$$= \frac{1}{\vartheta_2^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{n^2}{8\pi^4}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2 + n\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{6\pi^2}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{n}{12}(n^3 O_2^4 O_3^4 - \vartheta_2^4\vartheta_3^4)\right\}$$

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_0^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$
$$= \frac{1}{\vartheta_2^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{n^2}{8\pi^4}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2\right.$$
$$- n\frac{n^2(O_2^4+O_3^4)-3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)$$
$$- \frac{1}{12}(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\left[n^2(O_2^4+O_3^4)-(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\right]$$
$$\left. - \frac{1}{120}\left[n^4(O_2^8+4O_2^4O_3^4+O_3^8)-(\vartheta_2^8+(10n-6)\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)\right]\right\}$$

Diese Formeln oder auch ihnen ähnliche habe ich nirgends gefunden.

Legt man dieselben nun wieder als Ausgangsgleichungen zu

Grunde, so kann man aus ihnen wieder eine Menge Relationen herleiten, welche die Beziehungen zwischen diesen Summen unter sich und zwischen diesen und den früheren Summen angeben.

Diese alle aufzustellen, würde jedoch zu weit führen, und will ich hier nur je eine für die reelle und imaginäre Periode vorführen, um zu zeigen, wie sich dieselben gestalten. Es ist z. B.

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)}-\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_3^4}\Big\{n\frac{n^2(\Theta_0^4+\Theta_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(n\frac{\Theta_2''}{\Theta_0}-\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)[n^2(\Theta_0^4+\Theta_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)]$$

$$-\frac{1}{120}[n^2(\Theta_0^8-6\Theta_0^4\Theta_3^4+\Theta_3^8)-(\vartheta_0^8-6\vartheta_0^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)]\Big\}$$

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_2^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}-\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_2^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_3^4}\Big\{\frac{(\Theta_0^4+\Theta_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(\frac{\Theta_2''}{\Theta_2}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)[(\Theta_0^4+\Theta_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)]$$

$$-\frac{1}{120}[(\Theta_0^8-6\Theta_0^4\Theta_3^4+\Theta_3^8)-(\vartheta_0^8-6\vartheta_0^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)]\Big\}$$

Hier treten also schon in diese Beziehungen die zweiten Ableitungen der Thetafunctionen ein. Nimmt man aber noch die früheren Summen hinzu, so kann man dieselben auch hieraus eliminiren und bekommt dann rationale Beziehungen zwischen zweien dieser letzteren Summen, einer der früheren und den transformirten Thetafunctionen mit dem Argument 0. Man kann die zweiten Ableitungen aber auch allein durch eine oder mehrere der früheren Summen eliminiren und so rationale Beziehungen zwischen einer von diesen Summen und einer oder mehreren der früheren herstellen.

In gleicher Weise könnte man nun weiter gehen und die Coefficienten x_4 und $x_{\frac{n-5}{2}}$, x_5 und $x_{\frac{n-7}{2}}$, ... auf zweifache Weise ausdrücken, und würde so zu Summen von Producten zu je 3 oder je

$\frac{n-5}{2}$, zu je 4 oder je $\frac{n-7}{2}$, ... der Quotienten der Teilwerte gelangen immer ausgedrückt durch die Thetafunctionen für die Nullwerte des Arguments und zunächst durch Potenzen von $t^2 \frac{O_\alpha''}{O_\alpha} - n \frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}$; da man diese aber stets mit Hülfe der früheren und der gleichartigen Summen eliminiren kann, wird man alle Summen, zu denen man gelangt, rational durch alle gleichartigen und niederen Summen und die transformirten Thetafunctionen ausdrücken können.

Fassen wir schliesslich Alles zusammen, so ergiebt sich:

1) Allgemein kann man nur die Producte der $\frac{n-1}{2}$ verschiedenen Teilwerte der Thetafunctionen durch die Thetafunctionen selbst mit dem Argument 0 ausdrücken.

2) Rationale Beziehungen zwischen gleichartigen Summen, nur in Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausgedrückt, kann man lediglich für die Summen, welche man aus den Coefficienten x_2 und $x_{\frac{n-1}{2}}$ erhält, aufstellen.

3) Alle höheren Summen kann man durch alle niederen Summen und die Thetafunctionen für das Argument 0 rational darstellen, hierbei können auch Summen gleich hohen Grades auftreten, jedoch nicht ausschliesslich.

§ 3.

Für den speciellen Fall $n = 3$ erhalten wir die wichtigsten Formeln unmittelbar durch Specialisirung der allgemeinen, und zwar kommt hier nur die erste Reihe der allgemeinen Untersuchungen in Betracht, die sich auf die Coefficienten x_1 und $x_{\frac{n+1}{2}} = x_2$ beziehen.

Specialisirt man so die Formeln § 2. a)$_{\alpha)}$, so folgen die Beziehungen für die imaginäre Periode

$$\sqrt{-1}\, e^{\frac{1}{3}\pi i \tau} \vartheta_1(\tau, 3\tau + 8\xi) = \left(\frac{\vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$e^{\frac{1}{3}\pi i \tau} \vartheta_0(\tau, 3\tau + 8\xi) = \sqrt{\frac{O_2 O_3}{\vartheta_2 \vartheta_3}} \left(\frac{\vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

§ 2. (11)$_{1-4}$.

§ 2. $(11)_{1-4}$.

$$e^{\frac{1}{3}\pi i\tau}\vartheta_2(\tau,\ 3\tau+8\xi)=\sqrt{\frac{O_0 O_3}{\vartheta_0\vartheta_3}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$e^{\frac{1}{3}\pi i\tau}\vartheta_3(\tau,\ 3\tau+8\xi)=\sqrt{\frac{O_0 O_2}{\vartheta_0\vartheta_2}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

wobei

$$O_\alpha=\vartheta_\alpha(0,\ 3\tau+8\xi)\quad\text{und}\quad\vartheta_\alpha=\vartheta_\alpha(0,\ \tau)$$

ist. Für $\xi=0$ sind diese Gleichungen mit den ersten vier Gleichungen Göring § 2. (11) identisch.

In gleicher Weise folgen aus § 2. $a)_\beta$ für $n=3$.

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{3},\tau)=\sqrt{3}\left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\vartheta_0(\tfrac{1}{3},\tau)=\sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}}\left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$(11)_{5-8}$

$$\vartheta_2(\tfrac{1}{3},\tau)=\sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}}\left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\vartheta_3(\tfrac{1}{3},\tau)=\sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}}\left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Zu diesen Gleichungen gelangt man für diesen speciellen Fall $n=3$ auch, wenn man statt der Jacobi'schen Gleichungen Tabelle (A), welche ja bei den allgemeinen Betrachtungen hinzugezogen sind, die der Tabelle (C) zu Hülfe nimmt. Setzt man dort in den Gleichungen 6, 4 und 2 $x=y=\frac{1}{3}$ resp. $=\frac{\tau-8\xi}{3}$ und eliminirt dann nach den Gleichungen für die Quotienten der Producte der Teilwerte, welche sich in dem Fall $n=3$ auf Quotienten zweier einfachen Teilwerte reduciren, eine der Grössen $\vartheta_\alpha(\frac{1}{3})$ resp. $\vartheta_\alpha\left(\frac{\tau-8\xi}{3}\right)$, so ergeben sich zunächst die auch nicht ganz unsymmetrischen Formeln:

$$\sqrt{-1}\,e^{\frac{\pi i\tau}{3}}\vartheta_1(\tau,3\tau)=O_0\,\frac{\vartheta_2^{\frac{1}{3}}\vartheta_3^{\frac{1}{3}}O_2^{\frac{1}{6}}O_3^{\frac{1}{6}}}{(\vartheta_2^2\vartheta_3^2-O_2^2O_3^2)^{\frac{1}{6}}}$$

$$e^{\frac{\pi i\tau}{3}}\vartheta_0(\tau,3\tau)=O_0\,\frac{O_2^{\frac{1}{3}}O_3^{\frac{1}{3}}}{(\vartheta_2^2\vartheta_3^2-O_2^2O_3^2)^{\frac{1}{6}}}$$

$$e^{\frac{\pi i\tau}{3}}\vartheta_2(\tau,3\tau)=\frac{\vartheta_2^{\frac{1}{3}}}{\vartheta_0^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{O_0^{\frac{1}{3}}O_2^{\frac{1}{6}}O_3^{\frac{2}{3}}}{(\vartheta_2^2\vartheta_3^2-O_2^2O_3^2)^{\frac{1}{6}}}$$

$$e^{\frac{\pi i\tau}{3}}\vartheta_3(\tau,3\tau)=\frac{\vartheta_3^{\frac{1}{3}}}{\vartheta_0^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{O_0^{\frac{1}{3}}O_2^{\frac{2}{3}}O_3^{\frac{1}{6}}}{(\vartheta_2^2\vartheta_3^2-O_2^2O_3^2)^{\frac{1}{6}}}$$

und ähnliche Formeln für die reelle Periode. Mit Hülfe der Gleichungen Abschnitt I. § 3. (G) reduciren sie sich unmittelbar auf die obigen.

Mit dem Gleichungssystem (11) sind nun aber auch sofort die Systeme (8) und (10) gefunden, sie entstehen ja ohne weiteres durch Multiplication der Gleichung für $\vartheta_1(\tau, 3\tau)$ resp. $\vartheta_1(\frac{1}{3}, \tau)$ mit den übrigen Gleichungen derselben Periode; ferner folgt auch unmittelbar (9), denn setzt man in dem Ausdruck für $\vartheta_1(\frac{1}{3}, \tau)$ für τ $\frac{\tau}{3}$, so erhält man

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{3}, \frac{\tau}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

woraus sofort klar ist, dass die Beziehung stattfindet

$$(9) \quad \vartheta_1\left(\frac{1}{3}, \frac{\tau}{3}\right) = i\sqrt{3}\, e^{\frac{\pi i \tau}{3}} \vartheta_1(\tau, 3\tau).$$

Auch das Gleichungssystem (5) kann man als eine Folgerung des Systems (11) ansehen; denn bildet man $\vartheta_0 . \vartheta_0(\tau, 3\tau) + \vartheta_3 . \vartheta_3(\tau, 3\tau)$ so ergiebt sich nach Göring § 3. $(1)_1$ die Beziehung

$$(5)_1 \quad \vartheta_0 . \vartheta_0(\tau, 3\tau) + \vartheta_3 . \vartheta_3(\tau, 3\tau) = \vartheta_2 . \vartheta_2(\tau, 3\tau)$$

und ebenso ergiebt sich nach § 3. $(1)_2$

$$(5)_2 \quad O_2 . \vartheta_2(\tfrac{1}{3}) + O_3 . \vartheta_3(\tfrac{1}{3}) = O_0 . \vartheta_0(\tfrac{1}{3})$$

Multiplicirt man ferner Göring § 2. $(5)_1$ mit $\vartheta_1^2(\tau, 3\tau)$ und setzt die Werte nach § 2 (8) ein, so kommt

$$(7) \quad \vartheta_0^2\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3} + \vartheta_3^2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2} = \vartheta_2^2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_3}$$

und eine analoge Formel erhält man, wenn man § 2. $(5)_2$ mit $\vartheta_1^2(\frac{1}{3})$ multiplicirt und nach (10) einsetzt:

$$O_2^2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_3} + O_3^2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2} = O_0^2\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3}$$

Hiermit sind aber sämmtliche für uns in Betracht kommende Göring'schen Beziehungen für $n = 3$ gefunden.

§ 4.

Für den speciellen Fall $n = 5$ kommen von den allgemeinen Untersuchungen die in Betracht, welche sich auf die Coefficienten $x_{\frac{n+1}{2}} = x_3$, x_2 und $x_{\frac{n-1}{2}} = x_2$ beziehen, und es folgen die ersten der

Göring'schen Formeln wieder einfach durch Specialisirung der allgemeinen und zwar

a) der, welche wir durch $x_{\frac{n+1}{2}} = x_3$ mit Hülfe des Jacobi'schen Gleichungssystemes (A) erhielten. Für den speciellen Fall $n = 5$ hätten wir auch statt dessen die Jacobi'sche Tabelle (B) hinzuziehen können, es ergeben sich auch dann ganz einfache Beziehungen ähnlich denen, welche wir bei $n = 3$ angegeben haben; jedoch da man dieselben auch aus den durch Specialisirung der allgemeinen resultirenden erhalten kann, wenn man sie durch das Gleichungssystem Abschnitt I. § 4. (M) umformt, und da die letzteren noch etwas einfacher sind, will ich mich hier begnügen diese anzugeben. Sie lauten folgendermassen:

α) für dic imaginäre Periode:

$$-4e^{\pi i\tau}\vartheta_1(\tau, 5\tau+8\xi)\vartheta_1(2\tau, 5\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{O_0 O_2 O_3}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}}$$

oder

$$= (16\vartheta_)\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{4}}$$

Göring § 4. (12) und (8), nach (13)

$$= \sqrt{2}\sqrt{\vartheta_3^2 O_3^2 - \vartheta_0^2 O_0^2 - \vartheta_2^2 O_2^2}$$

Göring § 4. (9)

$= \ldots$ nach Abschnitt I. § 4.

$$4e^{\pi i\tau}\vartheta_0(\tau, 5\tau+8\xi)\vartheta_0(2\tau, 5\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_0}{O_0}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}} = O_0^2 - \vartheta_0^2$$

$\underline{(18)_2}$ und $\underline{(3)_2}$

$$= \sqrt{\frac{O_2 O_3}{\vartheta_2\vartheta_3}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

$$4e^{\pi i\tau}\vartheta_2(\tau, 5\tau+8\xi)\vartheta_2(2\tau, 5\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}} = (\vartheta_2^2 - O_2^2)$$

$\underline{(18)_3}$ und $\underline{(3)_3}$

$$= \sqrt{\frac{O_0 O_3}{\vartheta_0\vartheta_3}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{4}}}$$

$$4e^{\pi i\tau}\vartheta_3(\tau, 5\tau+8\xi)\vartheta_3(2\tau, 5\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_3}{O_3}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}} = \vartheta_3^2 - O_3^2$$

$\underline{(18)_1}$ und $\underline{(3)_1}$

$$= \sqrt{\frac{O_0 O_2}{\vartheta_0\vartheta_2}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{4}}}$$

β) für die reelle Periode.

$$4\vartheta_1(\tfrac{1}{5})\vartheta_1(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{5}\sqrt{\frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{5}{6}}}{(4O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}}}$$
$$= \sqrt{5}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{4}}$$
$$= \sqrt{5}\sqrt{2\vartheta_3^2 O_3^2 - 2\vartheta_0^2 O_0^2 - 2\vartheta_2^2 O_2^2} = \ldots$$

$$4\vartheta_0(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{\frac{O_0}{\vartheta_0}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{5}{6}}}{(4O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}}} = 5O_0^2 - \vartheta_0^2 \qquad \underline{(19)_2} \text{ und } \underline{(5^b)_2}$$
$$= \sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{4}}$$

$$4\vartheta_2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{\frac{O_2}{\vartheta_2}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{5}{6}}}{(4O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}}} = \vartheta_2^2 - 5O_2^2 \qquad \underline{(19)_3} \text{ und } \underline{(5^b)_3}$$
$$= \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{4}}$$

$$4\vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_3(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{\frac{O_3}{\vartheta_3}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{5}{6}}}{(4O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}}} = 5O_3^2 - \vartheta_3^2 \qquad \underline{(19)_1} \text{ und } \underline{(5^b)_1}$$
$$= \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{4}}$$

Ferner folgen noch unmittelbar durch Vergleichung der reellen und imaginären Periode für $\xi = 0$ unter einander

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{5})\vartheta_1(\tfrac{2}{5}) = -\sqrt{5}\,e^{\pi i\tau}\vartheta_1(\tau, 5\tau)\vartheta_1(2\tau, 5\tau) \qquad \underline{(6)}$$

$$\vartheta_0(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}) = \frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}e^{\pi i\tau}(\vartheta_0(\tau, 5\tau)\vartheta_0(2\tau, 5\tau)$$

$$\vartheta_2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2(\tfrac{2}{5}) = \frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}e^{\pi i\tau}\vartheta_2(\tau, 5\tau)\vartheta_2(2\tau, 5\tau)$$

$$\vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_3(\tfrac{2}{5}) = \frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}e^{\pi i\tau}\vartheta_3(\tau, 5\tau)\vartheta_3(2\tau, 5\tau)$$

Hier bedeutet überall ϑ_α $\vartheta_\alpha(0, \tau)$ und O_α $\vartheta_\alpha(0, 5\tau)$, ebenso oben in β), während in α) O_α allgemein gleich $\vartheta_\alpha(0, 5\tau+8\xi)$ ist.

Ferner folgen aus der Form der obigen Gleichungen, welche Göring unter (3) und (5) angiebt, die zwischen (5^a) und (5^b) angegebenen Formeln:

$$\vartheta_0(\tfrac{1}{5}, \tau)\vartheta_0(\tfrac{2}{5}, \tau) = O_0^2 + e^{\pi i\tau}\vartheta_0(\tau, 5\tau)\vartheta_0(2\tau, 5\tau)$$
$$-\vartheta_2(\tfrac{1}{5}, \tau)\vartheta_2(\tfrac{2}{5}, \tau) = O_2^2 - e^{\pi i\tau}\vartheta_2(\tau, 5\tau)\vartheta_2(2\tau, 5\tau)$$
$$\vartheta_3(\tfrac{1}{5}, \tau)\vartheta_3(\tfrac{2}{5}, \tau) = O_3^2 - e^{\pi i\tau}\vartheta_3(\tau, 5\tau)\vartheta_3(2\tau, 5\tau)$$

Hiermit sind sämmtliche uns interessirenden Formeln, die Göring in § 4. angiebt, auf unserm Wege gefunden.

b) Wir gehen deshalb jetzt dazu über die Formeln zu betrachten, welche sich durch den Coefficienten x_3 ergeben. Diese könnten wir nun auch unmittelbar durch Specialisirung aus den allgemeinen ableiten, und es würden sich jedenfalls die Ausdrücke für $\Sigma\frac{\vartheta_1^2(-1)}{\vartheta_\alpha^2(-1)}$ sehr gut dazu eignen, um analog dem im Folgenden eingeschlagenen Verfahren die einzelnen Teilwerte zu berechnen; ich habe dies jedoch schon ausgeführt, bevor ich die allgemeinen Untersuchungen anstellte, und dabei hauptsächlich die Gleichungen Abschnitt I. § 4. (2) und (3) benutzt, also Gleichungen, welche für den allgemeinen Fall nicht anwendbar sind. Die Resultate müssen ja schliesslich dieselben sein, wenigstens muss man sie mit Hülfe der für $n = 5$ zwischen den transformirten Thetafunctionen aufgestellten Beziehungen auf einander reduciren können. Mein Verfahren war nun folgendes:

α) für die reelle Periode.

Zunächst combinirte ich jene Gleichungen (2) und (3) und eleminirte daraus den Coefficienten x_3 — man könnte allerdings auch eine dieser Gleichungen zu Grunde legen, jedoch bietet die Combination den Vorzug, dass die Resultate dann von vorn herein symmetrischer werden — ; hierdurch ergiebt sich zwischen x_2 und x_1 die Relation

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^2 O_0 x_2 = x_1\{\vartheta_3^3(\vartheta_0 O_3 - \vartheta_3 O_0) - \vartheta_2^3(\vartheta_0 O_2 + \vartheta_2 O_0)\}$$

oder nach Abschnitt I. § 4. (H)

$$= -x_1(\vartheta_0 O_2 + \vartheta_2 O_0)\sqrt{\vartheta_2 O_2}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}} + \sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\right)$$

Setzt man hierin für x_2 und x_1 die Wurzelwerte ein, so folgt

$$\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) + \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5})$$
$$= \vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5})\frac{\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3}}{\vartheta_2^2\vartheta_3^2 O_0}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}} + \sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\Bigg)$$

oder wenn man für $\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5})$ nach a) seinen Wert einsetzt,

$$\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) + \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\vartheta_0}{O_0}}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}} + \sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\right)$$

Würde man diesen Ausdruck quadriren und $4\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5}).\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5})$ auf beiden Seiten subtrahiren, so würde man auch für die Differenz $\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) - \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5})$ einen Wert in transformirten Thetafunctio-

nen erhalten und somit auch einen Ausdruck für die einzelnen Glieder. Diese Differenz erhält man aber noch leichter durch die Gleichung 8. der Jacobi'schen Tabelle (C), wenn man $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$ setzt. Man bekommt so unmittelbar

$$\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5})-\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5}) = \vartheta_0^2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1(\tfrac{2}{5})$$
$$=\sqrt{5}\vartheta_0^2\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich unmittelbar addendo und substrahendo

$$\left.\begin{array}{l}2\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) = \\ 2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5}) = \end{array}\right\}$$
$$=\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\vartheta_0}{O_0}}\left\{\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3 O_0}\right\}$$

oder wenn man die Klammer mit Hülfe der Gleichungssysteme Göring § 4 (18) und (19) umformt

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}}\,\frac{\vartheta_0}{O_0}\,\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_0 O_0(O_0^2-\vartheta_0^2)\}$$

In gleicher Weise erhält man aus den Gleichungssystemen II. und III.

$$\vartheta_2^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5})+\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2^2(\tfrac{2}{5}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}}\left\{\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}\right\}$$
$$\vartheta_2^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5})-\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2^2(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{5}\vartheta_2^2\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left.\begin{array}{l}2\vartheta_2^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) = \\ 2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2^2(\tfrac{2}{5}) = \end{array}\right\}$$
$$=\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}}\left\{\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3 O_2}\right\}$$

oder

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}}\,\frac{\vartheta_2}{O_2}\,\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)-\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_2 O_2(\vartheta_2^2-O_2^2)\}$$

und

$$\vartheta_3^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5})+\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_3^2(\tfrac{2}{5}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\vartheta_3}{O_3}}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\right)$$
$$\vartheta_3^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5})-\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_3^2(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{5}\vartheta_3^2\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left.\begin{array}{l}2\vartheta_3^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) = \\ 2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_3^2(\tfrac{2}{5}) = \end{array}\right\}$$
$$=\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\vartheta_3}{O_3}}\left\{\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3 O_3}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}\frac{\vartheta_3}{O_3}}\left\{\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_3O_3(\vartheta_3^2-O_3^2)\right\}$$

Um nun die Werte der einzelnen Teilwerte zu erhalten, ziehen wir die schon im allgemeinen Fall benutzte Gleichung hinzu:

$$2\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(2x,\tau).$$

Giebt man x den Wert $\frac{1}{5}$ und quadrirt, so folgt eine Gleichung, die man auch so schreiben kann

$$\tfrac{1}{2}.2\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}).\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}).2\vartheta_2^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}).2\vartheta_3^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5})=\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1^{10}(\tfrac{2}{5})$$

eine ganz analoge Formel, die hieraus entsteht, wenn man nur die Argumente $\frac{1}{5}$ und $\frac{2}{5}$ vertauscht, ergiebt sich, wenn man x den Wert $\frac{2}{5}$ giebt. Setzt man in diesen Gleichungen links die oben gefundenen Werte ein, so folgt unmittelbar

$$\left.\begin{matrix}\vartheta_1^{10}(\tfrac{1}{5})=\\ \vartheta_1^{10}(\tfrac{2}{5})=\end{matrix}\right\} = \frac{5}{8}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{7}{6}}\left(\frac{O_0O_2O_3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\mp\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3O_0}\right)$$
$$\times\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}\mp\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3O_2}\right)\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\mp\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3O_3}\right)$$

oder

$$= \frac{5}{128}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{2}{3}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{4}{3}}}\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\mp\sqrt{5}\vartheta_0O_0(O_0^2-\vartheta_0^2)\}$$
$$\times\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)-\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)\mp\sqrt{5}\vartheta_2O_2(\vartheta_2^2-O_2^2)\}$$
$$\times\{\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\mp\sqrt{5}\vartheta_3O_3(\vartheta_3^2-O_3^2)\}$$

Hieraus ergeben sich nun unmittelbar nach den früheren Gleichungen auch die Werte für die übrigen Teilwerte und zwar ist

$$\left.\begin{matrix}2^5\vartheta_0^{10}(\tfrac{1}{5})=\\ 2^5\vartheta_0^{10}(\tfrac{2}{5})=\end{matrix}\right\} = \tfrac{2}{5}(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{2}{3}}(O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}\frac{\vartheta_0^{\frac{5}{2}}}{O_0^{\frac{5}{2}}}$$
$$\times\frac{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3O_0}\right)^4}{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3O_2}\right)\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3O_3}\right)}$$
$$=\frac{1}{5.8}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{11}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{7}{6}}}\frac{\vartheta_0^{\frac{5}{2}}}{O_0^{\frac{5}{2}}}$$
$$\times\frac{\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_0O_0(O_0^2-\vartheta_0^2)\}^4}{(\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)-\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_2O_2(\vartheta_2^2-O_2^2))\times(\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}.\vartheta_3O_3(\vartheta_3^2-O_3^2))}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^5\vartheta_2^{10}(\tfrac{1}{5})= \\ 2^5\vartheta_2^{10}(\tfrac{2}{5})= \end{array}\right\} = \tfrac{2}{5}(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{3}{4}}(O_0O_2O_3)^{\frac{1}{4}}\frac{\vartheta_2^{\frac{1}{2}}}{O_2^{\frac{5}{2}}}\times$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3O_2}\right)^4}{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3\vartheta_0}\right)\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3O_3}\right)}$$

oder

$$=\frac{1}{5.8}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{11}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{7}{6}}}\frac{\vartheta_2^{\frac{1}{2}}}{O_2^{\frac{5}{2}}}$$

$$\times\frac{\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)-\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)\pm\sqrt{5\vartheta_2O_2}(\vartheta_2^2-O_2^2)\}^4}{(\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5\vartheta_0O_0}(O_0^2-\vartheta_0^2))\times(\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5\vartheta_3O_3}(\vartheta_3^2-O_3^2))}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^5\vartheta_3^{10}(\tfrac{1}{5})= \\ 2^5\vartheta_3^{10}(\tfrac{2}{5})= \end{array}\right\} = \tfrac{2}{5}(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{3}{4}}(O_0O_2O_3)^{\frac{1}{4}}\frac{\vartheta_3^{\frac{1}{2}}}{O_3^{\frac{5}{2}}}\times$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3O_3}\right)^4}{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3O_0}\right)\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3O_2}\right)}$$

oder

$$=\frac{1}{5.8}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{11}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{7}{6}}}\frac{\vartheta_3^{\frac{1}{2}}}{O_3^{\frac{5}{2}}}$$

$$\times\frac{\{\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5\vartheta_3O_3}(\vartheta_3^2-O_3^2)\}^4}{(\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5\vartheta_0O_0}(O_0^2-\vartheta_0^2))\times(\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)-\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2))\pm\sqrt{5\vartheta_2O_2}(\vartheta_2^2-O_2^2))}$$

β) In gleicher Weise ergeben sich für die imaginäre Periode folgende Relationen:

Ich will dieselben hier nur in der letzten Form angeben und zwar folgende Bezeichnungen einführen

$$O_3^2(5O_3^2-\vartheta_3^2)-O_2^2(\vartheta_2^2-5O_2^2)\pm\vartheta_0O_0(5O_0^2-\vartheta_0^2) \text{ resp.} = A' \text{ od. } A''$$
$$O_0^2(5O_0^2-\vartheta_0^2)+O_3^2(5O_3^2-\vartheta_3^2)\pm\vartheta_2O_2(\vartheta_2^2-5O_2^2) \text{ resp.} = B' \text{ od. } B''$$
$$O_0^2(5O_0^2-\vartheta_0^2)+O_2^2(\vartheta_2^2-5O_2^2)\pm\vartheta_3O_3(5O_3^2-\vartheta_3^2) \text{ resp.} = C' \text{ od. } C''$$

wobei für A', B' und C' das obere Zeichen gilt und für A'', B'' und C'' das untere.

Wir erhalten so folgende einfache Gleichungen:

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_0^2(\tau,5\tau)\vartheta_1^2(2\tau,5\tau)=\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{O_2O_3}{\vartheta_2\vartheta_3}}\frac{O_0}{\vartheta_0}A'$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_1^2(\tau, 5\tau)\vartheta_0^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{O_2O_3}{\vartheta_2\vartheta_3}}\,\frac{O_0}{\vartheta_0}A''$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_2^2(\tau, 5\tau)\vartheta_1^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{O_0O_3}{\vartheta_0\vartheta_3}}\,\frac{O_2}{\vartheta_2}B'$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_1^2(\tau, 5\tau)\vartheta_2^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{O_0O_3}{\vartheta_0\vartheta_3}}\,\frac{O_2}{\vartheta_2}B''$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_3^2(\tau, 5\tau)\vartheta_1^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{O_0O_2}{\vartheta_0\vartheta_2}}\,\frac{O_3}{\vartheta_3}C'$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_1^2(\tau, 5\tau)\vartheta_3^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{O_0O_2}{\vartheta_0\vartheta_2}}\,\frac{O_3}{\vartheta_3}C''$$

ferner

$$e^{8\pi i\tau}\vartheta_1^{10}(\tau, 5\tau) = -\frac{1}{128}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{2}{3}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{4}{3}}}\,A''.B''.C''$$

$$2^5e^{2\pi i\tau}\vartheta_0^{10}(\tau, 5\tau) = \frac{1}{8}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{11}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{7}{6}}}\,\frac{O_0^{\frac{5}{2}}}{\vartheta_0^{\frac{5}{2}}}\,\frac{A'^4}{B'.C'}$$

$$2^5e^{2\pi i\tau}\vartheta_2^{10}(\tau, 5\tau) = \frac{1}{8}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{11}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{7}{6}}}\,\frac{O_2^{\frac{5}{2}}}{\vartheta_2^{\frac{5}{2}}}\,\frac{B'^4}{A'.C'}$$

$$2^5e^{2\pi i\tau}\vartheta_3^{10}(\tau, 5\tau) = \frac{1}{8}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{11}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{7}{6}}}\,\frac{O_3^{\frac{5}{2}}}{\vartheta_3^{\frac{5}{2}}}\,\frac{C'^4}{A'.B'}$$

Ganz analoge Ausdrücke erhält man für $\vartheta_\alpha(2\tau, 5\tau)$, dieselben unterscheiden sich von diesen nur dadurch, dass, wo hier X' steht dort X'' stehen muss und umgekehrt.

Von allen diesen Beziehungen, welche wir streng nach unserer Methode erhalten haben, findet sich bei Göring keine einzige, und es ist auch das schliessliche Resultat für die einzelnen Teilwerte bei ihm ein anderes als das unsrige. Jedenfalls aber wird man unsere Ausdrücke auf eine der vier von Göring angegebenen verschiedenen Formen reduciren können. Jedoch würde es sehr umständlich sein auf diese Weise aus unsren Gleichungen die Göring'schen abzuleiten; ich versuchte daher, ob ich nicht dadurch, dass ich in den Gleichungssystemen Γ dem Argument x bestimmte Werte beilegte, direct die Bemühungen herleiten könnte, die Göring in § 5 angiebt, jedoch waren alle diese Bemühungen ohne Erfolg; ich fand dabei aber, dass man mit Hülfe der in a) aufgestellten Relationen sehr einfach aus den Formeln der Jacobi'schen Tabelle (C) diese Beziehungen erhält, wie folgt:

Setzt man in der funfzehnten Gleichung der Jacobi'schen Tabelle (C) $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{1}{5}$, so nimmt sie die Gestalt an

$$2\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}) = \vartheta_0(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}) \,.\, \vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_3(\tfrac{2}{5}) + \vartheta_1(\tfrac{1}{5})\vartheta_1(\tfrac{2}{5}) \,.\, \vartheta_2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2(\tfrac{2}{5})$$

Setzen wir rechts für die Producte $\vartheta_\alpha(\frac{1}{5}) \,.\, \vartheta_\alpha(\frac{2}{5})$ die Werte ein, so ergiebt sich

$$4\vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}}\,(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}(\vartheta_2 + \sqrt{5}\,O_2)$$

oder nach Abschnitt I. § 4. (H)

$$\underline{(5)}_1 \quad = (\sqrt{5}\,O_0 - \vartheta_0)(\sqrt{5}\,O_3 + \vartheta_3)$$

Setzt man $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$, so folgt ganz analog

$$\underline{(5)_2} \quad 4\vartheta_0(\tfrac{1}{5})\vartheta_3(\tfrac{2}{5}) = (\sqrt{5}\,O_0 + \vartheta_0)(\sqrt{5}\,O_3 - \vartheta_3)$$

In gleicher Weise ergeben sich aus $(C)_{14}$ $\underline{(5)_3}$ und $\underline{(5)_4}$ und aus $(C)_{13}$ $\underline{(5)_5}$ und $\underline{(5)_6}$.

Setzt man für x und y resp. $\dfrac{\tau}{5}$ und $\dfrac{2\tau}{5}$, so erhält man ganz analog die Relationen für die imaginäre Periode § 5. $\underline{(3)}$.

Nachdem es so gelungen ist auf einem von Göring abweichenden Wege, ohne Hülfe der Schröter'schen Arbeiten, die Gleichungen herzustellen, von denen Göring ausgeht, um die einzelnen Teilwerte allein durch die transformirten Thetafunctionen auszudrücken, können wir im übrigen seinen sehr hübschen Entwicklungen folgen und bekommen so ganz elementar fünf verschiedene Darstellungen für die Teilwerte. Zu diesen kommt nun noch als sechste die, welche wir streng nach unsrer Methode erhalten haben.

Nachdem ich nun nachgewiesen habe, dass auch für die speciellen Fälle $n = 3$ und $n = 5$ unsre Methode nach jeder Richtung hin brauchbar ist, will ich für jetzt die Arbeit hier abschliessen. Offenbar wird sie auch für höhere Fälle $n = 7$ etc. ausreichend sein, da ja immer eine grosse Menge Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stehen.

XI.

Miscellen.

1.

Zur Polaritätstheorie des Dreiseites.

J sei das Inkreiscentrum des Axendreiecks ABC. AJ treffe BC in J_a. $Q \equiv q_a q_b q_c$ sei ein beliebiger Punkt in der Dreieckebene. AQ treffe BC in Q_a. $Q_b Q_c$ schneide AJ_a in $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}'$ liege zu J_a bezüglich $A\mathfrak{A}$ harmonisch.

Wir finden:

$$\begin{array}{rccc}
Q_b \equiv & q_a & 0 & q_c \\
Q_c \equiv & q_a & q_b & 0 \\
Q_b Q_c \equiv & -q_b q_c & q_c q_a & q_a q_b \\
AJ \equiv & 0 & 1 & -1 \\
\mathfrak{A} \equiv & q_a q_b + q_c q_a & q_b q_c & q_b q_c
\end{array}$$

Verbinden wir die Punkte B, C mit A und $\mathfrak{A}$; so trifft die Verbindungsgerade der Schnittpunkte

$$(BA,\quad C\mathfrak{A}),\qquad (B\mathfrak{A},\quad CA)$$

die AJ_a in $\mathfrak{A}'$. Es ist:

$$\begin{array}{rccc}
BA \equiv & 0 & 0 & 1 \\
C\mathfrak{A} \equiv & -q_b q_c & q_a q_b + q_c q_a & 0 \\
CA \equiv & 0 & 1 & 0 \\
B\mathfrak{A} \equiv & -q_b q_c & 0 & q_a q_b + q_c q_a
\end{array}$$

Somit erhalten wir:

$$(BA,\ C\mathfrak{A}) \equiv q_a q_b + q_c q_a \qquad q_b q_c \qquad 0$$
$$(B\mathfrak{A},\ CA) \equiv q_a q_b + q_c q_a \qquad 0 \qquad q_b q_c$$

Die Verbindungsgerade dieser Punkte hat die Form:

$$-q_b q_c \qquad q_a q_b + q_c q_a \qquad q_a q_b + q_c q_a$$

Sie trifft die AJ_a in

$$\mathfrak{A}' \equiv 2q_a q_b + 2q_c q_a \qquad q_b q_c \qquad q_b q_c$$

Die $\mathfrak{A}'$ liegen in einer Geraden, wenn

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2q_a q_b + 2q_c q_a & q_b q_c & q_b q_c \\ q_c q_a & 2q_b q_c + 2q_a q_b & q_c q_a \\ q_a q_b & q_a q_b & 2q_c q_a + 2q_b q_c \end{vmatrix} = 0$$

Man findet:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2q_b q_c + 2q_c q_a + 2q_a q_b & q_b q_c & q_b q_c \\ 2q_b q_c + 2q_c q_a + 2q_a q_b & 2q_b q_c + 2q_a q_b & q_c q_a \\ 2q_b q_c + 2q_c q_a + 2q_a q_b & q_a q_b & 2q_c q_a + 2q_b q_c \end{vmatrix}$$

$$= 2q_b q_c \Sigma q_b q_c \begin{vmatrix} 1 & q_c & q_b \\ 1 & 2q_c + 2q_a & q_a \\ 1 & q_a & 2q_a + 2q_b \end{vmatrix}$$

$$= 2q_b q_c \Sigma q_b q_c \begin{vmatrix} 1 & q_c & q_b \\ 0 & q_c + 2q_a & q_a - q_b \\ 0 & q_a - q_c & 2q_a + q_b \end{vmatrix}$$

$$= 2q_b q_c \Sigma q_b q_c \begin{vmatrix} q_c + 2q_a & q_a - q_q \\ q_a - q_c & 2q_a + q_b \end{vmatrix}$$

$$= 6q_a q_b q_c \Sigma q_b q_c . \Sigma q_a$$

Die Curve

$$x_a x_b x_c \Sigma x_a \Sigma x_b x_c = 0$$

zerfällt in die Geraden

$$x_a = 0, \qquad x_b = 0, \qquad x_c = 0,$$

die Axen des Coordinatensystems,

$$\Sigma x_a = 0,$$

die Harmonikale von J und in den Kegelschnitt

$$\Sigma x_b x_c = 0,$$

die konische Polare von J.

Den Ort der Punkte Q, für welche die $\mathfrak{A}'$ in einer Geraden liegen, bilden also ausser den Dreiecksseiten die gerade und konische Polare des Inkreiscentrums.

Durch Projection erhalten wir folgenden allgemeinen Satz:

P, Q seien zwei Punkte in der Ebene des Dreiecks ABC. AP, AQ treffen BC in P_a, Q_a. $Q_b Q_c$ schneide AP_a in $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}'$ liege zu P_a bezüglich $A\mathfrak{A}$ harmonisch. Die $\mathfrak{A}'$ liegen in einer Geraden, wenn Q auf der geraden oder konischen Polare des Punktes P bezüglich des Dreiseites ABC liegt.

Wien, März 1884.

Emil Hain.

2.

Bemerkung zu einer Dreiecksaufgabe.

Der von Herrn Jackwitz im 67. Bande des Archivs, S. 336, behandelten Aufgabe:

> „Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche die Schenkel eines gegebenen gleichschenkeligen Dreiecks so schneidet, dass der obere Abschnitt auf dem einen gleich dem unteren Abschnitt auf dem anderen Schenkel ist“,

lässt sich noch durch folgende Betrachtung eine interessante Seite abgewinnen.

Sieht man zunächst von der Bedingung ab, dass die gesuchte Gerade durch den festen Punkt P gehen soll, und fasst man alle diejenigen Geraden ins Auge, die der anderen Bedingung genügen, so umhüllen dieselben bekanntlich eine Parabel; die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, an diese Parabel von einem gegebenen Punkte die Tangenten zu ziehen.

Es ist nun in der Tat möglich, diese Aufgabe mit Lineal und Zirkel zu lösen, ohne die Parabel selbst zu zeichnen.

Ist (wie a. a. O.) BC die Grundlinie, A die Spitze des gegebenen Dreiecks, und sind wieder D und E die Mitten der gleichen

Schenkel, so gehört DE zu den einhüllenden Geraden und ist die Scheiteltangente der Parabel; die Parabelaxe ist die Höhe AH, ihr Scheitel die Mitte S derselben. Auch AB und AC genügen der gegebenen Bedingung, sind also Tangenten, und HB und HC sind die Ordinaten ihrer Berührungspunkte, weil $SH = SA$; mithin sind B und C selbst Parabelpunkte. Schneidet das in C auf CA errichtete Lot die verlängerte AH in Q, so ist HQ als Subnormale gleich dem Halbparameter, der Brennpunkt ist also der Schnittpunkt der Höhe mit der Mittelsenkrechten DC von AC, d. h. er ist der Mittelpunkt des Umkreises von ABC.

Beachtet man nun, dass jede Tangente der Parabel das vom Brennpunkte auf sie gefällte Lot auf der Scheiteltangente DE trifft, so zeigt sich, dass ein zweiter Punkt Z der gesuchten Tangente derjenige ist, in dem der über PO als Durchmesser beschriebene Kreis die Gerade DE schneidet.

Somit ergiebt sich folgende Construction:

Man verbinde die Mitten D und E der gleichen Seiten des gegebenen Dreiecks, bestimme den Mittelpunkt O des Umkreises und zeichne den Kreis, der PO zum Durchmesser hat. Schneidet DE diesen Kreis in den Punkten Z_1 und Z_2, so lösen die Geraden PZ_1 und PZ_2 die gestellte Aufgabe.

Was die Determination betrifft, so ist die notwendige Bedingung, dass P ausserhalb der Parabel liege. Die Scheitelgleichung derselben ist, wie leicht ersichtlich, $y^2 = \frac{2a^2x}{h}$, wo a die halbe Grundlinie, h die Höhe des Dreiecks bedeutet. Die Coordinaten von P müssen also der Bedingung $y^2 \geqq \frac{2a^2x}{h}$ genügen.

Lässt man als Lösungen der Aufgabe auch die Tangenten gelten, die erst die Verlängerungen der Dreiecksschenkel in der geforderten Weise schneiden, so gibt es bei Erfüllung der angegebenen Ungleichheit, die durch eine einfache Construction zu untersuchen ist, stets zwei Gerade, die im Grenzfall (wo P auf der Parabel liegt, z. B. in S) zu einer einzigen zusammenrücken. Man übersieht ferner leicht, dass man zwei Lösungen im engeren Sinne erhält, wenn P innerhalb des Winkels BAC, zwei Lösungen im weiteren Sinne, wenn P in dem Scheitelwinkel desselben liegt, während jeder Punkt P innerhalb eines der Nebenwinkel zwei Lösungen verschiedener Art liefert.

Die oben gefundene Construction lässt sich übrigens auch ohne Kegelschnittsbetrachtungen begründen; die betreffenden Gedanken unterscheiden sich nur wenig von denen, die zu der von Herrn Jackwitz gegebenen Lösung führen.

Berlin, April 1884.

Heinrich Simon.

XII.

Ueber Projectivität und partielle Differentialgleichungen in der Geometrie.

Von

Th. Sanio.

Das Fundament der Geometrie in ihrem rationellen Aufbau bilden seit Steiner („Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten") die Begriffe der Projectivität der Punktreihen und der Strahlbüschel. Will man diese Begriffe mit Steiner geometrisch definiren, so geschieht das bekanntlich mit Hilfe der auf reiner Anschauung beruhenden Vorstellungen der Perspectivität und Congruenz. (Man verschiebt ein Gebilde, zum Beispiel eine Punktreihe, ohne Veränderung der Form ihres Trägers und der gegenseitigen Lage ihrer Elemente; eine derartige Verschiebung involvirt den Begriff der Congruenz). Die analytische Geometrie ermöglicht eine in gewisser Hinsicht directere Definition der Projectivität.

Seien x und ξ die Abstände zweier entsprechender Punkte P, Π der beiden Punktreihen von zwei bestimmten, übrigens beliebigen Punkten O, O′ derselben, welche keineswegs entsprechende Punkte zu sein brauchen, so sind die Punktreihen dann projectivisch, wenn zwischen den Abständen x, ξ eine lineare Relation

$$\xi = \frac{b_1 + b_2 x}{a_1 + a_2 x}$$

besteht.

Drückt man durch Auflösung dieser Gleichung nach x letzteres durch ξ aus, so erhält man für x eine Function von derselben Form;

auch durch Verschiebung der Coordinatenanfangspunkte 0, 0′ auf ihren Trägern wird die allgemeine Form dieser Relation nicht verändert.

Ich will nun sofort zur analytisch-geometrischen Definition der Projectivität geradliniger Strahlbüschel übergehen, da die Projectivität der Strahlbüschel die Basis der folgenden Betrachtungen bilden wird.

Seien 0, 0′ die Mittelpunkte der beiden Strahlbüschel, a und a' zwei beliebige Anfangsrichtungen, von welchen aus man die Winkel zählt, und welche keineswegs entsprechende Strahlen zu sein brauchen, p, π aber zwei entsprechende Strahlen. Bezeichnet man nun die trigonometrischen Tangenten der Winkel (ap), $(a'\pi)$ respective durch t und τ, so sind die Strahlbüschel dann perspectivisch, wenn zwischen t und τ eine lineare Relation

$$\tau = \frac{b_1 + b_2 t}{a_1 + a_2 t}$$

besteht.

Anmerkung. Hier liesse sich die Theorie der Doppelverhältnisse und ihrer besondern Fälle, also namentlich der harmonischen Teilung, anschliessen. Will man nämlich die Gleichung der Projectivität durch Paare entsprechender Strahlen ausdrücken, so ist aus der Anzahl der Coefficienten klar, dass drei Paare entsprechender Strahlen gegeben sein müssen, um die Coefficienten der Gleichung zu bestimmen. Nennt man die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche diese Strahlen mit zwei beliebigen Anfangsrichtungen bilden, respective t_1, t_2, t_3 und τ_1, τ_2, τ_3, und das vierte Paar wieder t, τ, so findet man die Gleichung der Projectivität sofort in der Form:

$$\begin{vmatrix} t\tau, & t, & \tau, & 1 \\ t_1\tau_1, & t_1, & \tau_1, & 1 \\ t_2\tau_2, & t_2, & \tau_2, & 1 \\ t_3\tau_3, & t_3, & \tau_3, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Umformung vermittelst der bekannten Determinantensätze reducirt sich diese Gleichung auf die überraschend einfache Form:

$$\frac{t - t_1}{t_1 - t_3} : \frac{t - t_2}{t_2 - t_3} = \frac{\tau - \tau_1}{\tau_1 - \tau_3} : \frac{\tau - \tau_2}{\tau_2 - \tau_3}.$$

Die Function auf jeder Seite des Gleichheitszeichens ist das sog nannte Doppelverhältniss oder anharmonische Function.

Vier Paare entsprechender Strahlen zweier perspectivischer Strahlbüschel haben also gleiches Doppelverhältniss.

Diese Relation besitzt analog der für Punktreihen geltenden die merkwürdige Eigenschaft, dass bei Veränderung der Anfangsrichtungen a, a', von welchen aus man die Winkel rechnet, die lineare Form bestehen bleibt; es ist dieses, wie man leicht sieht, eine Folge der so überaus einfachen [rationalen und in Beziehung auf jeden der beiden Bestandteile linearen] Form des Additionstheorems der Function tangens, wodurch sich diese vor den Functionen sinus und cosinus auszeichnet; der innere Grund dafür, dass die projectivische Beziehung der Strahlbüschel gerade durch die Function tangens dargestellt wird. Uebrigens kann man sich bei dieser Darstellung an Stelle der Tangente auch einer allgemeinern Function bedienen, welche im Wesentlichen denselben Charakter hat.

Bezieht man die Winkel jedes Strahlbüschels auf eine andere Anfangsrichtung, so ändern sich die Werte der t und τ, und man hat, wenn man die neuen von den alten durch einen Strich unterscheidet:

$$t = \frac{t'-k}{1+t'k}, \quad t_1 = \frac{t_1'-k}{1+t_1k}$$

u. s. w. Die Substitution dieser Werte in die anharmonische Function ergiebt

$$\frac{t-t_1}{t_1-t_3} : \frac{t-t_2}{t_3-t_3} = \frac{t'-t_1'}{t_1'-t_3'} : \frac{t'-t_2'}{t_2'-t_3'}$$

Der Wert des Doppelverhältnisses ist demnach unabhängig von der Anfangsrichtung, auf welche man die Winkel bezieht. Errichtet man nun in irgend einem Punkte der Anfangsrichtung auf ihr eine Senkrechte, welche von den Strahlen p, p_1, p_2, p_3 in den Punkten P, P_1, P_2, P_3 geschnitten wird, so ist klar, dass das Doppelverhältniss

$$\frac{t-t_1}{t_1-t_3} : \frac{t-t_2}{t_2-t_3} = \frac{PP_1}{P_1P_3} : \frac{PP_2}{P_2P_3}$$

wird. Man hat daher Veranlassung, den rechter Hand stehenden Ausdruck als das Doppelverhältniss der vier Punkte der Transversale zu definiren. Da nach dem Vorigen der Wert dieses Doppelverhältnisses von der Anfangsrichtung a — der Normale der Transversale — unabhängig ist, so ist klar, dass für alle möglichen durch das Strahlbüschel (p, p_1, p_2, p_3) gelegten Transversalen das Doppelverhältniss denselben Wert behält. Damit ist die Grundlage für die Lehre von der Reciprocität der Punktreihen und Strahlbüschel gegeben. — Da bei der allgemeinen Untersuchung des Correlationsbegriffes die harmonischen Verhältnisse wie die sogenannten „metrischen Relationen" überhaupt, so viel ich sehe, nicht von selbst und ungesucht „in das Gesichtsfeld des Beobachters treten", so geschieht ihrer in dem Folgenden keine Erwähnung.

Sei BAZ ein beliebiger Winkel z, und man schneide die Schenkel desselben durch eine Gerade BZ, welche mit der Richtung AB einen bestimmten Winkel $\varkappa$ bildet; alsdann ist das Verhältniss $\frac{BZ}{AB}$ eine Function des Winkels z, welche ausserdem nur noch von dem constanten Winkel $\varkappa$ abhängt. Man könnte sie etwa als „schiefe Tangente des Winkels z" bezeichnen, da sie von der trigonometrischen Tangente sich dadurch unterscheidet, dass der von beiden Verhältnisslinien eingeschlossene Winkel anstatt eines rechten ein schiefer ist.

Bezeichnen wir diese Function für den Augenbick durch $\varphi(z)$, so findet sich leicht

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{\sin\varkappa - \cos\varkappa . \operatorname{tg} z},$$

oder umgekehrt:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin\varkappa . \varphi(z)}{1 + \cos\varkappa . \varphi(z)}.$$

Vermitelst der letztern Formel kann das Additionstheorem der trig. Tangente in das Additionstheorem der Function φ transformirt werden. Man erhält:

$$\varphi(z+u) = \frac{\varphi(z) + \varphi(u) + 2\cos\varkappa . \varphi(z)\varphi(u)}{1 - \varphi(z)\varphi(u)}$$

Diese Formel hat, da $\varkappa$ constant ist, im Wesentlichen denselben Charakter als diejenige für $\operatorname{tg}(z+u)$.

Man kann nun in der Definitionsgleichung der projectivischen Beziehung zweier Strahlbüschel an Stelle der trigonometrischen Tangenten die Function φ einführen, wobei die beiden den Tangenten der Winkel (ap) und $(a'p)$ entsprechenden Functionen auf zwei verschiedene Parameterwinkel $\varkappa$, $\varkappa_1$ bezogen werden dürfen.

Nach diesen Bemerkungen über die Definition des Begriffs der Projectivität soll nun eine ganz beliebige Correlation zweier Punkte P, Π der Ebene ins Auge gefasst werden. (Ich beschränke mich hier auf die Betrachtung der Correlationen gleichartiger Elemente in der Ebene).

Die Coordinaten der Punkte P, Π seien, auf dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem bezogen, respective x, y und ξ, η.

Eine solche Correlation wird analytisch durch zwei Gleichungen definirt; man denke sich aus diesen ξ und η als Functionen von x und y dargestellt, es sei

$$\xi = f(x, y)$$
$$\eta = g(x, y).$$

Einer unendlich kleinen Verschiebung $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ des Punktes P wird im Allgemeinen eine Verschiebung $d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ des Punktes Π von demselben Grade der Kleinheit entsprechen. Vermöge des Zusammenhanges der Grössen ξ, η und x, y wird

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy.$$

Die trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel der Elemente ds, $d\sigma$ gegen die Abscissenaxe mögen respective durch t, τ bezeichnet werden, so dass also

$$\frac{dy}{dx} = t, \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \tau$$

gesetzt wird.

Auf diese Weise erhält man durch Division der für $d\xi$, $d\eta$ gegebenen Differentialausdrücke die lineare Relation

$$\tau = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot t}{\frac{\partial \xi}{dx} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{I.}$$

zwischen t und τ.

Denkt man sich t und dem ensprehend τ veränderlich, so entspricht dem in der Anschauung die Drehung des Elements ds um den Punkt P und des entsprechenden Elements $d\sigma$ um den Punkt Π. Dabei beschreiben die Elemente ds, $d\sigma$ zwei projectivische Strahlbüschel.

So führt der Begriff der geometrischen Verwandtschaft (Correlation) in seiner ganzen Allgemeinheit genommen — denn auch für den Raum ergiebt sich ein entsprechendes Resultat — sofort auf die Projectivität der Strahlbüschel, und man würde Veranlassung haben, das durch den Schnitt entsprechender Strahlen der beiden projectivischen Büschel entstehende Gebilde zu untersuchen, wenn solches nicht bereits von den Schöpfern der neuern Geometrie, am Umfassendsten durch den grossen Geometer Steiner, geschehen wäre.

Diese Untersuchung würde sich sehr simpel, dabei ohne grosse Rechnung, durch Benutzung des gewöhnlichen Cartesius'schen rechtwinkligen Coordinatensystems führen lassen, wenn man voraussetzt, dass die einfachsten Eigenschaften der Kegelschnitte als Curven

zweiter Ordnung zuvor durch dieselben Hilfsmittel festgestellt worden sind.

Da die Sätze, um welche es sich handelt, und welche dem Folgenden zur Grundlage dienen, sehr bekannt sind, so wird es genügen, sie hier einfach anzugeben:

1. Die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen zweier projectivischer Strahlbüschel liegen auf einem Kegelschnitt, welcher auch durch die Mittelpunkte der Strahlbüschel hindurchgeht.

2. Wenn die beiden Strahlbüschel einen Strahl gemeinschaftlich haben, welcher in diesem Falle die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte ist, so wird die Schnittcurve eine gerade Linie (man sagt: die Strahlbüschel liegen perspectivisch) oder, wie man die Sache auch auffassen darf, ein Linienpaar, indem die Verbindungslinie der Mittelpunkte als die zweite Gerade des Paares anzusehen ist.

Ein dritter Satz, welcher ebenfalls eine allgemeine Eigenschaft der projectivischen Strahlbüschel ausspricht und ebenso, wie die beiden vorigen, zu den Fundamentalsätzen der Steiner'schen Geometrie gehört, folgt aus Formeln, welche das Ergebniss einer Transformation der Gleichung der perjectivischen Beziehung sind; diese Formeln sind für die allgemeine Theorie der Correlationen von Wichtigkeit und müssen daher entwickelt werden.

Zur Abkürzung mag

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a_1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = b_1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = a_2, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = b_2$$

gesetzt werden.

Die Fundamentalformel I. lautet auf diese Weise:

$$\tau = \frac{b_1 + b_2 t}{a_1 + a_2 t}.$$

Die Winkel, deren trigonometrische Tangenten t und τ sind, beziehen sich beide auf eine und dieselbe Anfangsrichtung, die Richtung der Abscissenaxe des Coordinatensystems. Da nach dem Frühern durch die Einführung beliebiger anderer Anfangsrichtungen an Stelle dieser die lineare Form der Gleichung sich nicht ändert, so liegt es sehr nahe, durch Einführung passender neuer Anfangsrichtungen die Gleichungen zu vereinfachen, was dem Begriff einer Coordinatentransformation entspricht.

Seien resp. k und $\varkappa$ die Tangenten der Winkel, welche die beiden neuen Anfangsrichtungen mit der ursprünglichen, der Richtung der Abscissenaxe bilden, und t', τ' die Tangenten der neuen veränderlichen Winkel, so wird vermöge des Additionstheorems der Function tangens

$$t = \frac{k+t'}{1-\varkappa\tau'} \qquad \tau = \frac{\varkappa+\tau'}{1-k\tau'},$$

und die Substitution dieser Ausdrücke liefert die Gleichung der Projectivität in der neuen Form, welche ausserdem nach den Variabeln t' und τ' geordnet werden mag. Dieselbe lautet:

$$\begin{gathered}[a_2-ka_1+\varkappa(b_2-kb_1)]t'\tau'+[a_1+ka_2+\varkappa(b_1+kb_2)]\tau' \\ +[\varkappa(a_2-ka_1)-(b_2-kb_1)]t'+\varkappa(a_1+ka_2)-(b_1+kb_2)=0\end{gathered}$$

Man wird sich also die Aufgabe stellen, zwei der Coefficienten dieser Gleichung durch geeignete Verfügung über k und $\varkappa$ zum Verschwinden zu bringen.

Es ist zu erwarten, dass dieses für die Coefficienten von $t'\tau'$ und von t' zugleich, oder für die Coefficienten von $t'\tau'$ und τ' zugleich im Allgemeinen nicht möglich sein wird, ebenso wenig für das constante Glied und einen der Coefficienten von t' und τ', weil in allen diesen Fällen eine der Variabeln t' und τ' von der andern unabhängig werden und in eine Constante degeneriren würde.

Führt man die Rechnung dennoch für einen dieser Fälle durch, etwa für den ersten, setzt also die Coefficienten von $t'\tau'$ und τ' gleich Null, so folgt aus den Gleichungen

$$\begin{gathered}a_2-ka_1+\varkappa(b_2-kb_1), \\ a_1+ka_2+\varkappa(b_1+kb_2)=0\end{gathered}$$

durch Elimination von $\varkappa$ die Gleichung

$$(a_1b_2-a_2b_1)(1+k^2)=0.$$

Das Nullsetzen des zweiten Factors dieser Gleichung führt zu einer für jede Stelle des Gebiets vorhandenen Lösung, welche aber imaginär ist. Sie lautet:

$$\begin{gathered}k=i, \\ \varkappa=-\frac{a_2-ia_1}{b_2-ib_1}=-\frac{a_1+ia_2}{b_1+ib_2},\end{gathered}$$

worin i die beiden Werte der $\sqrt{-1}$ bezeichnet; erfüllt man aber die Gleichung dadurch, dass man den ersten Factor derselben gleich Null setzt, also festsetzt, dass sich

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$$

verhalten soll, so setzt man damit eine besondere Eigenschaft der Correlation fest, welche (wie sich nachweisen lässt) keiner allgemein und einer beliebig gegebenen nur an bestimmten Stellen des Gebiets zukommt, nämlich auf einer Curve, welche durch jene Gleichung bestimmt wird. Wir werden nachher auf die Gleichung

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$$

oder

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

noch durch eine andere Betrachtung geführt werden.

Da die drei andern oben genannten Combinationen im Wesentlichen auf eben dasselbe Resultat (nämlich auf die Gleichung $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$) führen, so bleiben nur noch zwei Combinationen zu untersuchen.

Setzt man den Coefficienten von $t'\tau'$ und das constante Glied gleich Null, also

$$a_2 - ka_1 + \varkappa(b_2 - kb_1) = 0$$
$$\varkappa(a_1 + ka_2) - (b_1 + kb_2) = 0,$$

so erhält man aus diesen Gleichungen, indem man die eine der beiden Unbekannten eliminirt, quadratische Gleichungen für k und $\varkappa$, welche sich folgendermassen schreiben lassen:

$$\frac{k}{1-k^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2}$$
$$\frac{\varkappa}{1-\varkappa^2} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_1^2}.$$

Wir erhalten demnach zwei Werte für k und ebenso für $\varkappa$, und aus der Gestalt der Gleichungen, von welchen wir ausgingen, folgt, dass zu jedem Wert von k einer und nur einer von $\varkappa$ gehört, und umgekehrt.

Setzt man endlich die Coefficienten von t' und τ' gleich Null, also

$$a_1 + ka_2 + \varkappa(b_1 + kb_2) = 0$$
$$\varkappa(a_2 - ka_1) - (b_2 - kb_1) = 0,$$

so folgen hieraus für k und $\varkappa$ genau dieselben quadratischen Gleichungen wie vorher; der Unterschied beider Transformationen kann

also nur in der Verschiedenheit der Zusammenordnung der Werte von k und $\varkappa$ liegen.

Wir wollen diese beiden quadratischen Gleichungen einer genauern Diskussion unterwerfen.

Die Grössen k und $\varkappa$ bezeichnen, wie schon gesagt worden ist, Tangenten der Neigungswinkel der neuen Anfangsrichtungen gegen die Abscissenaxe des Coordinatensystems. Mögen diese Winkel selbst respective durch O und ω bezeichnet, also

$$k = \operatorname{tg} o, \quad \varkappa = \operatorname{tg} \omega$$

gesetzt werden.

Nach dem Additionstheorem der Tangente ist

$$\frac{2k}{1-k^2} = \operatorname{tg} 2o, \quad \frac{2k}{1-k^2} = \operatorname{tg} 2\omega.$$

Die beiden mehrerwähnten quadratischen Gleichungen nehmen also die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 2o &= \frac{2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2} \\ \operatorname{tg} 2\omega &= \frac{2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{II.}$$

Da die Grösse eines Winkels um π vermehrt werden kann, ohne dass dadurch die Tangente ihren Wert ändert, so ist klar, dass die beiden Winkel o, welche den beiden Werten von k entsprechen, um $\frac{\pi}{2}$ verschieden sein werden. Dasselbe gilt von den Winkeln ω, welche den beiden Werten von $\varkappa$ entsprechen.

Die beiden Paare von Anfangsrichtungen, welche die Coordinatentransformation als für die Vereinfachung der Projectivität zweckmässig ergeben hat, bilden also rechte Winkel.

Bezieht man die Gleichung der Projectivität auf diese Anfangsrichtungen, so nimmt sie nach dem Vorigen entweder die Gestalt

$$At'\tau' + D = 0,$$

oder die Gestalt

$$B\tau' + Ct' = 0$$

an, je nach der Wahl der Anfangsrichtungen unter den zulässigen Paaren.

Es ist ziemlich gleichgültig welche dieser beiden Formen man wählt, da sich beide mit gleicher Leichtigkeit anwenden lassen; wünscht man aber, dass die gewählten Anfangsrichtungen zugleich zwei entsprechende Strahlen sein sollen, also $t'=0$, $\tau'=0$ entspreche, was eine sehr natürliche Festsetzung ist, so wird dieselbe nur durch die zweite Form erfüllt, welche in so fern einen Vorzug besitzt und daher als die Normalform der Gleichung der Projectivität zweier Strahlbüschel angesehen werden darf.

Seien nun τ', t' irgend zwei entsprechende Werte der Variabeln, so geht aus der Form der Gleichung

$$B\tau'+Ct'=0$$

sofort hervor, dass $-\tau'$, $-t'$ ebenfalls entsprechende Werte sein müssen.

Wir haben demnach einen dritten Fundamentalsatz der Steinerschen Geometrie, welcher lautet:

Zwei projectivische Strahlbüschel besitzen ein Paar entsprechende rechte Winkel; jedem Paar zu dem einem Schenkel des rechten Winkels — und demnach auch zu dem andern — symmetrisch liegender Strahlen entspricht in dem andern Büschel ein Paar zu den Schenkeln seines rechten Winkels ebenfalls symmetrisch liegender Strahlen.

Dieser Satz in seiner allgemeinen Anwendung auf Correlationen mag hier kurz als „Princip der Winkelsymmetrie", die Schenkel der rechten Winkel als „Symmetrieaxen" bezeichnet werden. Wir sehen in dem Vorstehenden eine besondere Eigenschaft des rechten Winkels, wodurch derselbe sich vor andern Winkeln auszeichnet. Paare entsprechender gleicher Winkel giebt es bei projectivischen Strahlbüscheln unendlich viele, aber nur die Schenkel des Paares entsprechender rechter Winkel besitzen die genannte Symmetrieeigenschaft.

Die Axen der Winkelsymmetrie haben noch eine andere Symmetrieeigenschaft. Wir betrachteten bisher nur die Richtungen entsprechender Elemente ds, $d\sigma$; jetzt soll auch das Verhältniss ihrer (unendlich kleinen) Längen ins Auge gefasst werden.

Die Gleichung

$$d\sigma^2=d\xi^2+d\eta^2$$

ist, wenn man $d\sigma$ constant sein lässt, die Gleichung eines um Π als Mittelpunkt mit ds als Radius beschriebenen Kreises. Die ent-

sprechende Curve des andern Gebiets erhält man dadurch, dass man in dieser Gleichung vermittelst der Formeln

$$d\xi = a_1 dx + a_2 dy, \quad d\eta = b_1 dx + b_2 dy$$

die Incremente $d\xi$, $d\eta$ durch die Incremente dx, dy ersetzt.

So wird:

$$d\sigma^2 = (a_1^2 + b_1^2)dx^2 + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)dx\,dy + (a_2^2 + b_2^2)dy^2.$$

Das ist aber die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt P ist. [Man kann leicht nachweisen, dass die rechte Seite der Gleichung eine positive Form ist].

Transformirt man dieselbe auf die Hauptaxen, indem man

$$dx = u\cos o - v\sin o$$
$$dy = u\sin o + v\cos o$$

setzt und o so bestimmt, dass in der neuen Gleichung der Coefficient von uv verschwindet, so erhält man:

$$\operatorname{tg} 2o = \frac{2(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2},$$

also dieselbe Formel, welche vorhin für die Winkel-Symmetrieaxen des Punktes P gefunden wurde.

Da für das andere Gebiet das Entsprechende gilt, so hat man den merkwürdigen der Differentialgeometrie angehörigen Satz:

Wenn man das Element $d\sigma$ um Π als Mittelpunkt einen Kreis beschreiben lässt, so beschreibt das Element ds um P als Mittelpunkt im Allgemeinen eine Ellipse, deren Hauptaxen mit den Symmetrieaxen der projectivischen Beziehung zusammenfallen; das Gleiche gilt in dem andern Gebiet.

Eine besonders merkwürdige Gruppe der Correlationen wird durch diejenigen gebildet, welchen die Eigenschaft der Conformität oder der Aehnlichkeit in den kleinsten Teilen zukommt.

Die Bedingungsgleichungen der Conformität ergeben sich ungezwungen aus den zur Bestimmung der Symmetrieaxen dienenden Formeln, wenn man den Fall in Betrachtung zieht, in welchem dieselben unbestimmt werden.

Setzt man den Zähler und Nenner der Formel

$$\operatorname{tg} 2o = \frac{2(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2}$$

gleich Null, so folgt aus diesen Gleichungen, wenn man sie in der Form

$$a_1^3 - a_2^2 = -b_1^2 + b_2^2$$

$$2a_1 a_2 = -2b_1 b_2$$

aufschreibt, alsdann ins Quadrat erhebt und addirt, dass

$$(a_1^2 + a_2^2)^2 = (b_1^2 + b_2^2)^2$$

sein muss, also, wenn man nur reelle Werte der Variabelen zulässt

$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2.$$

Die Combination dieser Gleichung mit der frühern

$$a_1^2 - a_2^2 = -b_1^2 + b_2^2$$

ergiebt:

$$a_1^2 = b_2^2, \quad a_2^2 = b_1^2.$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung der Bedingung

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0,$$

dass

$$a_1 = \varepsilon b_2, \quad a_2 = -\varepsilon b_1$$

sein muss, wenn ε die positive oder negative Einheit bezeichnet, welches die bekannten Bedingungen der Conformität sind. Man sieht, dass, wenn sie erfüllt sind, auch die andere Formel:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2}$$

den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ erhält, wie es sein muss.

Je nachdem man $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ nimmt, erhält man zwei Arten der Conformität, deren charakteristischer Unterschied durch die Benutzung zweier Formeln gefunden werden kann, welche aus denen für $\operatorname{tg} 2o$ und $\operatorname{tg} 2\omega$ folgen und hier nur angegeben werden mögen. Man findet:

$$\operatorname{tg}(2\omega - 2o) = \frac{2(a_1 + b_2)(b_1 - a_2)}{(a_1 + b_2)^2 - (b_1 - a_2)^2},$$

$$\operatorname{tg}(2\omega + 2o) = \frac{2(a_1 - b_2)(b_1 + a_2)}{(a_1 - b_2)^2 - (b_1 + a_2)^2}.$$

Setzt man hierin

$$a_1 = b_2, \quad a_2 = -b_1,$$

so folgt

$$\operatorname{tg}(2\omega - 2o) = \text{Const},$$

$$\operatorname{tg}(2\omega + 2o) = \frac{0}{0},$$

woraus man leicht schliesst, dass die congruenten Strahlbüschel in gleichem Drehungssinne durchlaufen werden; setzt man aber

$$a_1 = -b_2, \quad a_2 = b_1,$$

so folgt:

$$\operatorname{tg}(2\omega - 2o) = \frac{0}{0},$$
$$\operatorname{tg}(2\omega + 2o) = \text{Const},$$

woraus hervorgeht, dass in diesem Falle die congruenten Strahlbüschel in entgegengesetztem Drehungssinne durchlaufen werden.

Die Eigenschaft der Conformität im Allgemeinen kommt, wie gesagt, nur einer bestimmten Classe von Correlationen zu, welche durch die simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm \frac{\partial \eta}{\partial y}$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \mp \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

charakterisirt wird; man darf aber behaupten, dass im Allgemeinen jede Correlation in einzelnen Punkten des Gebiets den Gleichungen der Conformität genügen wird.

Solche Punkte darf man mit Recht Conformitätspunkte nennen, da in ihrer Nähe die entsprechenden Elemente congruente Büschel beschreiben, und demnach an diesen Stellen Aehnlichkeit in den kleinsten Teilen stattfindet.

Die Ergebnisse der Betrachtungen über Conformität können zum Zwecke der Anwendung kurz in folgenden Satz zusammengefasst werden:

An allen denjenigen Stellen des P- und Π-Gebietes einer Correlation, an welchen die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

oder die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

erfüllt werden, während die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

weder verschwindet, noch unendlich wird, sind die Büschel, welche von den Richtungen entsprechender Elemente ds, $d\sigma$ beschrieben werden, congruent, und zwar im ersten Falle von gleichem, im zweiten aber vom entgegengesetztem Drehungssinn.

Die Bedeutung der Functionaldeterminante für die richtige Abgrenzung der Giltigkeitssphäre des so eben ausgesprochenen Satzes wie der projectivischen Beziehungen überhaupt wird durch die folgende Ueberlegung deutlich werden.

Die fundamentale Formel

$$\tau = \frac{b_1 + b_2 t}{a_1 + a_2 t}.$$

in welcher sich das Gesetz der Projectivität ausspricht, gilt jedenfalls nur unter der Voraussetzung, dass die partiellen Differentialquotienten a_1, a_2, b_1, b_2 an den betreffenden Stellen des Gebiets einen bestimmten Wert besitzen und nicht zu gleicher Zeit verschwinden.

Geschieht das Letztere, so können je nach den besondern Umständen mannigfaltige andere Relationen an die Stelle der linearen Beziehungen treten.

Der einfachste Fall wird der sein, dass nur die ersten partiellen Differentialquotienten verschwinden, während die zweiten:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = a_{11}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y} = a_{12} \quad \text{u. s. w.}$$

an dieser Stelle endlich bleiben.

Man hat alsdann nach dem Taylor'schen Lehrsatz:

$$d\xi = \tfrac{1}{2}(a_{11}\, dx^2 + 2a_{12}\, dx\, dy + a_{22}\, dy^2)$$
$$d\eta = \tfrac{1}{2}(b_{11}\, dx^2 + 2b_{12}\, dx\, dy + b_{22}\, dy^2),$$

und daher durch Division folgende n i c h t lineare Beziehung zwischen t und τ:

$$\tau = \frac{b_{11} + 2b_{12}t + b_{22}t^2}{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}t^2}$$

Die Curve, welche durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen gebildet wird, ist in diesem Falle natürlich kein Kegelschnitt, vielmehr eine Curve dritter Ordnung. Die Mittelpunkte der Strahlbüschel sind hier nicht, wie bei den Kegelschnitten beliebige, sondern charakteristische Punkte der Curve.

Dieses ist ein Beispiel unter vielen; man sieht leicht, dass Correlationen gedacht werden können, welche für ein bestimmtes Paar

zusammengehöriger Punkte P^0, Π^0 Strahlbüschel von beliebig festgesetzter Beschaffenheit liefern.

Aber auch bei endlich bleibenden ersten Differentialquotienten ist ein Ausnahmefall denkbar, welcher freilich, wenn man will, noch unter das allgemeine Gesetz der Projectivität subsumirt werden kann.

Wenn sich nämlich

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$$

verhält, so degenerirt die Function $\tau = \frac{b_1 + b_2 t}{a_1 + a_2 t}$ in eine Constante. Diese beiden, im Uebrigen wesentlich von einander verschiedenen Fälle haben das mit einander gemein, dass die Functionaldeterminante verschwindet.

Da ferner nach einer bekannten Eigenschaft der Functionaldeterminanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}, & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 1$$

ist, so entspricht dem Nullwerden der Functionaldeterminante des einen Gebietes ein Unendlichwerden der des andern; daher werden beide Fälle zu berücksichtigen sein.

Man darf also den Satz aussprechen:

Das Gesetz der Projectivität der Correlationen erleidet nur an solchen Stellen des Gebietes eine wesentliche Modification oder eine Ausnahme an welchen die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

entweder verschwindet, oder unbestimmt, oder unendlich wird.

Die Functionaldeterminante, durch deren Verschwinden oder Unendlichwerden für jede Correlation gewisse charakteristische Curven bestimmt werddn, deren Punkte, wie wir gesehen haben, von allen Uebrigen eine Ausnahme machen, hat noch eine andere geometrische Eigenschaft, welche leicht nachweisbar, auch aus der Theorie der Functionaldeterminanten bekannt ist und daher hier nur angegeben werden soll:

Wenn dO und $d\Omega$ ein Paar entsprechender Flächenelemente bezeichnen, so ist

$$d\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} . dO;$$

die Functionaldeterminante giebt also das Verhältniss entsprechender Flächenelemente an.

Setzt man

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = 1,$$

so hat man die analytische Bedingung der Flächengleichheit.

Es ist durch die bisherigen Betrachtungen — allerdings zum Teil nur andeutungsweise — zu zeigen versucht worden, wie der Begriff der Correlation, wenn man ihn mit den primitivsten analytischen Hilfsmitteln bearbeitet, sofort auf den Begriff der Projectivität der Strahlbüschel, das Fundament der neuern Geometrie, führt, und wie eine ebenso einfache Untersuchung der Projectivität auf den Begriff und die analytischen Bedingungen zweier besonderer Classen von Correlationen — derer der Conformität und der Flächengleichheit — hinleitet, deren genauere Erforschung eine interessante Aufgabe der Integralrechnung bildet. So haben die synthetische und die Differentialgeometrie — scheinbar die am weitesten von einander abstehenden Zweige geometrischer Forschung — eine gemeinschaftliche Wurzel. Man könnte einwenden, dass mit dem blossen Auftauchen des Begriffs der Projectivität als einer linearen Relation zwischen trigonometrischen Tangenten gewisser Winkel bei Strahlbüscheln, für die reine Geometrie wenig gewonnen sei; aber auch die geometrischen Eigenschaften dieser Gebilde ergeben sich nicht minder einfach, wofür die vorhergehenden Skizzen ebenfalls bereits Beispiele bieten. Der Satz von der Winkelsymmetrie spricht sicher eine charakteristische und für die Anwendung höchst wichtige Eigenschaft projectivischer Strahlbüschel aus, und der Begriff der Conformitätspunkte erweist sich als sehr nützlich für die geometrische Construction der Correlationen. Er allein genügt beispielsweise, um die Verwandtschaft der Collineation auf die einfachste Weise zu construiren.

Dieselbe ist bekanntlich durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{a + a_1 x + a_2 y}{c + c_1 x + c_2 y}$$

$$\eta = \frac{b + b_1 x + b_2 y}{c + c_1 x + c_2 y}$$

definirbar. Man erkennt aus diesem sofort, dass die Punkte einander gegenseitig eindeutig entsprechen, und dass Geraden Gerade und Kegelschnitten Kegelschnitte entsprechen.

Sucht man nun die beiden Arten von Conformitätspunkten vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \mp \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

so erkennt man auch ohne Durchführung der Rechnung sofort, dass ihrer nur zwei in jedem Gebiet existiren, nämlich von jeder Art einer.

Seien dieselben respective durch A, B und A, B bezeichnet, wobei die zu A, A gehörigen Strahlbüschel die von gleichem, die zu B, B gehörigen diejenigen von entgegengesetztem Drehungssinn sein mögen. Da A, A und ebenso B, B entsprechende Punkte sind, so sind auch AB, AB entsprechende Strahlen (BA, BA natürlich desgleichen). Hieraus wird die bestehend gegebene (bekannte) Construction entsprechender Punkte ohne weitere erklärende Worte verständlich sein.

Es ist zweckmässig, im Anschluss an diese Construction für die beiden Gebiete zwei verschiedene Coordinatensysteme einzuführen. Wählt man nämlich die Mitte M von AB als Coordinatenanfangspunkt des P-Gebiets, MA als x Axe, MY als y Axe und macht das Entsprechende in dem andern Gebiet, so nehmen, wenn man

$$AB = 2c, \quad \text{AB} = 2\gamma$$

setzt, die Gleichungen der Collineation die höchst einfache Gestalt an:

$$\xi = \frac{\gamma c}{x}$$

$$\eta = \frac{\gamma y}{x}$$

oder umgekehrt:

$$x = \frac{c\gamma}{\xi}$$

$$\eta = \frac{cy}{\xi}.$$

Die gefundene Construction veranlasst zu der Frage nach der Natur derjenigen Correlation, welche entsteht, wenn man die congruenten Strahlbüschelpaare beide von derselben Art sein lässt. Man erkennt sofort, dass die Verwandtschaft der Aehnlichkeit resultirt, welche, bekanntlich ein specieller Fall der Collineation, vom Standpunkte dieser Construction als ein Ausnahmefall erscheint.

Bleiben wir indessen bei der Collination.

Nachdem die Conformitätspunkte in Betrachtung gezogen worden sind, also diejenigen Punkte, für welche die Symmetrieaxen unbestimmt werden und daher jede hindurchgelegte Linie als Symmetrieaxe angesehen werden darf, ist es naturgemäss die nächste Aufgabe, die Symmetrieaxen jedes beliebigen andern Punktes aufzusuchen. Diese Aufgabe findet durch folgende Sätze ihre vollständige Erledigung:

1. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Symmetrieaxen constante Richtung haben, ist eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die beiden Conformitätspunkte des Gebiets hindurchgeht und die Mitte der Verbindungslinie der Conformitätspunkte zu ihrem Mittelpunkt hat. Die Asymptoten der Hyperbel geben die Symmetrieaxenrichtungen.

2. Dieser gleichseitigen Hyperbel entspricht in dem andern Gebiet ein Kreis, welcher durch die Conformitätspunkte des Gebiets hindurchgeht; die Symmetrieaxen aller Punkte dieses Kreises gehen durch zwei feste Punkte hindurch, welche ebenfalls auf dem Kreise liegen; es sind nämlich die Punkte, in welchen der Kreis von der im Halbirungspunkte der Verbindungslinie der Conformitätspunkte errichteten Senkrechten geschnitten wird.

Also entspricht der Schaar der durch A, B gehenden Kreise des Π-Gebiets in dem andern Gebiete eine Schar concentrischer durch A, B gehender gleichseitiger Hyperbeln, und der Schar concentrischer, durch A, B gehender gleichseitiger Hyperbeln eine Schaar durch A, B gehender Kreise.

Um die Symmetrieaxen eines beliebigen Punktes P zu finden, hat man also durch A, B und P einen Kreis zu legen und die Punkte J, K zu bestimmen, in welchen der Kreis von der im Mittel-

punkt von AB errichteten Senkrechten geschnitten wird; dann sind die Verbindungslinien PJ und PK die Symmetrieaxen des Punktes P.

Der Beweis dieser Sätze ist leicht; ich möchte denselben übergehen, ebenso ihre Anwendung zur Production interessanter Winkeleigenschaften der gleichseitigen Hyperbel, weil es nicht in meiner Absicht liegt, hier eine vollständige Theorie der Collineation zu geben, sondern nur an einem interessanten Beispiel zu zeigen, wie die Anwendung des allgemeinen Princips der Projectivität und seiner nächsten Consequenzen die geometrischen Eigenschaften jeder besondern Correlationsart offenbar werden lässt.

Sucht man die zusammenfallenden Punkte der beiden Systeme oder, wie man zu sagen pflegt, die sich selbst entsprechenden Punkte, indem man in die ursprünglichen, auf ein Coordinatensystem bezogenen Gleichungen der Collineation

$$\xi = x, \quad \eta = y$$

substituirt, so erhält man für x oder y durch Elimination einer dieser beiden Unbekannten eine Gleichung dritten Grades, wie ebenfalls ohne Durchführung der Rechnung ersichtlich ist.

Es kann daher im Allgemeinen nicht mehr als drei sich selbst entsprechende Punkte geben, und einer derselben muss stets reell sein.

Bisher sind die beiden Punkte P, Π als Punkte einer Ebene gedacht worden; jetzt wollen wir uns zwei Ebenen auf einander liegend und in einer derselben den Punkt P, in der andern den Punkt Π befindlich denken. Das ursprüngliche Coordinatensystem verwandelt sich dem entsprechend in zwei auf einander fallende, jedes mit seiner Ebene in fester Verbindung stehend. Ich will diese Ebenen kurz als die P-Ebene und die Π-Ebene bezeichnen.

Wenn nun die Π-Ebene auf der P-Ebene auf irgend eine Weise verschoben wird, so wird dadurch der Abstand entsprechender Punkte P, Π ein anderer als vorher; die früher sich selbst entsprechenden Punkte werden jetzt voraussichtlich nicht mehr auf einander fallen (dafür freilich andere). Man wird also zugeben müssen, dass die Correlation durch die geometrische Operation der Verschiebung eine andere geworden ist, wenn auch das Princip der Aenderung, vom Standpunkte der geometrischen Anschauung betrachtet, einfacher ist, als alle andern, welche man denken könnte.

Man erkennt aber nach den bekannten Gesetzen der Coordinatentransformation sehr leicht, dass der analytische Charakter der all-

gemeinen Gleichungen der Collineation durch die Verschiebung der Ebenen keine Veränderung erleidet.

Daher werden auch bei der neuen Correlation Geraden Gerade und Kegelschnitten Kegelschnitte entsprechen.

Um es kurz auszudrücken:

Der allgemeine Charakter der Collineation bleibt durch Drehung und Verschiebung der beiden Systeme gegen einander unverändert.

Dieser letztere Satz bringt gewissermassen die geometrische Untersuchung der Collineation in Fluss; es wird der synthetischen Geometrie, indem sie sich der vorhin aufgestellten Sätze — oder auch nur eines Teils derselben — bemächtigt, leicht, die Collineation im Allgemeinen und die speciellen Fälle derselben als Instrument zu handhaben, welches die interessanteren Eigenschaften zum Mindesten der Curven 1ter und 2ter Ordnung offenbar werden lässt.

Die Collineation [welche, wie oben gezeigt wurde, zwei Paare congruenter Strahlbüschel besitzt] besitzt auch zwei Paare congruenter Punktreihen.

Man findet diesen Satz, indem man das Π-Gebiet so verschiebt, dass die Conformitätspunkte A, A auf einander fallen und das andere Paar B, B mit A in eine gerade Linie fällt (was übrigens auf zweierlei Weise bewerkstelligt werden kann).

Bei dieser Lage der Systeme giebt es unendlich viele sich selbst entsprechende Punkte, nämlich die Punkte derjenigen Geraden, welche senkrecht durch die Mitte von BB hindurchgeht. Bringt man nun wieder Alles auf seinen ursprünglichen Platz zurück, so wird die zuletzt genannte Gerade zwar in zwei Punktreihen deplacirt, welche aber ihre Gestalt nicht ändern, also congruent bleiben.

Hieraus ergiebt sich leicht die folgende Construction der congruenten Punktreihen.

Man bilde den halben Unterschied der Distanzen AB und AB und verlängere die kürzere, verkürze die längere auf beiden Seiten um ihn. Die in den so gefundenen Punkten auf AB und AB errichteten Senkrechten bilden die beiden Paare entsprechender congruenter Punktreihen.

Die so eben skizzirte Betrachtungsweise giebt ein Beispiel des Verfahrens, welches in der synthetischen Geometrie in ähnlicher Weise häufig wiederkehrt; man darf dasselbe wohl als „eine Uebersetzung des Princips der Coordinatentransformation in das Geometrische" bezeichnen.

Soviel über das Instrument selbst; nun noch ein Wort über die Anwendung desselben. Der Kreis ist ein Kegelschnitt; nach dem Frühern muss daher einem jeden Kreise des einen Gebietes ein Kegelschnitt des andern entsprechen. Ueberdies schneiden sich nach dem Fundamentalprincip der Projectivität sämmtliche Paare entsprechender Strahlen, welche von einem Paar entsprechender Punkte P, Π ausgehen, auf einem Kegelschnitt; man wird daher Sätze vom Kreise in solche, welche sich auf Kegelschnitte beziehen, transformiren können.

Man sieht, wie die Analysis in ihrer primitivsten Gestalt, wenn man will, der Geometrie sehr annehmbare Grundlagen für ihre weitern Speculationen zu liefern im Stande ist.

Sind wir darum berechtigt, die synthetische Geometrie als einen blossen appendix der analytischen zu betrachten? Dieses wäre schon in Anbetracht der Rivalität, welche zwischen beiden Disciplinen geherrscht hat, und der die Wissenschaft der Geometrie wesentliche Fortschritte verdankt, ein Unrecht; aber es wäre auch absurd, da die analytische Geometrie, wie schon aus ihrem Begriff hervorgeht, wesentlich geometrischer Hilfsmittel nie entbehren kann. Eher könnte man das Umgekehrte behaupten, da ein umfangreicher Teil der Geometrie, die Geometrie der Lage, ganz ohne Anwendung arithmetrischer Hilfsbegriffe aufgebaut werden kann; aber auch diese Behauptung wäre gewagt, da die Hilfsmittel, welche die Analysis der Geometrie bietet, sehr wesentliche sind. Man hat zuweilen die Frage aufgeworfen: ob man die Geometrie auf analytischem oder auf constructivem Wege behandeln solle? Diese Fragestellung ist verkehrt; man kann sie aber meines Erachtens verbessern, indem man sie so formulirt:

Was soll in der Geometrie auf analytischem und was auf constructivem Wege behandelt werden? —

Die Untersuchung der geometrischen Verwandtschaften gilt mit Recht als eines der brauchbarsten Hilfsmittel geometrischer Speculation; ja, sie wird geradezu als das Fundament der Geometrie bezeichnet. Die einfachsten Correlationen von nur einer Dimension, also namentlich die projectivischen Punktreihen und Strahlbüschel, haben diese fundamentale Bedeutung unzweifelhaft; aber alle andern, — sogar die Collineation — zeigen hinsichtlich ihrer Anwendung einer von jener wesentlich verschiedenen Charakter; sie dienen zur Transformation einfacher geometrischer Sätze in andere von grösserer Complication und — wenn die Sätze, von welchen man ausging, trivial waren — auch von grösserem Interesse. Eine Ausnahme macht nur die einfachste der reciproken Verwandtschaften, diejenige

der reciproken Polaren innerhalb des eigentlichen Gebiets ihrer Anwendung in so fern, als die durch ihre Anwendung resultirenden Theoreme nicht complicirter (aber auch nicht einfacher) sind als diejenigen, aus welchen sie hergeleitet wurden, und denen sie nach dem Princip der Dualität entsprechen; triviale Sätze können durch sie nicht in interessantere transformirt werden.

Der Begriff der Correlation ist eines der geistreichsten Producte geometrischer Einbildungskraft; jede bestimmte Correlation darf als eine Maschine aufgefasst werden, welche zunächst zur Production [man würde für gewöhnlich sagen: zur Entdeckung] geometrischer Sätze bestimmt ist, schliesslich aber — indem sich der antike Begriff des geometrischen Lehrsatzes erweitert — selbst als Object der Betrachtung dienen kann.

Anmerkung. Das Bild der „Maschine“ scheint mir in sofern nicht unpassend, als dadurch die Aufmerksamkeit auf eine Eigentümlichkeit hingelenkt wird, welche sogar der gesammten Mathematik in bedeutendem Grade eigen ist und den denkenden Gegnern der Mathematik (von denen natürlich allein die Rede sein kann) zu ungerechten aber nicht ganz ungerechtfertigten Angriffen die Handhabe gegeben hat. Am Weitesten ist hierin wohl der Philosoph Schopenhauer gegangen, welcher die Mathematik zwar an einer Stelle seines Hauptwerkes („Die Welt als Wille und Vorstellung“) eine Wissenschaft sein lässt, aber bei andern Gelegenheiten mit einer gewissen Inconsequenz als einen Gegenstand bezeichnet, welcher für den wahren Denker nur von sehr geringem Interesse sein kann. Er stützt sich dabei auf gelegentliche Urteile von Mathematikern, welche einesteils humoristisch gedacht, anderenteils zwar treffend, aber unvollständig und zwar aphoristisch hingeworfen waren, und deren Autoren schwerlich mit der Auffassung Schopenhauer's in diesem Punkte einverstanden sein würden. Aber der Angriff hat dennoch einen Kern, welcher Berücksichtigung verdient und von Schopenhauer selbst witzig und ziemlich treffend durch seinen Vergleich des Mathematikers mit „einer Katze, welche mit ihrem eigenem Schwanz spielt“ charakterisirt worden ist.

Die Theoreme der Mathematik — wie Resultate productiven Denkens überhaupt — tragen häufig den Charakter des Künstlichen, Gemachten zur Schau, während die andere Seite an ihnen, das Natürliche, Beobachtete, Gewordene sich dem Blick des oberflächlichen Beobachters verbirgt und daher leicht übersehen wird. Bei den interessanteren Maschinen — diesen wunderbaren Gebilden durch Aneinanderkettung von Natur und Menschengeist — verhält es sich ähnlich; auch hier übernimmt die Kunst so zu sagen das Heroldsamt. Da nun die Kunst, die Willkür sich gewissermassen bei der Erfindung einer Correlation concentrirt, um hernach der Beobachtung, der planmässigen Anwendung Platz zu machen, so möchte der Terminus „Maschine“ für ein derartiges Gebilde etwas für sich haben; auch in sofern, als wir dadurch das Künstliche, welches nun einmal in geometrischen Untersuchungen liegt, offen eingestehen, und nun die Aufgabe an uns herantritt,

Die allgemeine Theorie der Correlationen wird auf diese Weise eine „allgemeine Maschinenlehre der Geometrie"; aber der Begriff einer solchen ist damit noch nicht erschöpft; denn es giebt noch eine zweite Reihe von Hilfsmitteln, welche den Charakter der Maschine ebenso an sich tragen und mit jenen erstern zusammen erst ein Ganzes bilden. Ich meine die Coordinatensysteme.

Dass ein Parallelismus zwischen Correlationen und Coordinatensystemen existirt, wird sofort klar, wenn man sie analogisch — durch Gleichungen — definirt.

Die Gleichungen

$$\xi = f(x, y)$$
$$\eta = g(x, y),$$

wenn man x, y die Coordinaten eines Punktes P, ξ, η diejenigen eines andern Punktes Π sein lässt — beide auf dasselbe fundamentale Coordinatensystem bezogen — stellen eine Correlation dar; dieselben beiden Gleichungen, wenn man x, y und ξ, η beide auf denselben Punkt P bezieht, alsdann aber nur das eine Coordinatenpaar, etwa x, y, zugleich auf das fundamentale Coordinatensystem beziehen kann, charakterisiren ein neues Coordinatensystem, in welchem ξ, η die Coordinaten (Parameter) des Punktes P sind.

Auch diese Zusammenordnung von Correlationen und Coordinatensystemen ist eine künstliche, wie aus dem Umstande hervorgeht, dass sie von der Beschaffenheit des fundamentalen Coordinatensystems, dessen man sich bei der analytischen Definition der Correlationen und Coordinatensysteme bedient, wesentlich abhängt; so dass einer andern Wahl des letztern ein anderer Modus der Zusammenordnung entsprechen wird.

---

das Natürliche, welches ebenfalls darin liegt, aufzusuchen und von dem erstern begrifflich zu trennen.

Sollte es wohl ganz zufällig sein, dass der geniale erste Erfinder derartiger „Maschinen" ein berühmter Ingenieur gewesen ist. Poncelet, der Erfinder der Transformationsmethoden der Centralprojection und der reciproken Polaren muss wohl als der eigentliche Schöpfer der Idee der Transformation geometrischer Sätze durch Correlationen angesehen werden, wenn auch Möbius Verdienste um die Feststellung des allgemeinen Begriffs der Correlation unbestreitbar ist.

Dass der Erfinder der Coordinatensysteme ein grosser Philosoph gewesen ist, erscheint mir ebenfalls bezeichnend; der erste Zweck dieser Erfindung war, Ordnung in das Chaos zu bringen, die Methode an die Stelle des Witzes zu setzen.

Es entsteht daher die Frage nach dem einfachsten Coordinatensystem, damit man dasselbe als fundamentales wählen könne. Ich zweifele kaum, dass sich das älteste von allen, das Cartesius'sche auch als das einfachste, das natürliche erweisen wird. Der Winkel der Coordinatenaxen ist zwar für viele Betrachtungen ohne Belang; wo es aber auf denselben ankommt, wird sich sicher der rechte Winkel empfehlen — wofür die oben entwickelten Symmetrieeigenschaften der projectivischen Strahlbüschel schon einen Beleg abgeben dürften. Das Cartesius'sche System der rechtwinkligen Coordinaten soll also hier als das fundamentale Coordinatensystem gedacht werden.

Unter dieser Voraussetzung gewinnt die Frage einen bestimmten Sinn:

Welches Coordinatensystem ist das der Verwandtschaft der Collineation parallele?

Anmerkung. Dieser Gegenstand verlangt allerdings eine principielle Untersuchung, wobei auch die gerade Linie zuvörderst als unbekannt angenommen werden muss.

Denkt man sich auf einer beliebigen krummen Oberfläche ein System beliebiger Curven — die Ordinatencurven — und eine sie alle durchschneidende — die Abscissencurve — gegeben, auf welcher letztern man den Coordinatenanfangspunkt beliebig wählt, so bedarf man nur noch eines Maasses in Gestalt eines absolut biegsamen, unausdehnbaren Fadens, um auf dieser Fläche analytische Geometrie treiben zu können. Die Wirkungssphäre des analytischen Verfahrens scheint hier weiter zu gehen als die des constructiven. Eine Gleichung ersten Grades zwischen x und y charakterisirt eine Curve, welche man als „Curve erster Ordnung" bezeichnen kann. Die von geraden Linien geltenden Sätze der reinen Geometrie der Lage werden sich auf die so eben definirten „Curven erster Ordnung" ausdehnen lassen, so beispielsweise der berühmte Satz von Desargues: „die Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier perspectivischer Dreiecke liegen auf einer Geraden", wenn man überall anstatt der geraden Linie die „Curve erster Ordnung" substituirt. Dieser Satz ist nämlich nur das geometrische Bild einer Identität zwischen Coordinaten, welche aus der linearen Beschaffenheit der Gleichungen folgt.

Ich muss darauf verzichten, diese an sich interessanten Betrachtungen hier weiter zu führen und wollte nur die Möglichkeit einer fundamentalen Untersuchung der Coordinatensysteme, um das Natürliche zu erkennen und die Fruchtbarkeit derartiger Betrachtungen plausibel machen; sie treten, wenn man sie zu Ende führt, notwendiger Weise mit den metaphysischen Betrachtungen über die Natur des Raumes (die sogenannte absolute oder Nicht-Euklidische Geometrie) in Zusammenhang, und werden sich dergleichen Speculationen, wenn man sich eine möglichst gründliche Einsicht in das Coordinatenprincip verschaffen will, kaum entbehren lassen.

Ich finde das folgende, welches hier der Kürze wegen für den Augenblick als „projectivisches Coordinatensystem“ bezeichnet werden mag.

Seien x, y die Coordinaten von P in Beziehung auf das fundamentale Coordinatensystem, ABC ein beliebiges Dreieck, und durch C zu AB eine Parallele gelegt; man ziehe durch P von A und B aus gerade Linien, welche auf der zuerst genannten Parallele die Schnittpunkte Ξ, H bestimmen, setze, wenn D, E zwei beliebige Punkte auf den Dreiecksseiten AC, BC sind,

$$\frac{C\Xi}{DC} = \xi, \quad \frac{CH}{EC} = \eta,$$

und betrachte ξ, η als die Coordinaten des Punktes P in dem neuen Coordinatensystem.

Es lässt sich nämlich zeigen, dass ξ, η mit x, y durch Gleichungen von der Form

$$\xi = \frac{a + a_1 x + a_2 y}{c + c_1 x + c_2 y}$$

$$\eta = \frac{b + b_1 x + b_2 y}{c + c_1 x + c_2 y}$$

verbunden sind, und dass durch passende Wahl des Dreiecks ABC und der Grössen CD, CE den Coefficienten jener Gleichungen beliebig gegebene Werte erteilt werden können. Unser System besitzt daher den gehörigen Grad der Allgemeinheit; man kann ihm noch andere Gestalten geben, welche aber nicht wesentlich allgemeiner sein können.

Anmerkung. Der einfachste Beweis der obigen Behauptung dürfte dieser sein:

Aus der Construction folgt, dass für die Punkte der Geraden AB die Coordinaten ξ, η unendlich werden, und dass für die Punkte der Geraden AC, $\xi = 0$ und für die Punkte der Geraden BC, $\eta = 0$ wird. Es muss daher, wenn

$a_1 x + a_2 y + a = L = 0$ die Gleichung der Geraden AC

$b_1 x + b_2 y + b = M = 0$ „ „ „ „ BC

$c_1 x + c_2 y + c = N = 0$ „ „ „ „ AB

ist, ξ und η, durch x und y ausgedrückt, von der Form

$$\xi = \frac{L}{N} \cdot \varphi, \quad \eta = \frac{M}{N} \cdot \psi$$

werden, wo φ und ψ noch näher zu bestimmen sind.

Transformirt man ein projectivisches Coordinatensystem in ein anderes ebenfalls projectivisches, so behalten die Transformationsformeln dieselbe Gestalt, wie oben.

Diese Art von Coordinatensystemen will ich dazu benutzen, zu zeigen, wie eine und dieselbe auf Grössenverhältnisse bezügliche Bemerkung, wenn man sie auf verschiedene Coordinatensysteme anwendet, zu verschiedenen Eigenschaften einer und derselben Curve führen kann.

Wenn man ein rechtwinkliges Coordinatensystem in ein anderes ebenfalls rechtwinkliges transformirt, so mag dieses „einer Transformation innerhalb des Gebiets der rechtwinkligen Coordinatensysteme" genannt werden.

Man kann durch Transformation innerhalb des Gebiets des rechtwinkligen Coordinatensysteme die Coefficienten der linearen Glieder und des bilinearen Gliedes der allgemeinen Kegelschnittgleichung zum Verschwinden bringen, wodurch die Gleichung die einfache Form erhält:

$$Ax^2 + By^2 + C = 0.$$

Alsdann führt die algebraische Bemerkung, dass

$$(-x).(-x) = x.x$$

ist, bekanntlich auf die Eigenschaften der Hauptaxen des Kegelschnitts.

Lässt man den Punkt P in die Unendlichkeit rücken, so wird $ABH\Xi$ ein Parallelogramm, und daher

$$C\Xi + CH = AB.$$

Also muss in diesem Falle für gewisse constante Werte k, k_1, k_2

$$k_1\xi + k_2\eta = k$$

sein.

Für unendlich entfernte Punkte P wird aber

$$\xi = \frac{a_1 + a_2 \cdot \frac{y}{x}}{c_1 + c_2 \cdot \frac{y}{x}} \cdot \varphi; \quad \eta = \frac{b_1 + b_2 \cdot \frac{y}{x}}{c_1 + c_2 \cdot \frac{y}{x}} \cdot \psi.$$

Daher muss:

$$k_1 \left(a_1 + a_2 \frac{y}{x}\right) \varphi + k_2 \left(b_1 + b_2 \frac{y}{x}\right) \psi = k \left(c_1 + c_2 \frac{y}{x}\right)$$

sein; eine Gleichung, welche unabhängig von dem Wert $\frac{y}{x}$ nur dann erfüllt werden kann, wenn φ und ψ Constanten sind.

Macht man dieselbe Transformation innerhalb des Gebietes der schiefwinkligen Parallel-Coordinatensysteme mit gegebenem Axenwinkel, so führt das auf den Begriff und die Eigenschaften der conjugirten Durchmesser.

Wir wollen nun dieselben Ueberlegungen für die projectivischen Coordinatensysteme anstellen.

Zunächst ist klar, dass, wenn man die Gleichung einer beliebigen, ursprünglich auf Cartesius'sche Coordinaten bezogenen Curve in projectivische Coordinaten transformirt, der **Grad** der Gleichung sich nicht ändert.

Also wird, wenn jetzt ξ, η projectivisch Coordinaten sind, auch in diesen

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi + 2E\eta + F = 0$$

die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts.

Durch Transformation innerhalb des Gebietes der projectivischen Coordinatensysteme kann man (sogar auf unendlich viele Arten) wiederum die Coefficienten der beiden linearen Glieder und des bilinearen Gliedes zum Verschwinden bringen; jedenfalls ist, wenn x und y projectivische Coordinaten sind, die Gleichung

$$Kx^2 + Ly^2 = 1$$

die eines Kegelschnittes.

Es ist klar, dass, wenn x, y dieser Gleichung Genüge leisten, die drei Wertepaare

$$\begin{array}{rr} -x, & y \\ x, & -y \\ -x, & -y \end{array}$$

es ebenfalls tun. Man findet daher zu jedem Punkte P des Kegelschnitts drei andere, welche diesem Kegelschnitt ebenfalls angehören. Sei zur Abkürzung

$$CX = X, \quad CY = Y$$

gesetzt, und

$$\frac{X}{DC} = x, \quad \frac{Y}{EC} = y,$$

so wird:

$$-x = -\frac{X}{DC}$$

$$-y = -\frac{Y}{EC},$$

so dass also die drei andern Punkte gefunden werden, indem man die Werte X, Y in entgegengesetzter Richtung von C aus aufträgt und die obigen Combinationen durchmacht.

Sei wieder das Coordinationsdreieck ABC gegeben, und seien P, Q zwei beliebige Punkte der Ebene, ihre projectivischen Coordinaten respective

$$\frac{X}{CD}, \quad \frac{Y}{CD}$$

und

$$\frac{X'}{CD}, \quad \frac{Y'}{CD}$$

(die Punkte D, E brauchen nicht gezeichnet zu werden) so können die Constanten K, L der Gleichung

$$Kx^2 + Ly^2 = 1$$

im Allgemeinen so bestimmt werden, dass die Coordinaten der Punkte P, Q derselben genügen.

Man erhält nämlich die Bedingungsgleichungen

$$K \cdot \frac{X^2}{CD^2} + L \cdot \frac{Y^2}{CE^2} = 1$$

$$K \cdot \frac{X'^2}{CD^2} + L \cdot \frac{Y'^2}{CE^2} = 1,$$

aus welchen K und L berechenbar ist.

Eine Ausnahme bildet der Fall, dass sich

$$X : Y = X' : Y'$$

verhält, weil dann die Determinante der beiden Gleichungen verschwindet. [Man kann sagen, die Coefficienten K, L werden in diesem Falle unendlich gross]. Alsdann liegen die Punkte P, Q und C in einer Geraden.

Construirt man zu P nach dem Vorigen die drei andern Punkte P_1, P_2, P_3 und ebenso zu Q die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, so hat man 8 Punkte, welche auf einem Kegelschnitt liegen.

In dem Ausnahmefall degenerirt der Kegelschnitt, auf welchem die Punkte $PP_1\,P_2P_3$, $QQ_1\,Q_2Q_3$ liegen, in zwei Gerade, deren Schnittpunkt die Spitze C des Coordinationsdreiecks ist.

Das führt auf die Bemerkung (welche sich auch schon früher hätte machen lassen), dass jede vier zusammengehörigen Punkte P, P_1, P_2, P_3 die Eigenschaft haben, dass die Verbindungslinie von P und P_3 durch den Punkt C geht, desgleichen die Verbindungslinie von P_1 und P_2.

Damit ist die schöne geometrische Eigenschaft des Coordinatendreiecks aufgedeckt:

Construirt man zu irgend einem Punkte P der Ebene auf die bekannte Weise die zugehörigen Punkte P_1, P_2, P_3, so ist das Coordinatendreieck ABC das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks, welches die Punkte P, P_1, P_2, P_3 zu Ecken hat.

Ich verfolge diese Betrachtungen, welche, wie man sieht, mitten in die synthetische Geometrie hineinführen, nicht weiter, da ich nur zeigen wollte, wie eine und dieselbe analytische Bemerkung, auf verschiedene Coordinatensysteme in Anwendung gebracht, indem man von einer bestimmten Eigenschaft einer Curvenart ausgeht, zu andern Eigenschaften derselben Curvenart führen muss; woraus hervorgeht, dass die Coordinatensysteme in analoger Weise wie die Correlationen zur Transformation geometrischer Lehrsätze gebraucht werden können.

Dabei herrscht im Allgemeinen der Unterschied, dass die Anwendung der Correlationen von bekannten Eigenschaften bestimmter Curvenarten auf analoge Eigenschaften anderer Curvenarten zu schliessen erlaubt, während die Anwendung der Coordinatensysteme aus bekannten Eigenschaften bestimmter Curvenarten einen Schluss auf andere Eigenschaften derselben Curvenarten verstattet. Beide parallel zur Anwendung gebracht, können erst eine vollständige und planvolle Darstellung der Geometrie und vielleicht des geometrischen Denkens überhaupt ermöglichen, während die Anwendung des Correlationsbegriffes allein immer noch eine Lücke lässt, die dann durch heterogene und scheinbar willkürliche Betrachtungen ausgefüllt werden muss.

Vielleicht könnte man die Bewegung der geometrischen Speculation dadurch treffend chrakterisiren, dass man sie unter zwei Ideen subsumirte: die Idee der Coordination und die Idee der Transformation. Beide kommen sowohl bei den Correlationen, als auch bei den Coordinatensystemen in Betracht, die eine vornehmlich beim Aufbau, die andere beim Gebrauch derselben.

Anmerkung. Die Anwendung der Coordinatensysteme ist keineswegs an die Anwendung des Calculs in der Geometrie gebunden; dieselben sind ebenso wie die Correlationen Hilfsmittel geometrischer Art, und man könnte sich beider Arten von Hilfsmitteln auch auf constructivem Wege bedienen (Beispiel: Die sogenannte „Steiner'sche Dampfmaschine"); aber es ist höchst zweckmässig, auf die analytischen Hilfsmittel nicht zu verzichten; vielmehr beide Methoden — jede in der Weise, welche ihrem Charakter am Meisten entspricht — neben einander zur Anwendung zu bringen und durch

Man hat den Coordinatensystemen zum Vorwurf gemacht, dass durch sie ein fremdes Element in die Betrachtung der geometrischen Gebilde hineingetragen werde. Dieses mag in Beziehung auf manche Anwendungen sehr gut treffend sein, während es mir, allgemein ausgesprochen, ein schiefes Urteil zu sein scheint. Allerdings liefert die Gleichung einer Curve in Beziehung auf ein bestimmtes Coordinatensystem nur eine Anschauungsweise derselben, entsprechend dem Anblick, welchen diese Curve dem Beobachter, der sie von einem Standorte aus betrachtete, gewähren würde. Denkt man sich aber im Fluge alle möglichen oder doch alle charakteristischen Coordinatensysteme darauf angewandt, so hört die Anschauungsweise auf, eine einseitige zu sein.

Es ist allerdings der Vorteil des Geometers, wo er auf seinem Gebiete arbeitet, den Standpunkt rasch wechseln zu können; woraus die Aufgabe entspringt, der analytischen Coordinatentransformation geometrische Gesichtspunkte abzugewinnen, sie wo möglich ganz in eine geometrische Coordinatentransformation zu verwandeln;

---

ihr kunstloses — weil natürliches — Ineinandergreifen auf dem einfachsten Wege die Geometrie entstehen zu lassen. Deshalb ist — um zwei Meisterwerke ersten Ranges neben einander zu stellen — Steiner's Methode fruchtbarer als diejenige v. Staudt's.

Die Analysis lege den Grund, die geometrische Betrachtung ziehe die Consequenzen — das wird im Allgemeinen die zweckmässigste Teilung der Arbeit sein; oder, wenn die Anwendung eines Vergleichs verstattet ist: Die Analysis sei das grobe Geschütz, die synthetische Geometrie das kleine Gewehr; es nimmt sich seltsam aus, wenn unter Anwendung von mancherlei analytischen Kunstgriffen und Verbiegungen des Coordinatensystems ein einzelnes Theorem bewiesen wird, welches ursprünglich durch Geometrie entdeckt wurde, und dessen Beweis auf geometrischem Wege naturgemäss von Statten geht. Ueberhaupt sind nicht einzelne Sätze das naturgemässe Zielobject der Analysis; eher schon Systeme von Sätzen. Die geometrische Methode besitzt eine Geschwindigkeit der Bewegung, worin die Analysis mit der Geometrie nicht vorteilhaft concurriren kann, selbst wenn sie noch so viele Anleihen bei der letztern — in Gestalt künstlicher Coordinatensysteme — macht. Dagegen vermag die Analysis von ihrem erhabenen Standpunkte aus weite Gebiete im Ganzen mit einem Blick zu überschauen und Methoden zu begründen, zu deren Ausbeutung nach jeder Richtung hin sie weder Beruf noch besonderes Geschick besitzt; diese Ausbeutung ist aber eine wichtige Aufgabe, und keineswegs die leichtere, kein blosses Anhängsel; wenn auch die Aufgabe des Geometers durch die Hilfe der Analysis eine wesentlich leichtere wird, so wird dafür das Gebiet seiner Forschung ein wesentlich reicheres, als wenn er auf die Hilfsmittel der rein geometrischen Anschauung angewiesen wäre.

was allerdings mit jeder besondern Art von Coordinatensystemen nur für eine gewisse Gruppe von Untersuchungen gelingt. Für dieses Gebiet ist dann das Coordinatensystem ein natürliches, für jedes andere ein mehr oder weniger künstliches.

Entsprechend den oben begonnenen Untersuchungen über die Differentialgeometrie der Correlationen und parallel denselben muss eine „allgemeine geometrische Maschinenlehre" die Differentialgeometrie der Coordinatensysteme untersuchen, was zu ebenso einfachen, als an sich merkwürdigen Resultaten führt, worauf aber hier nicht eingegangen werden soll.

Dass in dem Vorigen überhaupt die Coordinatensysteme berührt worden sind, geschah deshalb, weil dadurch die Correlationen als notwendiger Teil eines Ganzen auch vom logischen Standpunkte betrachtet an Bedeutung gewinnen und nicht mehr als ein zufälliges Erzeugniss geometrischer Speculation angesehen werden können.

Das Fundamentalgesetz der projectivischen Beziehung bei Correlationen führt zu ganz andern Gruppen partieller Differentialgleichungen, als die in dem Vorigen erwähnten.

Wir wissen, dass die geradlinigen Verlängerungen entsprechender, von den Punkten P, Π ausgehender Elemente sich im Allgemeinen auf einem Kegelschnitt treffen, welcher durch die Punkte P, Π hindurchgeht.

Man kann nun die Bedingungen aufsuchen, unter welchen der Kegelschnitt eine specielle Gestalt erhält. Diese Untersuchung ist ebenfalls überaus einfach vermittelst der Cartesius'schen Coordinaten durchführbar.

Seien PS, ΠS die geradlinigen Verlängerungen zweier entsprechender Elemente, u, v die Coordinaten ihres Schnittpunktes S, so haben wir nach den früheren Bezeichnungen

---

Anmerkung. Wenn man sagt, das rechtwinklige Coordinatensystem, vermittelst dessen man einen beliebigen Kegelschnitt durch eine Gleichung darstellt, habe nichts mit dem Kegelschnitt selbst zu tun, so ist das im Allgemeinen richtig; es wird aber unrichtig, wenn, nachdem durch eine leichte Transformation die Hauptaxen entdeckt worden sind, der Kegelschnitt auf diese als Coordinatenaxen bezogen wird; denn die Hauptaxen sind doch sicher nicht etwas dem Kegelschnitt Fremdes. Die Transformation muss mit ins Auge gefasst werden; sie muss gleich bei der Erfindung von Coordinatensystemen massgebender Factor sein.

$$\tau = \frac{b_1 + b_2 t}{a_1 + a_2 t}$$

worin

$$t = \frac{v-y}{u-x}, \qquad \tau = \frac{v-\eta}{u-\xi}$$

zu substituiren ist.

Also wird die Gleichung der Schnittcurve:

$$b_1(u-x)(u-\xi)+b_2(v-y)(u-\xi)-a_1(u-x)(v-\eta)-a_2(v-y)(v-\eta) = 0.$$

Ordnet man die Gleichung nach ihren Variabeln u, v, so werden die Glieder der höchsten Dimension:

$$b_1 u^2 + (b_2 - a_1)uv - a_2 v^2,$$

von welchen allein bekanntlich die Form des Kegelschnitts abhängt. Transformirt man diesen Ausdruck durch Drehung des Coordinatensystems, also vermittelst der Formeln

$$u = u'\cos\vartheta - v'\sin\vartheta$$
$$v = u'\sin\vartheta + v'\cos\vartheta$$

auf die Hauptaxenrichtungen, so bestimmt sich der Winkel ϑ durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{b_2 - a_1}{b_1 + a_2}.$$

und die Glieder zweiter Dimension der transformirten Kegelschnittsgleichung werden:

$$\left[\frac{b_1-a_2}{2} + \frac{b_1+a_2}{2}\cos 2\vartheta + \frac{b_2-a_1}{2}\sin 2\vartheta\right]u'u'$$
$$+\left[\frac{b_1-a_2}{2} - \frac{b_1+a_2}{2}\cos 2\vartheta - \frac{b_2-a_1}{2}\sin 2\vartheta\right]v'v'.$$

Sei das Verhältniss der Hauptaxen durch k bezeichnet, wobei k für die Ellipse reell gesetzt wird, also für die Hyperbel rein imaginär.

Man hat also:

$$\frac{b_1 - a_2 + (b_1 + a_2)\cos 2\vartheta + (b_2 - a_1)\sin 2\vartheta}{b_1 - a_2 - (b_1 + a_2)\cos 2\vartheta - (b_2 - a_1)\sin 2\vartheta} = k^2$$

Der besondere Wert $k^2 = +1$ giebt den Kreis, der Wert $k^2 = -1$ die gleichseitige Hyperbel, der Wert

$$k^2 = \text{Null oder Unendlich}$$

die Parabel.

Man findet hieraus für die Correlation leicht folgende Resultate:

Wenn der Kegelschnitt ein Kreis werden soll, so muss

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=0$$

sein; soll er eine gleichseitige Hyperbel werden, so muss

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}=0$$

sein; soll er eine Parabel werden, so muss

$$4\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\,\frac{\partial\xi}{\partial y}+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2=0$$

sein.

Verlangt man endlich Kegelschnitte, deren Axenverhältniss durch eine gegebene Zahl k dargestellt wird, so muss für diese die Gleichung erfüllt werden:

$$\frac{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2}=\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2.$$

Anmerkung. Die Combination der beiden oben gefundenen Gleichungen

$$\frac{b_2-a_1}{b_1+a_2}=\operatorname{tg}2\vartheta,$$

$$\frac{(b_2-a_1)^2+(b_1+a_2)^2}{(b_1-a_2)^2}=\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2$$

führt auf eine interessante Aufgabe der Integralrechnung, welche das Problem der conformen Abzeichnungen als speciellen Fall in sich enthält. Verlangt man nämlich, dass ϑ und k constant sein sollen, so giebt das zwei lineare partielle Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten. Die geometrische Fassung des Problems ist diese:

Correlationen zu finden, deren Schnittcurven entsprechender Strahlbüschel ähnliche und axenparallele Kegelschnitte werden.

Lässt man die Axenrichtungen der Kegelschnitte mit den Coordinatenaxenrichtungen identisch werden, wodurch der Charakter des Problems keine Aenderung erleidet, so werden die Differentialgleichungen diese:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}}{\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}}=\text{Const}$$

Die erste dieser Gleichungen, welche angiebt, wann der Kegelschnitt ein Kreis wird, kann auf reelle Weise nur dadurch erfüllt werden, dass man

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

setzt; das sind aber die Bedingungen der ersten Art der Conformität. (Congruente Strahlbüschel mit gleichem Drehungssinn).

Dagegen ist die zweite Gleichung, die Bedingung für die gleichseitige Hyperbel, nur eine der beiden Bedingungen für die Conformität zweiter Art.

Eine andere Aufgabe von fundamentaler Bedeutung besteht darin, die analytische Bedingung dafür aufzusuchen, dass die Schnittcurve anstatt eines Kegelschnittes eine gerade Linie wird.

Da wir wissen, dass in diesem Falle die Gerade $P\Pi$ die Richtungen eines Paares entsprechender Strahlen angiebt, so ist die Auflösung leicht. Es folgt nämlich aus dem so eben Gesagten, dass in diesem Falle

$$\tau = t = \frac{\eta - y}{\xi - x}$$

ein Paar entsprechender Werte t, τ sind, und daher die Fundamentalgleichung

$$\tau = \frac{b_1 + b_2 t}{a_1 + a_2 t}$$

durch die Substitution dieser Werte erfüllt werden muss.

Das giebt:

$$(\xi - x)\begin{vmatrix} \xi - x, & \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \eta - y, & \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{vmatrix} + (\eta - y)\begin{vmatrix} \xi - x, & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \eta - y, & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

welches die gesuchte Bedingung der Linearität der Schnittcurve ist.

Alle partiellen Differentialgleichungen, zu welchen wir gelangt sind, können in zweifacher Weise zur Anwendung kommen. Entweder handelt es sich um die Untersuchung einer gegebenen Correlation, wo dann die partiellen Differentialgleichungen algebraische Gleichungen werden, durch welche in dem P-Gebiete und dem entsprechend in dem Π-Gebiete Curven charakterisirt werden, deren Punkten die betreffenden Eigenschaften zukommen; oder man sucht besondere Arten von Correlationen, welche einer oder zweien der

partiellen Differentialgleichungen überall Genüge leisten, was eine Aufgabe der Integralrechnung ist.

Die Gleichung

$$(\xi - x)\begin{vmatrix} \xi - x, & \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \eta - y, & \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{vmatrix} + (\eta - y)\begin{vmatrix} \xi - x, & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \eta - y, & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

die Bedingung der Linearität der Schnittcurve, mag in dem zuletzt genannten Sinne in Betracht gezogen werden. Dieselbe besitzt die Eigenschaft, sich auf eine abhängige Variabele bringen zu lassen.

Setzt man nämlich

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = z,$$

so lässt sich Alles durch z und dessen partielle Differentialquotienten ausdrücken, und die partielle Differentialgleichung nimmt, wie man leicht sieht, die sehr einfache Gestalt an:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt die Lösung:

$$z = \frac{y - b}{x - a},$$

wenn a und b Constanten sind. Man kann dieselbe bekanntlich nach dem Princip der Variation der Constanten verallgemeinern, indem man

$$b = \varphi(a)$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial b} \cdot \frac{db}{da} = 0$$

setzt.

Man erhält dadurch in unserm Falle:

$$\frac{db}{da} = \frac{y - b}{x - a}.$$

Die geometrische Deutung dieser Resultate ist leicht. Betrachten wir zunächst den einfacheren Fall, von welchem wir ausgegangen, dass a und b Constante sind.

Die Gleichung

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{y - b}{x - a}$$

sagt aus, dass die Correlation die Eigenschaft haben muss, dass jedes Paar entsprechender Punkte P, Π mit einem festen Punkte C, dessen Coordinaten a, b sind, in einer geraden Linie liegt. Dadurch allein ist aber die Correlation noch nicht bestimmt, und die Vervollständigung ist im Allgemeinen in unser Belieben gestellt; man kann das geometrisch so ausdrücken, dass man sagt: es darf eine beliebige Curvenschaar, welche nur von einem Parameter abhängt (d. i. deren Individuen durch die Werte dieses Parameters bestimmt sind), hinzugefügt werden.

Wir wollen nun die allgemeine Lösung ins Auge fassen. An die Stelle des Punktes C tritt eine beliebige Curve:

$$b = \varphi(a).$$

Wir haben jetzt:

$$\frac{db}{da} = \frac{y - b}{x - a} = \frac{\eta - y}{\xi - x}.$$

Da $\frac{db}{da}$ die trigonometrische Tangente der im Punkte (a, b) an jene Curve gelegten Tangente ist, so sehen wir ohne Weiteres, dass an die Stelle der durch den Punkt C gehenden Geraden hier die Tangenten der Curve treten.

Wir können diese Betrachtungen zu folgendem geometrischen Theorem zusammenfassen:

Wenn man eine beliebige, nur von einem Parameter abhängende Curvenschaar und ausserdem eine einzelne Curve C hat, und wenn man aus diesen Elementen eine Correlation in der Weise construirt, dass man Tangenten an die Curve C legt und irgend zwei der Schnittpunkte einer Tangente mit einer Curve der Schaar als entsprechende Punkte der Correlation auffasst, so hat die Correlation im Allgemeinen die Eigenschaft, dass die entsprechenden Strahlen der zu P, Π gehörigen Strahlbüschel sich, hinreichend verlängert, auf einer Geraden schneiden. An die Stelle der Curve C kann, wenn man will, auch ein Punkt C treten. Ausnahmefälle, in welchen die Schnittcurve keine Gerade wird, sind denkbar und müssen bei jeder besondern Wahl, welche man trifft, besonders aufgesucht werden.

Anmerkung. Es sei noch bemerkt, dass diese Classe von Correlationen unendlich viele sich selbst entsprechende Punkte besitzt, welche zusammen

So hat die Integralrechnung vermöge der einfachsten Betrachtungen zu einem geometrischen Theorem von allerdings bedeutender Complication, aber auch von überraschend grosser Allgemeinheit geführt.

Die Existenz von Ausnahmefällen, welche überhaupt eine charakteristische Eigentümlichkeit der Theoreme von dieser Art bildet, kann meines Erachtens das Interesse, welches sie gewähren, nicht vermindern; eher könnte sie dasselbe erhöhen, indem das Aufsuchen dieser Ausnahmefälle seinerseits einen Leitfaden für die Untersuchung der betreffenden Classe von Correlationen an die Hand giebt.

Ich werde einen speciellen Fall, welcher sich als ein solcher Ausnahmefall erweisen wird, in Betracht ziehen, was auf ein bekanntes Theorem aus der Lehre von den Kegelschnitten und den entsprechenden Satz für höhere algebraische Curven führen wird.

Eine der am häufigsten untersuchten Curvengruppen ist ein Kegelschnittbüschel, das Ensemble der Kegelschnitte, welche durch vier gegebene Punkte hindurchgehen. Dasselbe wird, wenn

$$F(x, y) = 0, \qquad G(x, y) = 0$$

die Gleichungen zweier seiner Kegelschnitte sind, durch die Gleichung

$$\frac{G(x, y)}{F(x, y)} = p$$

dargestellt, wo p der die einzelnen Kegelschnitte des Büschels charakterisirende Parameter ist.

Versteht man aber unter $F = 0$, $G = 0$ die Gleichungen beliebiger anderer Curven, so charakterisirt die Gleichung $\frac{G}{F} = p$ ein beliebiges Curvenbüschel.

Wir wollen ein solches auf folgende Weise zur Construction einer Correlation benutzen:

Seien A, A irgend zwei der Mittelpunkte des Büschels (nämlich der gemeinschaftlichen Schnittpunkte sämmtlicher Curven), so werde durch diese Punkte eine Gerade — also eine gemeinschaftliche Sehne

---

eine Curve bilden; man findet sie, indem man an die C-Curve und je eine Curve der Curvenschaar die gemeinschaftliche Tangente construirt. Dieses ist in so fern eine besondere Eigenschaft, als Correlationen im Allgemeinen, wie wir beispielsweise bei der Collineation gesehen haben, nur eine endliche Anzahl sich selbst entsprechender Punkte besitzen.

des Büschels — gelegt und auf dieser ein Punkt C angenommen; legt man durch C eine beliebige Gerade, so sollen zwei der Schnittpunkte der letztern mit einer Curve des Büschels zwei entsprechende Punkte P, Π sein.

Die Definition ist freilich in so fern noch nicht ganz bestimmt, als noch nicht gesagt ist, welche der Schnittpunkte gemeint werden. Für die hier zu machende Anwendung genügt es, festzusetzen, dass es diejenigen Punkte sein sollen, welche, wenn sich die Gerade $CP\Pi$ in der Richtung nach $CA\mathrm{A}$ hin dreht, in dem Moment des Zusammenfallens beider Linien respective mit A, A identisch werden.

Diese Correlation soll in der Nähe der Punkte A, A, welche als Mittelpunkte entsprechender Strahlbüschel aufzufassen sind, untersucht werden.

Seien $x+dx$, $y+dy$ die Coordinaten eines Punktes in der Nähe von A und $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$ die des entsprechenden Punktes in der Nähe von A, so haben wir, weil nach der Definition der Gleichungen $G=0$, $F=0$ für die Coordinaten der Mittelpunkte A, A erfüllt sein müssen:

$$\frac{\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}\partial y}{\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy}=p=\frac{\frac{\partial G}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial G}{\partial \eta}d\eta}{\frac{\partial F}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial F}{\partial \eta}d\eta},$$

so dass also zwischen den trigonometrischen Tangenten $\frac{dy}{\partial x}=t$, $\frac{d\eta}{d\xi}=\tau$ die lineare Beziehung herrscht:

$$\frac{G'(x)+G'(y).t}{F'(x)+F'(y).t}=\frac{G'(\xi)+G'(\eta).\tau}{F'(\xi)+F'(\eta).\tau}.$$

Die beiden Tangentenbüschel stehen demnach in projectivischer Beziehung, und es gilt jedenfalls der Satz:

Jedes Curvenbüschel hat die Eigenschaft, dass die in zwei Mittelpunkten des Büschels an jede seiner Curven gelegten Tangenten sich auf einem Kegelschnitt treffen. Ausgenommen ist natürlich der Fall, dass die Determinante der Functionen F, G für die Coordinaten eines der Punkte A, A oder beider entweder verschwindet, oder unstetig wird.

Da die Correlation, mit welcher wir uns hier beschäftigen, in die Classe derjenigen gehört, für welche oben das allgemeine Theorem gefunden wurde, dass die geradlinigen Verlängerungen entsprechender

Strahlen zweier Büschel sich auf einer Geraden schneiden, so müsste der vorhin genannte Kegelschnitt in Gerade degeneriren, wenn die Punkte A, A keine Ausnahmepunkte wären. Man erkennt aber leicht, dass sie wirklich als Ausnahmepunkte aufgefasst werden müssen; der Umstand, dass der Punkt C, der doch für die Construction der Correlation sehr wesentlich war, aus den letzten Betrachtungen ganz herausgegangen ist, deutet schon darauf hin. Wir haben daher Veranlassung, das Verhalten der zu den Punkten A, A gehörigen Strahlbüschel genauer zu untersuchen.

Wenn sie perspectivische Lage haben sollten, so müsste unter den unendlich vielen Paaren entsprechender Strahlen eines sein, welches, hinreichend verlängert, zusammenfiele; oder, was dasselbe ist: eine Curve des Büschels müsste die Gerade AA doppelt, nämlich in den Punkten A und A berühren.

Die Gleichung

$$\frac{G'(x)+G'(y).t}{F'(x)+F'(y).t}=\frac{G'(\xi)+G'(\eta).\tau}{F'(\xi)+F'(\eta).\tau}$$

der projectivischen Beziehung müsste daher erfüllt werden, wenn man in sie

$$\tau=t=\frac{\eta-y}{\xi-x}$$

hineinsetzt. Es müsste also für die Coordinaten x, y und ξ, η der Punkte A und A die Gleichung bestehen:

$$\begin{vmatrix}(\xi-x)F'(x)+(\eta-y)F'(y), & (\xi-x)F'(\xi)+(\eta-y)F'(\eta)\\ (\xi-x)G'(x)+(\eta-y)G'(y), & (\xi-x)G'(\xi)+(\eta-y)G'(\eta)\end{vmatrix}=0.$$

Die weitere Untersuchung wird am einfachsten, wenn man nach der bekannten Methode die Functionen F, G durch Einführung einer dritten Variabeln, welche hernach gleich 1 gesetzt wird, homogen und von den Sätzen über homogene Functionen Gebrauch macht.

Man erhält auf diese Weise die Identitäten

$$\left.\begin{aligned}F(x,y)&=f(x,y,z)=\frac{1}{n}(xf'(x)+yf'(y)+zf'(z))\\ G(x,y)&=g(x,y,z)=\frac{1}{n}(xg'(x)+yg'(y)+zg'(z))\end{aligned}\right\}\quad\text{für } z=1,$$

und das Entsprechende für ξ, η, und $\zeta=1$; auch ist

$$F'(x)=f'(x)$$

u. s. w.

Da nun nach der Voraussetzung $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$ ist, so folgt, dass man

$$xF'(x) + yF'(y) = -zf'(z)$$
$$xG'(x) + yG'(y) = -zg'(z)$$

setzen darf, und Analoges gilt für ξ, η.

Die Substitution dieser Ausdrücke in die linke Seite der fraglichen Gleichung liefert:

$$\begin{vmatrix} \xi f'(x) + \eta f'(y) + zf'(z), & xf'(\xi) + yf'(\eta) + \zeta f'(\zeta) \\ \xi g'(x) + \eta g'(y) + zg'(z), & xg'(\xi) + yg'(\eta) + \zeta g'(\zeta) \end{vmatrix};$$

da $z = \zeta = 1$ zu setzen ist, so darf man auch schreiben:

$$\begin{vmatrix} \xi f'(x) + \eta f'(y) + \zeta f'(z), & xf'(\xi) + yf'(\eta) + zf'(\zeta) \\ \xi g'(x) + \eta g'(y) + \zeta g'(z), & xg'(\xi) + yg'(\eta) + zg'(\zeta) \end{vmatrix};$$

sind nun die Functionen F und G speciell vom zweiten Grade, so ist bekanntlich

$$\xi f'(x) + \eta f'(y) + \zeta f'(z) = xf'(\xi) + yf'(\eta) + zf'(\zeta),$$

und die vorstehende Determinante erhält daher in diesem Falle wirklich den Wert Null, während sie für andere Functionsformen im Allgemeinen nicht verschwindet.

Wir haben demnach den aus der Theorie der Kegelschnitte bekannten Satz bewiesen:

Wenn das Curvenbüschel ein Kegelschnittbüschel ist, so schneiden sich die entsprechenden Tangenten der beiden Tangentenbüschel auf einer Geraden.

Wenn nur eine der beiden Functionen F, G vom zweiten, die andere vom ersten Grade ist, so bedeutet dieses eine Gruppe von Kegelschnitten, welche einander ähnlich sind, gleiche Hauptaxenrichtungen haben und ausserdem durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen. Auch für diese gilt der so eben bewiesene Satz.

Vergleichen wir die drei letzten Theoreme mit einander, so erscheint das zweite als eine Ausnahme des ersten, das dritte als eine Ausnahme des zweiten und daher der Hauptregel entsprechend.

Die Kegelschnitte bilden hier einen Gegensatz zu den höhern Curven; ein solcher Gegensatz trat auch gleich am Anfange hervor, indem bei der Untersuchung entsprechender Strahlbüschel sich zeigte, dass hierbei — vom Standpunkte der Correlation betrachtet — die Projectivität und demnach der Kegelschnitt die Regel, jede andere

Beziehung zwischen Strahlbüscheln und demnach jede andere Schnittcurve die Ausnahme bildet. Ob diese Betrachtungsweise die natürliche ist, wage ich freilich vor der Hand nicht zu entscheiden.

Ich möchte damit diese einfachen Betrachtungen schliessen; ich beabsichtigte damit vornehmlich, in Erinnerung zu bringen, wie man mit den älteren Hilfsmitteln der Analysis und vor Allen vermittelst der Cartesius'schen Coordinaten ohne grosse Rechnung der synthetischen Geometrie doch erhebliche Dienste leisten kann. Damit soll den gegenwärtig in der analytischen Geometrie mit so grossem Erfolge angewandten homogenen Coordinatensystemen keineswegs zu nahe getreten werden; aber die rechtwinkligen Coordinaten sind durchaus nicht für die Geometrie veraltet; sie sind für dieselbe vielmehr nach wie vor als fundamentales Coordinatensystem von grösster Wichtigkeit, ebenso wie für die Mechanik und aus denselben Gründen.

Ausserdem giebt es Gebiete in der Geometrie, für welche sie recht eigentlich geschaffen sind und vor jedem andern Coordinatensystem den Vorzug verdienen. (Beispiel: die Entwickelung der Symmetrieeigenschaften der Kegelschnitte).

Dass sie nicht überall hingehören, ist ohne Weiteres zuzugeben, aber dasselbe gilt von allen andern Coordinatensystemen, auch von den trilinearen.

Eine auf fundamentalen Principien begründete und dabei doch möglichst detaillirte vergleichende Kritik der verschiedenen Coordinationsmethoden (Coordinatensysteme und Correlationen), verbunden mit Proben ihrer Leistungsfähigkeit dürfte die sowohl dem philosophischen als dem speciell geometrischen Interesse entsprechendste Einleitung in die wissenschaftliche Geometrie — analytische sowohl, als auch synthetische — sein. Vielleicht würde eine derartige Kritik auch aus zureichenden Gründen beurteilen lehren, was in der Geometrie sich naturgemässer durch Calcul und was naturgemässer durch synthetisch-geometrische Betrachtung machen lässt.

Anmerkung. Wenn eine gemischte Darstellung uns als „systemlos" weniger zusagt, so hat das seinen guten Grund darin, dass bei derartigen Darstellungen — allerdings mit Ausnahme des Steiner'schen Meisterwerkes — wohl selten in der Auswahl dessen, was auf die eine oder die andere Art zu behandeln ist, principiell verfahren wird.

XIII.

Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei orthogonaler und bei perspectivischer Darstellung.

Von

Herrn **Josef Bazala,**

Lehrer der Mathematik und der darstellenden Geometrie an der öffentlichen Oberrealschule in der Josefstadt in Wien.

(Mit 2 Tafeln.)

---

§. 1.

Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei gewöhnlicher Darstellung durch Grund- und Aufriss.

Die Flächen, deren Beleuchtungs-Constructionen Gegenstand dieser Abhandlung sind, werden durch zwei Systeme von ebenen Curven charakterisirt; die durch eine bestimmte Gerade A [Taf. VI., Fig. 1.] gehenden Schnitte M, M_1, M_2 ... lassen sich auf einander in zu dieser Geraden normalen Richtungen projiciren, während die zu derselben normalen Schnitte P durch Centralprojectionen aus Punkten dieser Geraden A in einander übergehen. Wir nennen nach Professor Schlesinger *) die ersteren Linien Seitenlinien, die letzteren Formlinien und die Gerade A Scheitelgerade der Fläche.

---

*) Josef Schlesinger „Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie". S. 359, Wien.

In Fig. 1. der Tafel VI. sind uns von einer derartigen Fläche die Scheitelgerade A, eine Formlinie P und eine Seitenlinie M gegeben. Um die Isophoten der dadurch bestimmten Fläche für eine gegebene Lichtstrahlenrichtung l darzustellen, werden wir die Isophotenpunkte einzelner Seitenlinien derselben construiren und sie dann entsprechend verbinden. Sollen beispielsweise die in der Seitenlinie M_1 liegenden Isophotenpunkte bestimmt werden, so suche man die Lagen E derjenigen Ebenen auf, welche die gegebene Fläche in diesen Punkten berühren. Diese Ebenen müssen sämmtlich zu der im Punkte a_1 an P geführten Tangente t_1 parallel sein und mit der Lichtstrahlenrichtung l Winkel einschliessen, deren Sinus respective 0, 0·1, 0·2, 0·3 ... 0·9, 1 sind.

Um diese Ebenen möglichst einfach zu erhalten, legen wir in einer Hilfsfigur 1a durch einen in der verticalen Projectionsebene liegenden Punkt S einen Lichtstrahl l und construiren zehn Rotationskegel mit dem gemeinschaftlichen Scheitel S und der gemeinsamen Achse l, denen die Beleuchtungsstärken 0, 0·1, 0·2, 0·3 ... 0·9, 1 entsprechen. Klappt man die horizontal projicirende Ebene von l, welche wir in der Folge wegen ihrer grossen Wichtigkeit Lichtrissebene nennen wollen, um l' in die horizontale Projectionsebene um [h'', h' senkr. x, $S'S_0$ senkr. l', $S'S = S'S''$, S_0h'], trägt dann auf der zu l_0 normalen Geraden $S_0\overline{10}$ eine beliebige Strecke zehnmal auf und projicirt die dadurch entstandenen Punkte in der Richtung l_0 auf den aus S_0 mit dem Radius $S_0\overline{10}$ geführten Halbkreis k_0, so schliessen die durch den Scheitel S_0 und die Punktreihe k_0 gehenden Strahlen mit l_0 Winkel ein, deren Sinus respective 0, 0·1, 0·2, 0·3 ... 0·9, 1 sind. Durch Rotation dieses Büschels Sk um den Lichtstrahl l entstehen die oben genannten Kegel. Zieht man nun durch S eine zu t_1 [Fig. 1.] parallele Gerade und legt durch dieselbe an die zehn Kegel Berührungsebenen E, so müssen zu denselben die durch die gesuchten Isophotenpunkte der Seitenlinie M_1 gehenden Berührungsebenen der gegebenen Fläche parallel sein.

Damit die einzelnen Berührungsebenen des Kegelbüschels leicht und genau construirt werden können, wurde derselbe durch eine durch S' [Fig. 1a] gehende und auf l normal stehende Ebene mno_0 [$S'\Theta_0$ senkr. l_0] geschnitten und der Schnitt, welcher aus concentrischen Kreisen besteht, deren Radien sich im Lichtrisse auf $S'O_0$ ergeben, um die Trace mn in die Grundrissebene umgelegt [$S'O_1 = S'O_0$ ...]. Einer dieser Kreise schrumpft in den Punkt O_1 zusammen, während ein anderer unendlich gross wird; sowohl diese Kreise als auch die zugehörigen Kegel wollen wir mit den Zeigern 0, 1, 2,

3 ... 10 bezeichnen. Nun hat man von der horizontalen, zu t_1 [Fig. 1.] parallelen Geraden Sd [Fig. 1a] den Durchschnittspunkt d mit der Ebene mno zu bestimmen und von demselben Tangenten an die concentrischen Kreise zu führen, durch welche dann die zu bestimmenden Berührungsebenen E der Kegel gehen müssen.

Weil die den einzelnen Seitenlinien M_1, M_2, M_3... der gegebenen Fläche entsprechenden, durch S nach den Richtungen t_1, t_2, t_3 ... zu führenden Geraden sämmtlich horizontal sind, bestimmen wir die horizontale Projection D' [Fig. 1a] des Durchschnittes D der durch S gehenden horizontalen Ebene mit der Ebene mno des Kreisbüschels $[S_0D_0 \parallel l', D_0D' \parallel mn]$ und die Umlegung D_1 desselben $[S'o = S'D_0, oD_1 \parallel mn]$. Wird nun $S'd'$ parallel zu t_1 [Fig. 1.] geführt, so ergibt sich schon in der Geraden D' [Fig. 1a] der Punkt d' und durch Führung der zu l' parallelen Geraden $d'd_1$ in der Geraden D_1 die Umklappung d_1 des Durchstosspunktes d. Man kann unmittelbar d_1 erhalten, wenn man einfürallemal $o\mathfrak{S}$ gleich der Entfernung des Punktes S' von der Geraden D' macht und anstatt durch S' durch den Punkt $\mathfrak{S}$ die Parallelen zu den Tangenten von P zieht.

Die durch d_1 an den Kreisbüschel geführten Tangenten schneiden die Horizontaltrace mn in den Punkten 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. Nun denken wir uns die Hilfsfigur 1a mit der Hauptfigur 1 so vereinigt, dass S' auf A', mn auf mn und der Raumpunkt S in die Scheitelgerade A zu liegen kommt. Werden dann durch die Punktreihe mn die zu t_1 parallelen Horizontaltracen der durch S gehenden Ebenen E geführt*), so liefern dieselben auf M_1' eine Punktreihe, welche, mit S verbunden, die Schnittgeraden der Ebenen E mit der Ebene der Seitenlinie M_1 liefert, so dass dann diese Geraden die Richtungen der Tangenten T_1 vorstellen, welche M_1 in den gesuchten Isophotenpunkten berühren.

Nun denken wir uns die Seitenlinie M_1 sammt dem Büschel SM_1' auf die Ebene M in der Richtung a_1a projicirt, was einfach durch die blosse Projection der Punktreihe M_1' auf M' geschieht. Projicirt man schliesslich dieses Gebilde M in der zur Projectionsachse x_1 normalen Richtung $a'x$ auf die zu x_1 parallele Gerade $S'x$, so ergeben sich in der Hilfsfigur durch den Büschel $S''x$ die Richtungen der verticalen Projectionen T'' der an M zu führenden Tangenten. Ist M'' eine beliebig gezogene Curve, deren Entstehungsgesetz nicht bekannt ist, so ist es am zweckmässigsten, ihre Evolute E'' zu zeichnen, in der Nebenfigur aber statt des Büschels $S''x$ den Normalbüschel $S_n\overline{zz}$ desselben dadurch zu construiren, dass man $S'S''$

*) Mehrere der nun folgenden Parallelprojectionen sind in der Figur nicht dargestellt, weil sie blos der Erklärung wegen angeführt werden.

einfürallemal nach $S'S_n$ aufträgt und die Punktreihe $S'x$ um 90^0 nach zz dreht, das heisst, in der Richtung xf [Fig. 1., $S'f = S'x$] auf die Gerade $S'z$ projicirt. Anstatt aber die Punktreihe mn zuerst in der Richtung e_1, a_1' auf M_1', von hier in der Richtung $a_1'a'$ auf M_1', dann in der Richtung $a'x$ auf $S'x$ und schliesslich in der Richtung xf auf $S'z$ zu projiciren, kann man in der Hilfsfigur die Punktreihe mn sofort in der aus der Hauptfigur sich ergebenden Richtung e_1f auf den Träger $S'z$ projiciren. Werden dann zu den Strahlen des Büschels S_nz parallele Tangenten an die Evolute E'' gezogen, so treffen dieselben M'' in den gesuchten Berührungspunkten (4)″, (3)″, (2)″, (1)″, (0)″ der Tangenten T''. Damit man in der Hilfsfigur nicht Punkte auf den Träger $S'z$ projicire, welche man bei M'' nicht anwenden kann, ist es zweckmässig, durch S_n zwei Strahlen S_nz zu führen, welche zu den Normalen der Endpunkte der Curve M'' parallel sind; dann braucht man nur die zwischen die beiden sich ergebenden Punkte z zu liegen kommenden Punkte der Reihe zu construiren. Projicirt man nun die auf M'' construirten Punkte zuerst nach M', von hier nach M_1' in der Richtung $a'a_1'$ und zuletzt in den Aufriss, so ist eine Gruppe von Isophotenpunkten dargestellt. Von den Punkten der Selbstschattengrenze muss man wegen der Construction des Schlagschattens auch die unsichtbaren Projectionen darstellen.

Der in der Nebenfigur zu d_1O_1 normale Strahl des Büschels d_1 liefert bei obiger Construction diejenigen Punkte der Seitenlinie M_1, welchen ein Maximum der Beleuchtungsstärke zukommt. Es ist leicht einzusehen, dass man durch Unterteilung der Scala $S_0\overline{10}$ Punkte einer beliebigen Beleuchtungsstärke erhalten und auch zu jedem Punkte der gegebenen Fläche durch Ausführung obiger Construction in umgekehrter Aufeinanderfolge der Beleuchtungsstärke bestimmen kann.

Damit man bei der Behandlung einer Seitenlinie die von der früheren herrührenden Punktreihen mn, zz, M'' und M' ausradiren könne, ohne dass dadurch die ganze Figur ungenau wird, ist es notwendig, vorerst diejenigen Linien, auf welche unsere Construction gegründet ist, mit Tusche ganz dünn auszuziehen. Die ganze Arbeit wird bedeutend vereinfacht, wenn man die Constructionen der Isophotenpunkte auf allen Seitenlinien M_1, M_2, denen dieselbe Tangentenrichtung t_1, t_2 entspricht, unmittelbar nach einander vornimmt, weil man dann für dieselben nur e i n e Punktreihe mn darzustellen braucht, welche für die Seitenlinie M_2 in der Richtung e_2f auf den Träger zz zu projiciren ist.

Die in der Nebenfigur durch d_1 zu führenden Tangenten treten

immer paarweise auf; wenn daher d_1 mit einem der Schnittpunkte des Kreisbüschels und der Geraden D_1, z. B. mit dem Punkte d_9 zusammenfällt, so ergeben sich bei dem betreffenden Kreise zwei zusammenfallende Tangenten τ_9. Führt man dann parallel zu $\mathfrak{S}d_9$ an P' [Fig. 1.] Tangen t_9, so bekommt man dadurch die dem Punkte d_9 entsprechenden Seitenlinien M_9 und kann nach dem allgemeinen Verfahren ihre Isophotenpunkte darstellen. Die Doppeltangente τ_9 liefert dabei immer zwei zusammenfallende Isophotenpunkte 9, so dass die in diesen Doppelpunkten an die Seitenlinie der Fläche geführten Tangenten α_9 auch Isophotentangenten sind. Man bekommt sie am einfachsten, wenn man die Tangente $[9]''\alpha$ der Seitenlinie M zieht und ihren in A'' liegenden Schnittpunkt α markirt.

Construirt man die Isophotenpunkte, welchen zu x_1 normale Tangenten t_3 [Fig. 1.] entsprechen, so sind dieselben zugleich Punkte der Verticalcontour, für welche die zugehörigen Contourtangenten, welche auch Tangenten der Aufrissisophoten sind, sich auf die oben angewandte Art ergeben. Von der grössten Wichtigkeit für das Zeichnen der Isophoten sind auch die beiden in der Flächenkante M liegenden Reihen von Isophotenpunkten.

Bei der zu l' normalen Tangente t_4 von P', durch deren Berührungsqunkt a_4 diejenige Seitenlinie M_4 gehen muss, in welcher der Lichtpol 10 liegt, führt das allgemeine Verfahren zu keinem Resultate. Da jedoch die zu suchenden Berührungsebenen den Kegelbüschel in denjenigen Erzeugenden berühren, welche in der Lichtrissebene liegen, so ergeben sich Punkte ihrer zu mn parallelen Horizontaltracen im Durchschnitte der Geraden l' mit dem Büschel S_0k_0. Die Richtung, in welcher diese Punktreihe l' auf $S'z$ zu projiciren ist, erhält man in der Hauptfigur in e_4f durch den Durchschnittspunkt e_4 von t_4 mit l'.

Wenn die beleuchtete Fläche eine Horizontalcontour besitzt, so sind die Isophotenpunkte derselben für das Zeichen der Grundrissisophoten sehr notwendig. Da die zugehörigen Berührungsebenen sämmtlich vertical sind, haben wir durch S eine verticale Gerade zu führen, welche die Ebene mno in S' trifft, aus welchem Punkte die Tangenten des Kreisbüschels zu ziehen sind. In diesem Falle ergeben sich die Horizontaltracen dadurch am einfachsten, dass man diese Tangenten durch Zurückführung ihrer in D_1 liegenden Punkte in den Raum aufdreht. Der Büschel $S'D'$ stellt dann die horizontalen Projectionen dieser Tangenten und daher auch die gesuchten Tracen vor, deren Richtungen, welche allein für die weitere Construction notwendig sind, man aber einfacher in dem Büschel $\mathfrak{S}C_1$ erhält. Die nach diesen Richtungen an die Horizontalcontouren zu ziehenden

Tangenten liefern Isophotenpunkte und im Grundrisse auch Isophotentangenten. Um aber diese Contouren nicht vorerst zeichnen zu müssen, kann man die Tangenten an die ihr ähnliche Formlinie P ziehen, die Berührungspunkte mittelst des Aehnlichkeitspunktes A' übertragen und zuletzt die verticalen Projectionen bestimmen.

Hat man eine für das Zeichnen der Isophoten hinreichende Anzahl von Punkten construirt, so kann man auch einfach durch schiefe Projection der construirten Punkte der Selbstschattengrenze erhalten.

Ist M'' vom zweiten Grade oder eine andere Curve, deren Tangenten- oder Normalen-Construction bekannt ist, so wird man nicht die Evolute E'' construiren, sondern die Normalen oder Tangenten von durch die Hilfsfigur gegebenen Richtungen bestimmen. In letzterem Falle ist unsere Construction ein wenig dahin abzuändern, dass durch dieselbe in der Hilfsfigur statt des Normalbüschels S_{nx} der Tangentenbüschel $S''x$ resultirt.

§. 2.

Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei axonometrischer Darstellung.

Bei axonometrischer Darstellung ist eine Fläche der im vorigen Paragraphen charakterisirten Art durch die Bilder der Scheitelgeraden BC [Taf. VI., Fig. 2.], einer Formlinie P und einer Seitenlinie, durch den Durchstosspunkt A von BC mit der Ebene P und den Neigungswinkel ν der letzteren gegen die Bildebene vollkommen bestimmt. In unserer Figur wurde angenommen, dass sämmtliche Seitenlinien Halbellipsen sind, welche durch die von A gleich weit entfernten gemeinschaftlichen Scheitel B und C gehen, so dass durch diese Bedingung die Annahme einer gegebenen Seitenlinie entfällt. Wir wollen zeigen, wie man in einem solchen Falle für eine gegebene Lichtstrahlenrichtung l, l' die Construction des vorigen Paragraphen am einfachsten ausführen kann.

Wird eine Halbellipse M geführt, deren Bild ein Halbkreis ist, so lassen sich alle Seitenlinien auf dieselbe parallel projiciren. In der Nebenfigur 2a führen wir durch einen Punkt S, S' einen Lichtstrahl l, l', welcher die zu P [Fig. 2.] parallele Grundebene der Nebenfigur in h trifft und drehen dann diese Ebene um die zum Bilde SS' normale Achse x so lange, bis sie den Neigungswinkel ν zurücklegt und somit zur Bildebene parallel wird, wobei h und l' in die Lagen (h) und (l') kommen [$hh_2 \parallel x$, $h\alpha(h)$ senkr. x, $\alpha(h) = S'h_2$,

$(h)S'(l')$]. Wird $S'S_2$ normal zu $S'h_2$ und SS_2 parallel zu x geführt, so ergibt sich in S_2S' die wahre Länge der Projicirenden SS' und man kann dann in der umgeklappten Grundebene das ganze in der Figur 1a construirte ebene System mno auf die dort ersichtliche Art darstellen [$S'S_0$ senkr. (l'), $S'S_0 = S'S_2$, $S_0(h)$, $S_0\overline{10}$ senkr. $S_0(h)$ u. s. w., (D_1), $(\mathfrak{S})$]. Die Geraden (D_1) und $(m)(n)$ dieses ebenen Systemes werden in die ursprüngliche Lage der Grundebene nach D_1 und mn aufgedreht, indem man $(o)o$ normal zu x zieht und die Gerade δo, und die zu ihr parallele mn führt, worauf in der Hauptfigur die Geraden x, mn und $(m)(n)$ parallel zu den gleichnamigen Geraden der Hilfsfigur zu ziehen sind.

Um nun die in irgend einer Seitenlinie M_1 liegenden Isophotenpunkte zu erhalten, ziehen wir in der Hauptfigur die Tangente t_1, welche die Richtung des die gegebene Fläche nach M_1 berührenden Cylinders angibt, und bestimmen die Lage $(e_1)\beta$, in welche dieselbe tritt, wenn man die Ebene P um die Achse x in eine zur Bildebene parallele Lage dreht. Führt man zu dieser Geraden in der Nebenfigur eine Parallele durch $(\mathfrak{S})$, so ergibt sich der Punkt (d_1), aus welchen man an den Kreisbüschel die Tangenten ziehen kann, deren Schnittpunkte mit $(m)(n)$ markirt werden. Für die weitere Construction denken wir uns die Hilfsfigur so in die Hauptfigur gelegt, dass S' auf A und S in die Scheitelgerade AB zu liegen kommt, und dass sich die Geraden x, mn und $(m)(n)$ paarweise decken. Weil wir uns, wie im vorigen Paragraphen, wieder die Seitenlinie M_1 sammt ihren Isophotenpunkten und den durch dieselben gehenden Tangenten der Seitenlinie auf M projicirt denken, haben wir die Punktreihe $(m)(n)$ in der Richtung $(e_1)e_1$ auf die Gerade mn, von hier in der Richtung e_1a_1 auf den Träger M_1' und von hier in der Richtung a_1a auf die Gerade x zu projiciren. Der Büschel Sx gibt dann schon die Richtungen an, nach welchen an M Tangenten zu führen sind. Um die Richtungen der entsprechenden Normalen zu bekommen, hat man diesen Büschel Sx noch um 90^0 zu drehen, d. h. die Punktreihe x in der Richtung aB auf den Träger BC zu projiciren. Diese vier Parallelprojectionen kann man aber in eine einzige vereinigen, deren Richtung sich in e_1B ergibt, und aus welcher in der Hilfsfigur die Punktreihe z resultirt. Wird $S'S$ nach $S'S_n$ aufgetragen, so kann man zu dem Büschel S_nz parallele Radien in der Hauptfigur ziehen, um die Punktreihe M zu erhalten, welche schliesslich in der Richtung aa_1 auf die Seitenlinie M_1 projicirt wird. Weil in der Hilfsfigur d_1 in einem der concentrischen Kreise angenommen wurde, ergibt sich auch eine Isophotentangente t_7.

Alle oben gemachten Bemerkungen über das Maximum der Beleuchtungsstärke auf einer Seitenlinie, die Auffindung der Be-

leuchtungsstärke eines beliebigen Punktes derselben, die zweckmässigste Aufeinanderfolge der zu behandelnden Seitenlinien und über die Kante der gegebenen Fläche haben auch hier, sowie auch bei perspectivischer Darstellung ihre volle Giltigkeit.

Sind die Seitenlinien nicht elliptisch, sondern ist eine beliebig geformte Seitenlinie M gegeben, so construire man die Evolute ihres Bildes und ziehe die zu den Strahlen des Normalbüschels S_{nz} parallelen Tangenten derselben. Die Lichtpole der Fläche liegen in derjenigen Seitenlinie, welcher die zu mn parallele Tangente t_4 entspricht; um ihre Isophotenpunkte zu erhalten, muss man, wie im §. 1. den Büschel S_0k_0 [Fig. 2a] durch die Gerade (l_1) schneiden, die dadurch entstehende Punktreihe in der in Fig. 2. durch die zu x normale Normale $e_4(e_4)$ sich ergebenden Richtung e_4B auf die Gerade z [Fig. 2a] projiciren und dann den Normalbüschel S_{nz} dem allgemeinen Vorgange unterziehen.

Auch bei axonometrischer Darstellung ist es vorteilhaft, die Isophotenpunkte jener Formenlinien zu construiren, in welchen die Fläche von zu ihrer Scheitelgeraden parallelen Cylindern berührt wird. Man hat die durch S' und den Kreisbüschel sich auf (D_1) ergebende Punktreihe nach D_1 aufzudrehen, wobei nur die eine Hälfte der symmetralen Punktreihe D_1 construirt zu werden braucht, während sich die andere als Copie ergibt, und an P zum Büschel $\mathfrak{S}D_1$ [$\mathfrak{S}$)$\mathfrak{S}$ senkr. x] parallele Tangenten zu führen. Die Berührungspunkte derselben sind im gezeichneten Falle schon die verlangten Isophotenpunkte.

Von grosser Wichtigkeit für das Zeichnen der Isophoten sind wieder die in der Contour liegenden Punkte derselben; sie lassen sich als Isophotenpunkte eines auf der Bildebene normal stehenden Berührungscylinders der gebenen Fläche darstellen. In der Hilfsfigur hat man durch S eine zur Bildebene normale Gerade zu führen, welche die zur Lichtstrahlenrichtung normale Ebene mno in einem Punkte v trifft; um seine umgeklappten Lagen v_1 und (v_1) zu erhalten, führen wir vorerst durch S eine zu l' parallele Gerade Ss, welche die Ebene mno in einem Punkte s trifft [$S_0s_0 \parallel (l')$, $s_0(s')$ senkr. (l'), $(s')s$ senkr. x]. Wird die Ebene mno um die Trace mn in die Grundebene umgeklappt, so kommt die Strecke $S's$ nach $S's_1$. Um die umgekehrte Lage des Punktes v zu erhalten, braucht man somit nur $v\delta \parallel sS'$, $\delta v_1 \parallel S's_1$ und $vv_1 \parallel ss_1$ zu ziehen. Die zweite Umklappung (v_1) ergibt sich dann durch $\varepsilon(v_1 \parallel (l)$ und $v_1(v_1)$ senkr. x. Die aus dem Punkte (v_1) an den Kreisbüschel geführten Tangenten geben eine Punktreihe $(m)(n)$, welche nach mn aufgedreht wird, so dass man dadurch im Büschel $v\,\overline{mn}$ schon die Lagen derjenigen auf

der Bildebene normal stehenden Berührungsebenen erhält, welche den gesuchten Isophotenpunkten der Contour entsprechen. Zieht man zum Strahle v_5 in der Hauptfigur an P eine parallele Tangente $a_5\varepsilon$, so ergibt sich durch ihren Berührungspunkt a_5 diejenige Seitenlinie der Fläche, in welcher der gesuchte Contour-Isophotenpunkt 5 liegen muss. Um an diese Seitenlinie die zu εa_5 parallele Tangente zu construiren, denken wir uns dieselbe auf die Linie M in der Richtung $a_5 a$ projicirt und ziehen an letztere die zu εa parallele Tangente $\{5\}\sigma$, so dass dann die durch den sich ergebenden Punkt σ zu εa_5 parallel geführte Gerade t_5 die gesuchte Isophoten- und Contourtangente ist. Der Contour- und Isophotenpunkt 5 ergibt sich durch Führung der zu $a a_5$ parallelen Geraden $\{5\}5$. Aus den sich so ergebenden Isophotenpunkten und Isophotentangenten kann man sofort die Flächencontour zeichnen.

Soll der Schlagschatten der behandelten Fläche auf eine durch den Punkt C parallel zur Ebene P gehenden Grundebene construirt werden, so projicire man vorerst die construirten Punkte o der Selbstschattengrenze auf diese Ebene, indem man Co' parallel zu M_1' und oo' parallel zu AB führt. Wird dann durch den Punkt o der Selbstschattengrenze ein Lichtstrahl l und durch o' seine Projection l' geführt, so ergibt sich im Schnittpunkte beider der Schlagschattenpunkt o_3.

§. 3.

Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei perspectivischer Darstellung.

Bei der in Fig. 3. perspectivisch dargestellten Fläche ist Ω der Augpunkt, $\Omega\Omega_0$ die Distanz, $\mu\nu$ die Fluchtlinie der Formlinien P, von welchen das Bild einer gegeben ist, α der Fluchtpunkt der Scheitelgeraden [$\Omega\pi$ senkr. $\mu\nu$, $\Omega\Omega_0$ senkr. $\Omega\pi$, $\Omega_0\alpha$ senkr. $\Omega_0\pi$]αAB, M das Bild einer Seitenlinie und λ der Fluchtpunkt der parallelen Lichtstahlen.

Die Teilungspunkte t_π und t_α, welche beziehungsweise den Richtungen π und α zukommen, erhält man, wenn man die Strecken $\pi\Omega_0$ und $\alpha\Omega_0$ beziehungsweise nach πt_π und αt_α aufträgt, während sich durch Führung der Geraden $\alpha\lambda$ in λ' der Fluchtpunkt ergibt, welcher den Projectionen der Lichtstrahlen auf die Grundebene P entspricht.

In der Hilfsfigur, welche dasselbe Projectionscentrum besitzt, als die Hauptfiguren, führen wir wieder durch einen beliebigen Punkt S, S' einen Lichtstrahl l, l', welcher die Grundebene $S'_{\mu\nu}$ im Punkte h trifft, und drehen analog der axonometrischen Darstellung diese Ebene um die zu ihrer Fluchtlinie $\mu\nu$ parallele Gerade x, wobei die umgelegte Gerade (l') parallel zu $t_\pi\lambda'$ wird, die neue Lage (h) des Punktes h ergibt sich durch den Strahl $t_\pi\, h(h)$. Um in der umgelegten Grundebene den bekannten Kreisbüschel construiren zu können, müssen wir die projicirende SS' auch in eine zur Bildebene parallele Lage bringen, indem wir $S'[S]$ normal zu $\mu\nu$ und den Strahl St_α führen. Wird $(m)(n)$ normal zu (l') gezogen und $S'[S]$ nach $S'S_0$ aufgetragen, so kann man auf mehr erwähnte Art den Kreisbüschel sammt den Gebilden (D_1) und $(\;)$ darstellen. Auch bei perspectivischer Darstellung werden wir die Gerade $(m)(n)$ in den Raum aufdrehen und zwar dadurch, dass wir $t_\pi\nu$ parallel zu $(m)(n)$ führen und durch den sich so ergebenden Fluchtpunkt ν die Gerade $S'mn$ ziehen, worauf in der Hauptfigur durch den in der Grundebene P liegenden Punkt A der Scheitelgeraden die Geraden $(m)(n)$ und mn perspectivisch parallel zu den gleichnamigen der Hilfsfigur geführt werden.

Um nach diesen Vorarbeiten die Isophotenpunkte irgend einer Seitenlinie M_1 zu erhalten, führen wir wieder zuerst die ihr entsprechende Tangente t_1 mit dem Fluchtpunkte τ_1, deren Umklappung somit die Richtung $t_\pi\ \tau_1$ haben muss. Wird in der Hilfsfigur der Strahl $(\mathfrak{S})(d_1)$ nach dieser Richtung gezogen, so kann man aus dem sich ergebenden Punkte (d_1) die Kreistangenten führen und ihre in $(m)(n)$ liegenden Schnittpunkte markiren. Zieht man dann in der Hauptfigur durch den in mn und t_1 liegenden Schnittpunkt e_1 den Strahl $e_1 t_x$, so ergibt sich in (e_1) die Umlegung von e_1, wobei x die Drehungsachse ist. Die Punktreihe $(m)(n)$ der Hilfsfigur soll nun auf einander folgend nach den Richtungen $(e_1)e_1$, $e_1 a_1$ und $a_1 a$ auf die Geraden projicirt werden, welche sämmtlich durch den Punkt S' räumlich parallel zu den durch A gehenden Geraden mn, M_1' und M' der Hauptfigur zu führen wären. Statt dessen kann man aber in der Hilfsfigur die resultirende Punktreihe $M'\mu$ auch direct aus der zur Bildebene parallelen Punktreihe $(m)(n)$ durch Parallelprojection nach der Richtung $e_1 a$ [Hauptfigur] erhalten; der Fluchtpunkt φ_1 dieser Projectionsrichtung muss in der Fluchtlinie $\mu\varphi_1$ der durch die Geraden $(m)(n)$ und M' gehenden Ebene liegen. Diese Fluchtlinie hat man durch den Fluchtpunkt μ einfürallemal parallel zu $(m)(n)$ zu führen, worauf man mittelst der Fluchtlinie $\mu\alpha$ der gegebenen Seitenlinie M an dieselbe die zu den Strahlen des Büschels SM' parallelen Tangenten führen kann, indem man diesen Büschel durch die Gerade $\mu\alpha$ schneidet und aus den Schnittpunkten die Tan-

genten an M zieht. Die Berührungspunkte derselben werden schliesslich in der Richtung $aa_1\varrho$ auf die Seitenlinie M_1 mit Benutzung der Collineationsachse AB projicirt [(1)$\alpha\beta$, βa_1 1 ...].

Zieht man aus dem Fluchtpunkte r eine Tangente t_4 an P, so gibt deren Berührungspunkt a_4 die Seitenlinie M_4 an, in welcher ein Lichtpol liegt. Um die Isophotenpunkte derselben zu erhalten, schneide man analog dem Vorgange des §. 2. den Büschel S_0k_0 durch die Gerade (l'), projicire die sich ergebenden Punkte aus t_π auf den Träger l' und von hier in der Richtung $e_4 a \psi_4$ auf die Gerade M'. Die Strahlen des Büschels SM' liefern dann in bekannter Weise die Isophotenpunkte. Die beiden auf einander folgenden Projectionen der Punktreihe (l') durch eine einzige zu ersetzen, ist hier nicht zweckmässig, weil man die dazu erforderlichen Hilfslinien nur bei dieser einen Seitenlinie anwenden könnte.

Wird aus dem Fluchtpunkte α an die gegebene Seitenlinie eine Tangente αk gezogen, so muss durch den Berührungspunkt k diejenige Formlinie gehen, in welcher die gegebene Fläche von einem zur Scheitelgeraden parallelen Cylinder berührt wird; wir wollen die Isophotenpunkte derselben bestimmen. Die aus dem Punkte S' und dem Kreisbüschel sich ergebende Punktreihe (D_1) gibt mit dem Scheitel $(\mathfrak{S})$ die umgelegten Richtungen derjenigen Tangenten, welche nach den Vorgängen der früheren Paragraphen an P zu führen sind. Zieht man somit zu den Strahlen des Büschels $(\mathfrak{S})(D_1)$ durch t_π parallele Gerade, so schneiden dieselben die Fluchtlinie $\mu\nu$ in den Fluchtpunkten 5, 6, 6, 5 ... der genannten Tangenten, aus welchen diese zu ziehen sind. Die sich dadurch ergebenden Berührungspunkte [5], [6], [6] ... werden schliesslich aus dem durch den Projectionsstrahl ka bestimmten Projectionscentrum s in die oben erwähnte Formlinie mit Benutzung der Collineationsachse $\mu\nu$ projicirt [a[5]ψ_5, $\psi_5 k$ 5 ...].

Wir wollen noch anführen, wie man Punkte und Tangenten der Flächencontour am einfachsten erhält. Um diejenigen Contourpunkte zu bekommen, welche mit dem Punkte p der gegebenen Seitenlinie in derselben Formlinie liegen, denken wir uns einen die gegebene Fläche nach dieser Linie berührenden Kegel mit dem Scheitel σ. Zur Construction der durch σ gehenden Tangenten dieser Formlinie wenden wir die Collineation derselben zur Linie P an, wobei $\mu\nu$ die Collineationsachse und s_1 das Collineationscentrum ist; dann ergibt sich der zu σ collineare Punkt [σ] durch die collinearen Geraden $p\sigma\gamma$ und $a\gamma$[σ]. Aus [σ] werden nun an P die Tangenten [σ][I]ε und [σ][II]δ geführt, dann die ihnen collinear entsprechenden $\sigma\varepsilon$ und $\sigma\delta$ gezogen und schliesslich die Berührungspunkte [I] und [II] aus s_1 nach I und II projicirt.

Die in der perspectivischen Contour der Fläche liegenden Isophotenpunkte kann man durch Construction der Isophoten des durch diese in der Bildebene liegende Linie und das Auge bestimmten Kegels bei Anwendung zweier Projectionsebenen erhalten; doch ist die Ausführung derselben zu umständlich. Um die Isophoten genau zeichnen zu können, wird man lieber von jeder derselben einen der Contour nahe liegenden Punkt des verdeckten Flächenteiles berücksichtigen.

Der Schlagschatten, welchen die dargestellte Fläche auf die Grundebene P wirft, wird auf die im Paragraph 2 angegebene Art construirt.

§. 4.

Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, welche aus zwei auf einander normal stehenden Parallelsystemen congruenter ebener Curven bestehen.

Wenn bei den Flächen, welche Gegenstand dieser Abhandlung sind, die Scheitelgerade sich in unendlicher Entfernung befindet, so müssen, wie sich leicht beweisen lässt, alle Seitenlinien Q congruent und parallel sein, und die Formlinien P fallen ebenfalls congruent aus.

In diesem Falle lassen sich die Isophotenpunkte desjenigen Curvensystemes leichter darstellen, welches zu einer Projectionsebene parallel ist [Fig. 4.], wobei es zweckmässig ist, in der auf mehrerwähnte Art hergestellten Nebenfigur 4a den Schnitt g der zur Lichtstrahlenrichtung normalen Ebene mno mit einer durch S parallel zum zweiten Curvensysteme Q der gegebenen Fläche gelegten Ebene zu bestimmen. Die in der durch S gehenden Horizontalebene liegenden Tracen D und Sp [$S'p' \parallel Q'$, $S''p'' \parallel x$] der beiden genannten Ebenen schneiden sich in einem Punkte p [p', $p'p''$ senkr. x], so dass g' und g'' die Projectionen der gesuchten Schnittgeraden sind; ihre um mn umgelegte Lage g_1 ergibt sich durch Führung der zu l' parallelen Geraden $p'p_1$.

Wird in der Hauptfigur an die gegebene Curve Q eine Tangente t_1 geführt, und will man die Isophotenpunkte der durch den sich ergebenden Berührungspunkt a_1 gehenden Horizontalcurve construiren, so führe man in der Hilfsfigur durch S eine zu t_1 parallele Gerade. Diese trifft die horizontale Projectionsebene und die Ebene mno respective in den Punkten k_1 und d. Bestimmt man nun durch Führung der zu $p''p_1$ parallelen Geraden $d''d_1$ die umgelegte Lage d_1, so kann aus diesem Punkte die Punktreihe mn hergestellt werden. Weil der Büschel $h_1'\overline{mn}$ die Horizontaltracen derjenigen zu t_1 pa-

rallelen Ebenen angibt, welchen die Beleuchtungsstärken 0, 0·1, 0·2... entsprechen, sind zu den Strahlen desselben an P parallele Tangenten zu ziehen.

Da wir als Curve P eine Parabel mit dem Brennpunkte F und der Directrix r angenommen haben, bekommt man die betreffenden Berührungspunkte am einfachsten, wenn man zu den Strahlen des letztgenannten Büschels aus F Normale zieht und aus den sich dadurch in r ergebenden Schnittpunkten Parallele zur Parabelachse führt. Um die auf P' construirten Punkte in die durch a_1 gehende Horizontalcurve der gegebenen Fläche zu projiciren, tragen wir auf jedem der zur Parabelachse parallelen Strahlen das Stück $a'a_1'$ auf und projiciren die erhaltenen Grundriss-Isophotenpunkte schliesslich in den Aufriss. Weil in der Hauptfigur der Punkt d_1 in dem Kreise 9 angenommen wurde, ergibt sich auch eine Isophotentangente t_9.

Um die Lichtpole der gegebenen Fläche zu erhalten, ziehe man an Q'' eine zu g'' parallele Tangente t_4'', durch deren Berührungspunkt dann diejenige Horizontalcurve P_4 geführt wird, in welcher die Lichtpole liegen; in der Hilfsfigur ergibt sich durch t_4 der horizontale Durchstosspunkt h_4 und der in g_1 liegende unendlich ferne Punkt d_4, so dass die Tangenten des Kreisbüschels parallel zu g_1 werden.

Die in der Horizontalcontour liegenden Isophotenpunkte werden auf die im §. 1. angegebene Art bestimmt. Es ist auch wichtig, in den beiden das darzustellende Flächenstück begrenzenden Horizontalcurven die Isophotenpunkte darzustellen.

Behufs der Construction der in der Verticalcontour liegenden Isophotenpunkte führen wir in der Hilfsfigur $\mathfrak{S}d_2$ normal zu x, verschaffen uns dann aus d_2 die Punktreihe mn und projiciren diese normal auf die Achse x; der Büschel $S''x$ gibt dann die Richtungen der durch die Isophotenpunkte gehenden Contourtangenten an. Weil die Contour zur Curve Q'' congruent und parallel ist, kann man die betreffenden Berührungspunkte auch in Q'' markiren; durch diese Punkte werden dann Gerade parallel zu x geführt, auf welchen man schliesslich die Strecke $a''a_2''$ aufzutragen hat.

Um die Isophotenpunkte der beiden Grenzschnitte Q und Q_5 zu construiren, machen wir bei der Parabel P die Subtangente des Punktes a' doppelt so gross, als die Abscisse, so dass dann $\alpha a'$ und $\alpha a_5'$ die diesen Curven entsprechenden Tangenten sind. Wird zu t_5' in der Hilfsfigur eine Parallele geführt, so ergibt sich der Punkt d_5, aus welchem die Tangenten an den Kreisbüschel zu zeichnen sind. Ihre in mn sich ergebenden Schnittpunkte sollten hierauf in der Richtung t_5' auf die Trace g' und von hier in der zu x normalen

Richtung auf den Träger x projicirt werden; statt dessen kann man die resultirende Projectionsrichtung e_3x in der Hauptfigur bestimmen, wenn man durch den Endpunkt von Q' die Geraden mn und x parallel zu den gleichnamigen der Hilfsfigur führt. Der sich dann in dieser Figur ergebende Büschel $S''x$ gibt die Richtungen der an Q'' zu führenden Tangenten. Bezüglich des Grenzschnittes Q_5 erhält man die resultirende Projectionsrichtung durch Führung der zur Parabeltangente $\alpha a_5'$ parallelen Geraden $a'e_5$ in e_5x.

Die Durchführung der Constructionen dieses Paragraphen bei axonometrischer oder bei perspectivischer Darstellung kann keine weiteren Schwierigkeiten bereiten.

XIV.

Bedingung einer Canalfläche nebst einigen Bemerkungen an Canalflächen.

Von

R. Hoppe.

Eine Canalfläche wird von einer Linie erzeugt, die bei ihrer Variation mit einem Parameter sich parallel bleibt. Durch diese Entstehung ist zunächst die Canalfläche definirt.

Ferner ist dadurch ihr einfachster analytischer Ausdruck gegeben. Denn derselbe geht aus den Gleichungen einer Parallele mit einer beliebigen Linie (Leitlinie) hervor, indem man die darin enthaltenen 2 specifischen Constanten in beliebiger Abhängigkeit von einander oder von einem Parameter variiren lässt.

Die gemeinsame Normalebene aller Parallelen schneidet die Canalfläche in einer Linie, die zugleich Krümmungslinie und, weil sie in allen ihren Punkten den Normalschnitt darstellt, auch Kürzeste ist. Die andre von jedem Punkte ausgehende Krümmungslinie ist die erzeugende Parallele, die zugleich geodätische Parallele und Parallele im Raume ist. Nimmt man also den normalen Querschnitt und die erzeugende Parallele zu Parameterlinien, so sind die Parameter zugleich die der Krümmungslinien und orthogonal geodätische.

Ist der Querschnitt der Canalfläche gerade, so ist die Fläche abwickelbar, und umgekehrt ist jede Abwickelbare ein Specialfall einer Canalfläche. Nun ist die analytische Bedingung, unter welcher eine beliebig gegebene Fläche abwickelbar ist, bekannt und sehr ein-

fach. Dies bietet Anlass die analoge Bedingung für die allgemeinere Eigenschaft zu suchen, für die nämlich, dass eine beliebig gegebene Fläche Canalfläche sei.

Bezüglich auf Flächen wende ich folgende Bezeichnungen an. Für die beliebigen Parameter u, v ist das Linienelement ∂s ausgedrückt durch

$$\partial s^2 = e\,\partial u^2 + 2f\,\partial u\,\partial v + g\,\partial v^2$$

und t ist der Coefficient des Flächenelements

$$t\,\partial u\,\partial v = \sqrt{eg - f^2}\,\partial u\,\partial v$$

ferner sind p, q, r die Richtungscosinus der Normale, und

$$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \ldots;\quad F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \ldots;\quad G = p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots$$

Bezüglich auf Curven sind f, g, h; f', g', h'; l, m, n die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale und Binormale, $\partial\tau$ und $\partial\vartheta$ die Contingenzwinkel der Tangente und Krümmungsaxe, und bezeichnet der Accent die Differentiation nach τ.

§. 1. Bedingung einer Canalfläche für Parameter der Krümmungslinien.

Sind u, v die Parameter der Krümmungslinien, und s_1 die Krümmungslinie $v =$ const, so ist

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial x}{\partial u};\quad \text{etc.}$$

Dies längs s_1 differentiirt gibt *):

$$f_1'\partial\tau_1 = -\frac{1}{2el}\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{2g}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + Ep\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(Ep - \frac{1}{2g}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

Ist s_1 zugleich Kürzeste, so ist bekanntlich

$$f_1' = p;\quad \frac{\partial e}{\partial v} = 0$$

und es folgt nur weiter, dass

$$\partial\tau_1 = \frac{E}{\sqrt{e}} \tag{1}$$

*) Hoppe, Flächentheorie II. Gl. (5).

ist. Differentiirt man die Gleichung $f_1' = p$ längs s_1 *), so kommt:

$$l_1 \partial\vartheta_1 - f_1 \partial\tau = -\frac{E}{e}\frac{\partial x}{\partial u}\partial u$$

Nach Multiplication mit $\frac{dx}{\partial v}$ gibt die Summe der Analogen:

$$\left(l_1 \frac{\partial x}{\partial v} + m_1 \frac{\partial y}{\partial v} + n_1 \frac{\partial z}{\partial v}\right)\partial\vartheta_1 = 0$$

und zwar ist die Grösse

$$l_1 \frac{\partial x}{\partial v} + \ldots = \begin{vmatrix} f_1 f_1' & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{e}}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & p & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{t}{\sqrt{e}} = -\sqrt{g}$$

nicht null, daher $\partial\vartheta_1 = 0$, das heisst s_1 eben. Hiermit ist der Satz bewiesen:

Eine Krümmungslinie, die zugleich Kürzeste ist, ist eben.

Die zweite Schar Krümmungslinien, $u =$ const, ist dann geodätisch parallel. Da sie aber die Ebene von s_1 zur gemeinsamen Normalebene hat, so ist sie auch im Raume parallel; folglich ist die Fläche eine Canalfläche.

Notwendige und ausreichende Bedingung einer Canalfläche ist also, dass ihre Krümmungslinien orthogonal geodätisch sind, unter gegenwärtiger Voraussetzung über die Parameter ausgedrückt durch

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0$$

Die Anwendung dieses Kriteriums setzt die Kenntniss der Krümmungslinien der gegebenen Fläche voraus, da e den Multiplicator der Differentialgleichung der Krümmungslinien zum Factor hat, wenn man von beliebigen Parametern ausgeht. Zur Herleitung der gesuchten Bedingung ohne Hülfe der Krümmungslinien bieten sich zwei Wege dar. Die Form der Resultate ist verschieden. Beide sind nicht einfach.

---

*) Ebenda Gl. (19).

§. 2. Erste Methode.

Die Variationsverhältnisse der ersten und zweiten Hauptkrümmungsrichtung $\frac{\partial v}{\partial u} = k_1$ und k_2 sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$e + (k_1 + k_2)f + k_1 k_2 g = 0 \tag{2}$$

$$E + (k_1 + k_2)F + k_1 k_2 G = 0 \tag{3}$$

woraus nach Differentiation längs der Fläche in beliebiger Richtung und Elimination von ∂k_1:

$$\begin{vmatrix} \partial E + (k_1 + k_2)\partial F + k_1 k_2 \partial G & F + k_2 G \\ \partial e + (k_1 + k_2)\partial f + k_1 k_2 \partial g & f + k_2 g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} (k_1 - k_2)\partial k_2 \tag{4}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$R = \sqrt{e + 2k_2 f + k_2^2 g}$$

so sind die Grössen

$$A = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} + k_2 \frac{\partial x}{\partial v}}{R}; \quad \text{etc.}$$

Richtungscosinus der zweiten Hauptkrümmungsrichtung, also auch der ersten Hauptnormalebene. Bleibt deren Stellung in erster Hauptkrümmungsrichtung unverändert, mithin A etc. constant, so ist die genannte Ebene gemeinsame Normalebene der zweiten Schar Krümmungslinien für alle Punkte der ersten und schneidet die Fläche in ihrer ersten Krümmungslinie; diese ist eben, und der Schnitt Kürzeste, folglich die Fläche Canalfläche. Ausreichende Bedingungen der Canalfläche sind daher die 3 analogen Gleichungen:

$$\frac{\partial A}{du} + k_1 \frac{\partial A}{\partial v} = 0; \quad \text{etc.}$$

Es bleibt die Aufgabe, sie auf eine, vom Coordinatensystem unabhängige Gleichung zurückzuführen. Zunächst kann man sie durch ein neues System dreier Gleichungen vertreten, das man erhält, indem man nach Ausführung der Differentiation und Multiplication mit $2R\frac{\partial x}{\partial u}$. $2R\frac{\partial x}{\partial v}$, Rp die Analogen addirt. Die Summen ergeben bzhw.:

$$\frac{\partial e}{\partial u} + (k_1 + k_2)\frac{\partial e}{\partial v} + k_1 k_2 \left(2\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u}\right) + 2\left(\frac{\partial k_2}{\partial u} + k_1 \frac{\partial k_2}{\partial v}\right) f =$$

$$2\frac{e + k_2 f}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial u} + k_1 \frac{\partial R}{\partial v}\right) \tag{5}$$

$$\left(2\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial e}{\partial v}\right)+(k_1+k_2)\frac{\partial g}{\partial u}+k_1k_2\frac{\partial g}{\partial v}+2\left(\frac{\partial k_2}{\partial u}+k_1\frac{\partial k_2}{\partial v}\right)g =$$
$$2\frac{f+k_2g}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial u}+k_1\frac{\partial R}{\partial v}\right) \tag{6}$$

$$E+(k_1+k_2)F+k_1k_2G=0$$

Die letzte Gleichung ist nach (3) von selbst erfüllt. Multiplicirt man Gl. (6) mit k_1 und addirt sie zu Gl. (5), so kommt mit Berücksichtigung von Gl. (2):

$$\left(\frac{\partial e}{\partial u}+2k_1\frac{\partial f}{\partial u}+k_1^2\frac{\partial g}{\partial u}\right)+k_2\left(\frac{\partial e}{\partial v}+2k_1\frac{\partial f}{\partial v}+k_1^2\frac{\partial g}{\partial v}\right)$$
$$+2\left(\frac{\partial k_2}{\partial u}+k_1\frac{\partial k_2}{\partial v}\right)(f+k_1g)=0 \tag{7}$$

Es soll nun bewiesen werden, dass Gl. (6) schon allein identisch ist mit Gl. (7), mithin auch mit Gl. (5).

Man kann nämlich Gl. (6) nach Multiplication mit k_1-k_2 auch schreiben:

$$K_1-K_2+k_2L_1-k_1L_2=2(k_1-k_2)\{S(f+k_2g)-Mg\} \tag{8}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$K_1=\frac{\partial e}{\partial u}+2k_1\frac{\partial f}{\partial u}+k_1^2\frac{\partial g}{\partial u};\quad K_2=\frac{\partial e}{\partial u}+2k_2\frac{\partial f}{\partial u}+k_2^2\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$L_1=\frac{\partial e}{\partial v}+2k_1\frac{\partial f}{\partial v}+k_1^2\frac{\partial g}{\partial v};\quad L_2=\frac{\partial e}{\partial v}+2k_2\frac{\partial f}{\partial v}+k_2^2\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$M=\frac{\partial k_2}{\partial u}+k_1\frac{\partial k_2}{\partial v};\qquad S=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial u}+k_1\frac{\partial R}{\partial v}\right)$$

und zwar findet man nach Ausführung der Differentiation:

$$S=\frac{1}{R^2}\{K_2+k_1L_2+2M(f+k_2g)\}$$

so dass Gl. (8) übergeht in

$$K_1+k_2L_1=\frac{R^2+(k_1-k_2)(f+k_2g)}{R^2}(K_2+k_1L_2)$$
$$+2\frac{k_1-k_2}{R^2}[(f+k_2g)^2-R^2g]M$$

Nun ist

$$R^2+(k_1-k_2)(f+k_2g)=e+(k_1+k_2)f+k_1k_2g=0 \tag{9}$$

$$(f+k_2g)^2-R^2g=f^2-eg=-t^2$$

daher bleibt nur:

$$K_1+k_2L_1=-2\frac{k_1-k_2}{R^2}t^2M$$

Aus Gl. (9) erhält man:

$$-\frac{k_1-k_2}{R^2}=\frac{1}{f+k_2g}=\frac{f+k_1g}{(f+k_1g)(f+k_2g)}=-\frac{f+k_1g}{t^2}$$

daher wird die Gleichung:

$$K_1+k_2L_1+2(f+k_1g)M=0$$

übereinstimmend mit Gl. (7), und diese ist die gesuchte einzige Bedingung der Canalfläche. Alle darin vorkommenden Grössen werden auf bekannte Weise aus den gegebenen Flächengleichungen gefunden, und zwar M nach Gl. (4).

§. 3. Zweite Methode.

Die Eigenschaft einer Canalfläche ist dadurch vollständig bedingt, dass sie eine abwickelbare Mittelpunktsfläche hat. Bezeichnet man die auf die erste Mittelpunktsfläche bezüglichen Grössen mit dem Index 1, so lautet die Bedingung:

$$E_1G_1-F_1^2=0$$

Der zugehörige Hauptkrümmungsradius der Urfläche sei ϱ_1. Die 4 Coefficienten in den Formeln

$$\frac{\partial p}{\partial u}=H\frac{\partial x}{\partial u}+H_1\frac{\partial x}{\partial v};\quad \frac{\partial p}{\partial v}=J\frac{\partial x}{\partial u}+J_1\frac{\partial x}{\partial v} \tag{10}$$

wollen wir durch folgende Abkürzungen ersetzen:

$$\alpha=1+\varrho_1H;\quad \beta=\varrho_1H_1;\quad \gamma=\varrho_1J;\quad \delta=1+\varrho_1J_1$$

dann lautet die quadratische Gleichung, welche ϱ_1 als Hauptkrümmungsradius bestimmt:

$$\alpha\delta=\beta\gamma$$

so dass wir setzen können:

$$\gamma=\sigma\alpha;\quad \delta=\sigma\beta$$

Fernere Abkürzungen seien:

$$\varepsilon=\frac{\partial\varrho_1}{\varrho_1\partial u};\quad \zeta=\frac{\partial\varrho_1}{\varrho_1\partial v}$$

$$2\eta = \begin{vmatrix} \frac{\partial e}{\partial u} & e \\ 2\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial e}{\partial v} & f \end{vmatrix}; \quad 2\vartheta = \begin{vmatrix} \frac{\partial e}{\partial u} & f \\ 2\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial e}{\partial v} & g \end{vmatrix}$$

$$2\varkappa = \begin{vmatrix} \frac{\partial e}{\partial v} & e \\ \frac{\partial g}{\partial u} & f \end{vmatrix}; \quad 2\lambda = \begin{vmatrix} \frac{\partial e}{\partial v} & f \\ \frac{\partial g}{\partial u} & g \end{vmatrix}$$

$$2\mu = \begin{vmatrix} 2\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} & e \\ 2\frac{\partial g}{\partial v} & f \end{vmatrix}; \quad 2\nu = \begin{vmatrix} 2\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} & e \\ \frac{\partial g}{\partial v} & f \end{vmatrix}$$

Die Gleichungeu der ersten Mittelpunktsfläche

$$x_1 = x + \varrho_1 p; \quad \text{etc.}$$

geben differentiirt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \alpha\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\frac{\partial x}{\partial v} + \varepsilon\varrho_1 p \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= \sigma\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \zeta\varrho_1 p \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

woraus:

$$p_1 t_1 = \begin{vmatrix} \alpha\frac{\partial y}{\partial u} + \beta\frac{\partial y}{\partial v} + \varepsilon\varrho_1 q & \sigma\left(\alpha\frac{\partial y}{\partial u} + \beta\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \zeta\varrho_1 q \\ \alpha\frac{\partial z}{\partial u} + \beta\frac{\partial z}{\partial v} + \varepsilon\varrho_1 r & \sigma\left(\alpha\frac{\partial z}{\partial v} + \beta\frac{\partial z}{\partial v}\right) + \zeta\varrho_1 r \end{vmatrix}$$

das ist

$$p_1 t_1 t = (\zeta - \varepsilon\sigma)\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \alpha e + \beta f \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \alpha f + \beta g \end{vmatrix}; \quad \text{etc.} \quad (12)$$

Differentiirt man die Gl. (11) aufs neue mit Anwendung der, den Gl. (10) gleichbedeutenden Formeln

$$\varrho_1\frac{\partial p}{\partial u} = (\alpha - 1)\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\frac{\partial x}{\partial v}; \quad \varrho_1\frac{\partial p}{\partial v} = \sigma\alpha\frac{\partial x}{\partial u} + (\sigma\beta - 1)\frac{\partial x}{\partial v}$$

multiplicirt mit Gl. (12) und addirt die Analogen, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{E_1 t_1 t}{\zeta - \varepsilon\sigma} &= \alpha^2\eta + \alpha\beta(\vartheta + \varkappa) + \beta^2\lambda + \left(\frac{\beta\partial\alpha - \alpha\partial\beta}{\partial u} - \varepsilon\beta\right) t^2 \\
\frac{F_1 t_1 t}{\zeta - \varepsilon\sigma} &= \alpha^2\varkappa + \alpha\beta(\lambda + \mu) + \beta^2\nu + \left(\frac{\beta\partial\alpha - \alpha\partial\beta}{\partial v} + \varepsilon\alpha\right) t^2 \\
&= \sigma[\alpha^2\eta + \alpha\beta(\vartheta + \varkappa) + \beta^2\lambda] + \left(\sigma\frac{\beta\partial\alpha - \alpha\partial\beta}{\partial u} - \zeta\beta\right) t^2 \\
\frac{G_1 t_1 t}{\zeta - \varepsilon\sigma} &= \sigma[\alpha^2\varkappa + \alpha\beta(\lambda + \mu) + \beta^2\nu] + \left(\sigma\frac{\beta\partial\alpha - \alpha\partial\beta}{\partial v} + \zeta\alpha\right) t^2
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Bezeichnen ϱ_{11}, ϱ_{12} die Hauptkrümmungsradien der ersten Mittelpunktsfläche, so ist

$$\frac{1}{\varrho_{11}\,\varrho_{12}} = \frac{E_1 G_1 - F_1^2}{t_1^2}$$

und nach Einsetzung der Werte, und zwar mit Benutzung der 2 Ausdrücke für F_1 findet man:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varrho_{11}\,\varrho_{12}} = \frac{(\zeta - \varepsilon\sigma)^2}{t_1^3 t} \Big\{ & \alpha^3\eta + \alpha^2\beta(\vartheta + 2\varkappa) + \alpha\beta^2(2\lambda + \mu) + \beta^3\nu \\
& + \left(\alpha\frac{\beta\partial\alpha - \alpha\partial\beta}{\partial u} + \beta\frac{\beta\partial\alpha - \alpha\partial\beta}{\partial v}\right) t^2 \Big\}
\end{aligned} \tag{14}$$

Daher ist die gesuchte Bedingung der Canalfläche:

$$\begin{aligned}
& \alpha^3\eta + \alpha^2\beta(\vartheta + 2\varkappa) + \alpha\beta^2(2\lambda + \mu) + \beta^3\nu \\
& \quad + \left(\alpha\frac{\beta\partial\alpha - \alpha\partial\beta}{\partial u} + \beta\frac{\beta\partial\alpha - \alpha\partial\beta}{\partial v}\right) t^2 = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

§. 4. Allgemeine Gleichung der Canalfläche und Ausdruck ihrer Hauptkrümmungen.

Die Gleichungen einer Parallelen s mit der Leitlinie s_0 sind:

$$x = x_0 + C[f_0' \cos(\vartheta_0 + c) - l_0 \sin(\vartheta_0 + c)]; \quad \text{etc.}$$

und zwar bedeuten C, c die Polarcoordinaten des Punktes der Normalebene von s_0, durch welchen s geht, in dieser Ebene. Der Anfang der c liegt in einer beliebig zu wählenden Parallele im Abstande C von s_0. Führen wir dafür die ebenen rechtwinkligen Coordinaten

$$\xi = C\cos c, \quad \eta = C\sin c$$

ein und setzen zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} F &= f_0' \cos\vartheta_0 - l_0 \sin\vartheta_0 \\ L &= f_0' \sin\vartheta_0 + l_0 \cos\vartheta_0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

so wird

$$x = x_0 + \xi F - \eta L; \quad \text{etc.} \tag{17}$$

Beschreibt nun unabhängig von s_0 der Punkt $(\xi\eta)$ in seiner Ebene die Linie σ, so erzeugt die Parallele (17) eine Canalfläche, und die Gl. (17) sind der allgemeine Ausdruck einer solchen in den Parametern $\sigma = u$ und $s_0 = v$.

Die Differentiation der Werte (16) nach τ_0 ergibt:

$$F' = -f_0 \cos\vartheta_0; \quad L' = -f_0 \sin\vartheta_0 \tag{18}$$

und die Constante im Krümmungswinkel τ von σ sei bestimmt durch

$$\cos\tau = \frac{\partial\xi}{\partial\sigma}; \quad \sin\tau = \frac{\partial\eta}{\partial\sigma}$$

Setzt man überdies zur Abkürzung

$$R = s_0' - \xi\cos\vartheta_0 + \eta\sin\vartheta_0 \tag{19}$$

so erhält man aus Gl. (17) die partiellen Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= F\cos\tau - L\sin\tau = f_0' \cos(\vartheta_0 + \tau) - l_0 \sin(\vartheta_0 + \tau) \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= f_0 \frac{R}{s_0'} \end{aligned} \tag{20}$$

woraus:

$$e = 1; \quad f = 0; \quad g = t^2; \quad t = \frac{R}{s_0'}, \tag{21}$$

$$p = -F\sin\tau - L\cos\tau = -f_0' \sin(\vartheta_0 + \tau) - l_0 \cos(\vartheta_0 + \tau)$$

und nach neuer Differentiation:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= -\frac{f_0' \sin(\vartheta_0 + \tau) + l_0 \cos(\vartheta_0 + \tau)}{\sigma'} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= -f_0 \frac{\cos(\vartheta_0 + \tau)}{s_0'} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= f_0' \frac{R}{s_0'^2} + f_0 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R}{s_0'}\right) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

also aus der Definitionsgleichung berechnet:

$$E = \frac{1}{\sigma'}; \quad F = 0; \quad G = -\frac{R\sin(\vartheta_0 + \tau)}{s_0'^2} \tag{23}$$

Die Werte von e, f, F zeigen, wie schon bekannt war, dass die Parameter orthogonal geodätisch sind und den Krümmungslinien entsprechen. Wegen letzterer Eigenschaft sind nun die Hauptkrümmungsradien

$$\varrho_1 = \frac{e}{E} = \sigma'; \quad \varrho_2 = \frac{g}{G} = -\frac{R}{\sin(\vartheta_0 + \tau)} \tag{24}$$

Die vorstehenden Formeln sind sowol für allgemeinen Gebrauch bei Untersuchung von Canalflächen, als auch für die folgenden speciellen Bemerkungen entwickelt worden.

§. 5. Bemerkung an der zweiten Mittelpunktsfläche der Canalfläche.

Die erste Mittelpunktsfläche

$$x_1 = x + \sigma' p$$

bietet keine Frage zur Untersuchung dar, weil sie sich unmittelbar als die von der Evolute des Querschnitts σ erzeugte Canalfläche mit gemeinsamer Leitlinie s_0 darstellt.

Die Gleichung der zweiten Mittelpunktsfläche ist:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x + \varrho_2 p = x_0 + \xi F - \eta L + R \frac{F \sin\tau + L\cos\tau}{\sin(\vartheta_0 + \tau)} \\
&= x_0 + \xi \left[F - \cos\vartheta_0 \frac{F\sin\tau + L\cos\tau}{\sin(\vartheta_0 + \tau)} \right] - \eta \left[L - \sin\vartheta_0 \frac{F\sin\tau + L\cos\tau}{\sin(\vartheta_0 + \tau)} \right] \\
&\quad + s_0' \frac{F\sin\tau + L\cos\tau}{\sin(\vartheta + \tau_0)} \\
&= x_0 + (\xi\cos\tau + \eta\sin\tau) \frac{F\sin\vartheta_0 - L\cos\vartheta_0}{\sin(\vartheta_0 + \tau)} + s_0' \frac{F\sin\tau + L\cos\tau}{\sin(\vartheta_0 + \tau)} \\
&= x_0 - \frac{\xi\cos\tau + \eta\sin\tau}{\sin(\vartheta_0 + \tau)} l_0 + s_0' [f_0' + l_0 \cot(\vartheta_0 + \tau)]
\end{aligned}$$

hat also die Form:

$$x_2 = x_0 + s_0' f_0' + U l_0 \tag{25}$$

wo

$$U = \frac{s_0' \cos(\vartheta_0 + \tau) - \xi\cos\tau - \eta\sin\tau}{\sin(\vartheta_0 + \tau)} \tag{26}$$

gesetzt ist. Hiernach stellt $(x_2 y_2 z_2)$ einen Punkt auf der Krümmungsaxe dar, der wenn U mit σ variirt, die Krümmungsaxe durchläuft,

die ihrerseits bei variirendem s_0 die abwickelbare Mittelpunktsfläche erzeugt. Es hat sich der Satz ergeben, den ich noch nicht ausgesprochen gefunden habe:

Die der parallelen Schar Krümmungslinien entsprechende Mittelpunktsfläche der Canalfläche ist der Ort der gemeinsamen Krümmungsaxe jener Parallelen, mithin die Einhüllende der Krümmungsaxen ihre Gratlinie.

Der Ausdruck (26) von U, der den Abstand des Punktes $(x_2y_2z_2)$ von der Schmiegungsebene der Leitlinie darstellt, kann weitere Verwendung finden, wenn es sich um die entsprechenden Punkte auf beiden Flächen handelt. Er ist noch abhängig von der willkürlichen Leitlinie; dagegen ist die Grösse

$$U - \frac{\partial s_0'}{\partial \vartheta_0} \tag{27}$$

welche die Strecke vom Coincidenzpunkt der Krümmungsaxe bis zum Punkte $(x_2y_2z_2)$ ausdrückt, davon unabhängig. Geht man also von der Gratlinie aus, so bezeichnet (27) das Stück, welches die der Urfläche entsprechende Kürzeste auf der Abwickelbaren von der Tangente abschneidet.

§. 6. Bemerkung über asymptotische Linien der Canalfläche in einem Specialfalle.

Die Differentialgleichung der asymptotischen Linien

$$E\partial u^2 + 2F\partial u\,\partial v + G\partial v^2 = 0$$

wird nach (23) auf der Canalfläche:

$$\frac{\partial u^2}{\sigma'} = \frac{R\sin(\vartheta_0+\tau)}{s_0'^2}\partial v^2$$

Ist die Leitlinie ein Kreis vom Radius c, so kann man das constante ϑ_0 null setzen und erhält:

$$\frac{\partial u^2}{\sigma'} = \frac{c-\xi}{c^2}\sin\tau\,\partial v^2$$

Sei auch der Querschnitt ein Kreis vom Radius a. Dann hat man:

$$\xi = a\sin\tau;\quad \sigma = a\tau$$

$$\partial u^2 = a^2 \partial \tau^2 = \frac{a^2(\partial \sin \tau)^2}{1 - \sin^2 \tau} = \frac{a^2 \partial \xi^2}{a^2 - \xi^2}$$

und die Gleichung wird:

$$\partial v = \pm \frac{ac\partial \xi}{\sqrt{\xi(c - \xi)(a^2 - \xi^2)}} \tag{28}$$

Da elliptische Functionen erster Gattung in der Geometrie nur selten vorkommen, so verdient wol der vorliegende Fall derart notirt zu werden.

XV.

Perspectivische Dreiecke die einem Kegelschnitt einbeschrieben sind.

Von

L. Klug.

In dem 70ten Teile dieses Archiv's p. 446 haben wir gezeigt, wie man Punktreihen construirt, die mit zwei oder drei projectivischen Punktreihen involutorisch liegen. Von diesen Constructionen ausgehend sind wir im Stande Dreiecke zu finden, welche mit zwei oder drei, einem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreiecken zugleich perspectivisch liegen und dem Kegelschnitt einbeschrieben sind.

1.

Es seien $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ zwei demselben Kegelschnitt einbeschriebene Dreiecke, wir wollen ein mit den gegebenen perspectivisches Dreieck construiren, welches dem Kegelschnitt einbeschrieben ist.

Zu dem Ende construiren wir eine Punktreihe, welche mit den, durch $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ Punkte bestimmten projectivischen Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ zugleich involutorisch liegt; diejenigen Elemente dieser neuen Punktreihe, welche den $A_1 B_1 C_1$ Punkten projectivisch entsprechen, sind die Eckpunkte des gewünschten Dreiecks.

Wir wissen (70. T., p. 446), dass es unendlich viele Punktreihen gibt, die mit $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ zugleich involutorisch liegen, und dass dieselben erst dadurch vollkommen bestimmt sind, dass

wir von den zu construirenden Punktreihen ein Element annehmen, welches einem bestimmten Elemente der gegebenen Punktreihen entsprechen soll. Daraus folgt: dass wir einen Eckpunkt des gewünschten Dreiecks beliebig annehmen können auf dem Kegelschnitt.

Ist D ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts, dann sind unter den unendlich vielen Punktreihen, welche mit $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ zugleich involutorisch liegen, drei vorhanden, welche zur Bestimmung der perspectivischen Dreiecke dienen. Den Punkt D können wir nämlich als dem Punkte A_1, oder B_1, oder C_1 entsprechend betrachten und in diesen drei Fällen mit A, resp. B', C'' bezeichnen; die mit $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ involutorischen Punktreihen $ABC \ldots$, $A'B'C' \ldots$, $A''B''C'' \ldots$ bestimmen drei Dreiecke ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, welche einen gemeinsamen Eckpunkt D haben, dem Kegelschnitt einbeschrieben sind und mit den Dreiecken $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ perspectivisch liegen.

Sechs Punkte zu dreien in zwei Gruppen verteilt, bestimmen auf sechserlei Art projectivische Punktreihen. Den Punkten $A_1 B_1 C_1$ können nämlich die Punkte $A_2 B_2 C_2$, $B_2 C_2 A_2$, $C_2 A_2 B_2$, $C_2 B_2 A_2$, $B_2 A_2 C_2$, $A_2 C_2 B_2$ entsprechen, wir finden daher sechsmal unendlich viele Punktreihen, welche mit den gegebenen involutorisch liegen. Dies in Betracht gezogen, können wir sagen: wenn $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ zwei demselben Kegelschnitt einbeschriebene Dreiecke sind, D ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts ist, dann kann man 3mal 6 solche Dreiecke construiren, die D zum gemeinsamen Eckpunkt haben, dem Kegelschnitt einbeschrieben sind und mit den gegebenen zwei Dreiecken perspectivisch liegen.

2.

Unter den unendlich vielen Dreiecken die mit zwei demselben Kegelschnitt einbeschriebenen Dreiecken perspectivisch sind, gibt es auch solche, welche mit einem oder anderen der gegebenen Dreiecke auf zwei- oder dreierlei Art perspectivisch liegen. Um diese zu bestimmen, müssen wir wissen, dass die Verbindungslinien p, q, r, der Doppelpunkte der projectivischen Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2$; $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $B_2 C_2 A_2 \ldots$; $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $C_2 A_1 B_2 \ldots$, welche die Pascal'schen Linien der einfachen Sechsecke $A_1 C_2 B_1$, $A_1 C_1 B_2$, $A_1 B_2 B_1$, $B_1 C_2 C_1 A_2$, $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$ sind, durch denselben U Punkt gehen, und dass sich die Verbindungslinien p', q, r' der Doppelpunkte der projectivischen Punktreihen $A_1 B_1 C_1$, $C_2 B_2 A_2 \ldots$; $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 C_2 B_2$; $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $B_2 A_2 C_2 \ldots$ als Pascal'sche Linien der einfachen Sechsecke $A_1 A_2 B_1$, $C_2 C_1 B_2$, $A_1 B_2 B_1$, $A_2 C_1 C_2 A_1 C_2 B_1$, $B_2 C_1 A_2$ in denselben U Punkte schneiden. Werden die Eckpunkte des Dreiecks

$A_1 B_1 C_1$, oder $A_2 B_2 C_2$ aus einem beliebigen Schnittpunkte von zweien der Geraden $pqr\, p'q'r'$ auf den Kegelschnitt projicirt, so sind die Projectionen die Eckpunkte von Dreiecken, welche mit den gegebenen auf zwei- oder dreierlei Art perspectivisch liegen. Projicirt man eins der gegebenen Dreiecke aus den Punkten U oder U', dann wird die Projection mit diesem auf einerlei, mit dem anderen der gegebenen Dreiecke auf dreierlei, wenn nicht aus den Schnittpunkten U, U' aber bloss auf zweierlei Art perspectivisch liegen.

Bezeichnen wir die Projection der Punkte $A_1 B_1 C_1$ vom Schnittpunkte (p, r') der Geraden p, r' auf den Kegelschnitt mit ABC, dann wird ABC Dreieck sowol mit $A_2 B_2 C_2$ als auch mit $B_2 A_2 C_2$ perspectivisch liegen, der Schnittpunkt der Projectionsstrahlen AA_2, BB_2, CC_2 befindet sich auf p, der Schnittpunkt der Projectionsstrahlen AB_2, BA_2, CC_2 befindet sich auf r', da (p, r') auf p und r' liegt. Diese zwei Schnittpunkte liegen auch auf CC_2 Geraden und sind wie aus $AB_2 A_2 B$ Viereck ersichtlich conjugirte Punkte des Kegelschnitts. — Es gibt 18 solche Dreiecke, welche mit einem der gegebenen Dreiecke auf zweierlei, mit dem anderen auf einerlei Art perspectivisch liegen, da pqr, $p'q'r'$ Geraden sich ausser in UU' noch in 9 Punkten schneiden, und die Projectionen der zwei gegebenen Dreiecke aus diesen 9 Punkten auf dem Kegelschnitt 18 Dreiecke liefern.

3.

Wenn wir die Projectionen der $A_1 B_1 C_1$ Punkte aus U auf den Kegelschnitt mit $E_2 F_2 G_2$ bezeichnen, dann ist das Dreieck $E_2 F_2 G_2$ auf dreierlei Art perspectivisch mit $A_2 B_2 C_2$; die Geraden $E_2 A_2$, $F_2 B_2$, $G_2 C_2$ treffen sich in P_2, die $E_2 C_2$, $F_2 A_2$, $G_2 B_2$ Geraden in Q_2 endlich $E_2 B_2$, $F_2 C_2$, $G_2 A_2$ Geraden in R_2, und es liegen P_2, Q_2, R_2 beziehungsweise auf den Geraden p, q, r. Sind ebenso $E_2' F_2' G_2'$ die Projectionen der $A_1 B_1 C_1$ Punkte auf U' auf dem Kegelschnitt, dann ist $E_2' F_2' G_2'$ Dreieck auf dreierlei Art perspectivisch mit $A_2 B_2 C_2$, die Geraden $E_2' C_2$, $F_2' B_2$, $G_2' A_2$ treffen sich in P_2'; $E_2' A_2$, $F_2' C_2$, $G_2' B_2$ in Q_2' endlich $E_2' B_2$, $F_2' A_2$, $G_2' C_2$ in R_2', und es liegen P_2', Q_2', R_2' beziehungsweise auf p', q', r'. Ist ferner die Projection des Dreiecks $A_2 B_2 C_2$ aus U und U' auf den Kegelschnitt $E_1 F_1 G_1$, $E_1' F_1' G_1'$, dann sind $E_1 F_1 G_1$, $E_1' F_1' G_1'$ Dreiecke mit $A_2 B_2 C_2$ auf einerlei, mit $A_1 B_1 C_1$ auf dreierlei Art perspectivisch; die Projectionscentren, welche diesen Lagen entsprechen, bezeichnen wir mit $P_1 Q_1 R_1 P_1'\ Q_1' R_1'$ je nachdem dieselben auf den Geraden $pqrp'q'r'$ liegen.

Es können daher vier Dreiecke dem Kegelschnitt einbeschrieben werden, welche mit einem der gegebenen auf einerlei mit dem an-

deren auf dreierlei Art perspectivisch liegen. Von diesen vier Dreiecken sind solche zwei, welche die Projectionen eines der gegebenen Dreiecke bilden, also $E_2 F_2 G_2$, $E_2' F_2' G_2'$ oder $E_1 F_1 G_1$, $E_1' F_1' G_1'$ zu einander perspectivisch, das Projectionscentrum ist in beiden Fällen der Pol der UU' Geraden. U, U' Punkte sind nämlich conjugirt, und es wird die Seite $E_2 E_2'$ des Dreiecks $A_2 E_2 E_2'$ durch den Pol der Geraden UU' gehen, da U und U' auf $A_2 E_2$ beziehungsweise $A_2 E_2'$ liegen.

Die oben mit $P_1 \ldots R_2'$ bezeichneten Projectionscentren haben eine besondere Lage: Die Punkte $P_2 Q_2 R_2$, $P_2' Q_2' R_2'$, wie auch $P_1 \ldots R_1'$ liegen auf je einer Geraden, welche durch den Pol T der UU' Geraden gehen. Dies folgt daraus, dass $P_2 Q_2 R_2$, daher auch $P_2' Q_2' R_2'$, $P_1 Q_1 R_1$, $P_1' Q_1' R_1'$ auf je einer Geraden liegen, ferner dass die Verbindungsgeraden der $P_2 Q_2 R_2$ Punkte mit jedem der Punkte $P_2' Q_2' R_2'$ durch T gehen.

Nachdem die Schnittpunkte der Gegenseiten der einfachen Sechsecke $E_2 C_2 F_2$ $B_2 G_2 A_2$, $E_2 B_2 F_2$ $A_2 G_2 C_2$, $E_2 A_2 F_2$ $C_2 G_2 B_2$ die Punkte P_2, Q_2, R_2 sind, fallen die Pascal'schen Linien der benannten einfachen Sechsecke in $P_2 Q_2 R_2$ Geraden, nachdem ferner die Pascal'schen Linien der $E_2' E_2 A_2 G_2' G_2 C_2$, $F_2' F_2 B_2 G_2' G_2 C_2$ einfachen Sechsecke $TP_2 P_2'$, $TP_2 Q_2'$ Geraden sind, so ist unsere Behauptung bewiesen.

Bezüglich der Punktpare $R_2 R_2'$, $P_2 P_2'$, $Q_2 Q_2'$ und $P_2 Q_2'$, $Q_2 R_2'$, $R_2 P_2'$ endlich $P_2 R_2'$, $Q_2 P_2'$, $R_2 Q_2'$ ist zu bemerken, dass dieselben eine Involution bilden, da die erste, zweite und dritte Punktgruppe die Projection der $E_2 E_2'$, $F_2 F_2'$, $G_2 G_2'$ involutorischer Punktpare ist aus den B_2, A_2, C_2 Punkten auf $P_2 Q_2$ Gerade. Ebenso bilden $P_1 \ldots R_1'$ Punkte auf dreierlei Art eine Involution.

Die sechs Punkte E_2, C_2, F_2, B_2, G_2, A_2 haben abgesehen von der dreifachen perspectivischen Lage der Dreiecke $E_2 F_2 G_2$, $A_2 B_2 C_2$ noch die Eigenschaft, dass die drei Pascal'schen Linien der $E_2 C_2 F_2 B_2 G_2 A_2$, $E_2 B_2 F_2 A_2 G_2 C_2$, $E_2 A_2 F_2 C_2 G_2 B_2$ einfachen Sechsecke, wie aus den früheren ersichtlich, zusammenfallen in die $P_2 Q_2$ Gerade. Bei einem anderen Pascal'schen Sechsecke schneiden sich die drei Pascal'schen Linien, welche solchen einfachen Sechsecken entsprechen, in einem Steiner'schen Punkte. Im gegenwärtigen Falle können wir jeden Punkt der $P_2 Q_2$ Geraden als einen Steiner'schen nennen, bezüglich des in Betracht gezogenen Sechsecks, und es wird der Schnittpunkt S_2 der Pascal'schen Linien der $E_2 C_2 F_2 A_2 G_2 B_2$, $E_2 B_2 F_2 C_2 G_2 A_2$, $E_2 A_2 F_2 B_2 G_2 C_2$ einfachen Sechsecke, als zu allen Punkten der $P_2 Q_2$ Geraden conjugirt, der Pol von $P_2 Q_2$ sein. — Wir können auch auf eine andere Art zeigen, dass der Schnitt-

punkt der Pascal'schen Linien der letztbenannten Sechsecke der Pol von $P_2 Q_2$ ist; dieselben sind nämlich als Verbindungslinien der Doppelpunkte von $E_2 F_2 G_2 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$; $E_2 F_2 G_2 \ldots$, $C_2 A_2 B_2 \ldots$; $E_2 F_2 G_2 \ldots$, $B_2 C_2 A_2 \ldots$ involutorischen Punktreihen die Polaren von P_2, Q_2, R_2 Punkten.

Die einfachen Sechsecke $E_2' C_2 G_2' B_2 F_2' A_2$, $E_1 C_1 F_1 B_1 G_1 A_1$, $E_1' C_2 G_1' B_1 F_1' A_1$ haben dieselbe Eigenschaft als $E_2 C_2 F_2 B_2 G_2 A_2$ nämlich: vom ersten Sechsecke fallen drei Pascal'sche Linien in $P_2 Q_2$ Geraden, während sich drei in S_2 schneiden; von den anderen zwei Sechsecken fallen drei Pascal'sche Linien in $P_1 Q_1$, während sich die anderen drei im S_1 Punkte treffen. Es ist ferner leicht ersichtlich, dass sich $S_2 S_1 U U'$ Punkte in einer Geraden befinden, denn diese Punkte sind conjugirt zu T.

Die bisherigen Betrachtungen können wir in einem Satz zusammengefasst, so aussprechen:

„Wenn einem Kegelschnitt zwei Dreiecke einbeschrieben sind, „dann kann man unendlich viele Dreiecke dem Kegelschnitt einschreiben, „welche mit den gegebenen zugleich perspectivisch liegen; es gibt „18 Dreiecke, welche denselben gemeinsamen Eckpunkt haben, dem „Kegelschnitt einbeschrieben und mit den gegebenen Dreiecken per- „spectivisch sind; es gibt ferner 18 dem Kegelschnitt einbeschriebene „Dreiecke, welche mit einem der gegebenen Dreiecke auf einerlei „mit dem anderen auf zweierlei Art perspectivisch sind. Ausser „diesen sind noch 4 besondere Dreiecke vorhanden, welche mit je „einem der gegebenen Dreiecke auf einerlei, mit dem anderen auf „dreierlei Art perspectivisch sind. Von diesen vier besondern Drei- „ecken sind zweimal genommen zwei selbst perspectivisch, das Pro- „jectionscentrum, welches diesen Lagen entspricht, ist ein und der- „selbe Punkt. Die Zahl der Projectionscentren, welche der per- „spectivischen Lage dieser vier und der gegebenen zwei Dreiecke „entsprechen, ist 14, wovon 2 Punkte solche zwei Steiner'sche con- „jugirte Punkte sind, welche zu den, durch die Eckpunkte der ge- „gebenen Dreiecke bestimmten Pascal'schen Sechsecken gehören, die „übrigen 12 liegen zu je 6 auf zwei Geraden und bilden auf diesen „Geraden auf dreierlei Art Involutionen. Der Schnittpunkt dieser „zwei Geraden fällt einerseits mit dem Projectionscentrum zusammen, „welches die perspectivische Lage der vier besonderen Dreiecke be- „stimmt, andrerseits bildet er mit den erwähnten Steiner'schen Punkten „ein Tripel bezüglich des Kegelschnitts“.

4.

Untersuchen wir in wie fern sich dieser Satz ändert, wenn die gegebenen Dreiecke $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ auf drerlei Art perspectivisch sind, nämlich wenn: $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$; $A_1 C_2$, $B_1 A_2$, $C_1 B_2$; $A_1 B_2$, $B_1 C_2$; $C_1 A_2$ Geraden sich beziehungsweise in P, Q, R Punkten schneiden oder kürzer ausgedrückt, wenn $A_1 B_1 C_1$ in Rücksicht auf die Reihe der entsprechenden Punkte mit $A_2 B_2 C_2$, $C_2 A_2 B_2$, $B_2 C_2 A_2$ perspectivisch ist und die Projectionscentren beziehungsweise P, Q, R sind.

Wenn die Polaren von P, Q, R mit p, q, r bezeichnet werden, dann ist aus dem früheren bekannt, dass sich diese Polaren als Pascal'sche Linien der $A_1 C_2 B_1 A_2 C_1 B_2$. $A_1 B_2 B_1 C_2 C_1 A_2$, $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$ einfachen Sechsecke in einem gewissen S Punkte schneiden, welcher der Pol ist von den in eine s Gerade fallenden Pascal'schen Linien der einfachen Sechsecke $A_1 B_2 B_1 A_2 C_1 C_2$, $A_1 C_2 B_1 B_2 C_1 A_2$, $A_1 B_2 B_1 C_2 C_1 B_2$.

Es seien nun ABC die Projectionen der $A_1 B_1 C_1$ Punkte aus einem beliebigen P_1 Punkte der s Geraden, so wird ABC Dreieck mit $A_2 C_2 B_2$, $B_2 A_2 C_2$, $C_2 B_2 A_2$ perspectivische Lage haben; die Projectionscentren P_2, Q_2, R_2 liegen auf s. Nachdem ABC Dreieck die Projection von $A_2 B_2 C_2$ ist aus einem P_2 Punkte der s Geraden, so wird ABC Dreieck auch mit $A_1 B_1 C_1$, $B_1 C_1 A_1$, $C_1 A_1 B_1$ perspectivische Lage haben und die Projectionscentren sind P_1, Q_1, R_1; ABC Dreieck ist daher auf dreierlei Art perspectivisch mit den gegebenen Dreiecken. — Die erhaltenen Projectionscentren $P_1 Q_1 R_1$, $P_2 Q_2 R_2$ bilden auf dreierlei Art Involutionen, weil die Projection der $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ wie auch $A_1 C_2$, $B_1 A_2$, $C_1 B_2$, endlich $A_1 B_2$, $B_1 C_2$, $C_1 A_2$ involutorische Punktgruppen aus A beziehungsweise B, C auf die Gerade s die Punktpare $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$, $R_1 R_2$; $P_1 P_2$, $P_1 Q_2$, $Q_1 P_2$; $Q_1 P_2$, $R_1 Q_2$, $P_1 R_2$ sind.

Es sei zweitens $E_2 F_2 G_2$ die Projection der $A_1 B_1 C_1$ Punkte aus (p, s) auf den Kegelschnitt, dann wird $E_2 F_2 G_2$ Dreieck, da (p, s) auf s liegt, mit $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ auf dreierlei, da (p, s) auch auf p liegt mit $A_2 B_2 C_2$ noch auf einerlei Art perspectivisch sein, nämlich: $E_1 F_2 G_2$ Dreieck ist mit den Dreiecken $A_2 B_2 C_2$, $A_2 C_2 B_2$, $B_2 A_2 C_2$, $C_2 B_2 A_2$ und $A_1 B_1 C_1$, $B_1 C_1 A_1$, $C_1 A_1 B_1$ perspectivisch. Die Dreiecke $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $E_2 F_2 G_2$ sind daher parweise perspectivisch, und es bilden die Projectionscentren, welche dieser Lage entsprechen, ein Polardreieck; zwei Projectionscentren sind aber P und (p, s), daher wird das dritte Centrum S sein, da S zu den ersteren zwei Punkten conjugirt ist. Daraus schliessen wir, dass $E_2 F_2 G_2$ die Pro-

jection der Eckpunkte des Dreiecks $A_2 B_2 C_2$ aus S auf den Kegelschnitt, daher von (p, s) unabhängig ist, welche Eigenschaft wir auch so aussprechen können: dass die Projection des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ aus den Punkten (p, s), (q, s), (r, s) ein und dasselbe $E_2 F_2 G_2$ Dreieck ist.

Man kann noch ein so merkwürdiges Dreieck $E_1 F_1 G_1$ finden, indem man $A_1 B_1 C_1$ aus S, oder aber $A_2 B_2 C_2$ Dreieck aus $(p. s)$, oder (q, s) endlich (r, s) Punkte auf den Kegelschnitt projicirt.

Die zwei Dreiecke $E_1 F_1 G_1$, $E_2 F_2 G_2$ sind auf dreierlei Art perspectivisch nämlich: $E_1 F_1 G_1$ mit $E_2 F_2 G_2$. $G_2 E_2 F_2$, $F_2 G_2 E_2$, die Projectionscentren sind beziehungsweise P, Q, R. Dies ist daraus ersichtlich, dass sich $A_1 E_1$, $A_2 E_2$, $B_1 F_1$ ... $C_2 G_2$ Gerade im Pole S von s, und $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ Gerade im Punkte P schneiden, daher $E_1 E_2$, $F_1 F_2$, $G_1 G_2$ Gerade durch P gehen; ebenso wird der Beweis geführt für die zwei anderen perspectivischen Lagen.

Das Resultat dieser Untersuchung lautet:

„Wenn zwei demselben Kegelschnitt einbeschriebene Dreiecke auf „dreierlei Art perspectivisch sind, dann kann man unendlich viele „Dreiecke dem Kegelschnitt einschreiben, welche mit den gegebenen „auf einerlei, und unendlich viele, welche auf dreierlei Art per„spectivisch sind. Die Projectionscentren, welche zu jedem dieser „letzteren Dreiecke gehören, liegen auf einer s Geraden und bilden „eine Involution; diese s Gerade enthält auch die Projectionscentren, „welche aus der perspectivischen Lage der gegebenen Dreiecke ent„stammen. Man kann aber noch zwei besondere Dreiecke dem „Kegelschnitt einschreiben, welche mit einem der gegebenen auf „dreierlei, mit dem anderen auf viererlei Art perspectivisch sind, und „diese sind die Projectionen der gegebenen Dreiecke aus dem Pole „der s Geraden auf den Kegelschnitt. Diese zwei besonderen Drei„ecke sind mit einander auf dreierlei Art perspectivisch; die Pro„jectionscentren, welche zu diesen Lagen gehören, fallen mit den „Projectionscentren zusammen, durch welche die perspectivische Lage „der gegebenen Dreiecke bestimmt ist.“

Zu bemerken ist noch: wenn die gegebenen Dreiecke auf viererlei Art perspectivisch sind, wie z. B. in der früheren Figur $E_2 F_2 G_2$, $A_2 B_2 C_2$, erhalten wir keine wesentlich verschiedene Figur.

5.

Kehren wir nun zu der, von den früheren Constructionen sich ergebenden bestimmten Aufgabe zurück, welche so lautet: es sind drei dem-

selben Kegelschnitt einbeschriebene Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ gegeben, man construire ein Viereck, welches dem Kegelschnitt einbeschrieben ist und mit dem gegebenen perspectivisch liegt.

Wir construiren (70. Teil p. 447) die Verbindungsgerade der Doppelpunkte der perspectivischen Punktreihen $A_1B_1C_1\ldots$, $A_2B_2C_2\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$, $A_3B_3C_3\ldots$, welche die Pascal'sche Linie der $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$, $A_1C_3B_1A_3C_1B_3$ einfachen Sechsecke sind, die Projection der Punkte $A_1B_1C_1$ vom Schnittpunkte dieser Geraden auf den Kegelschnitt, bilden die Eckpunkte des gewünschten Dreiecks.

Die Punkte $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ wie auch $A_1B_1C_1$, $A_3B_3C_3$ bestimmen auf sechserlei Art projectivische Punktreihen, dann hat die Aufgabe im Allgemeinen 36 Lösungen.

Bei besonderer Lage der gegebenen Dreiecke ändert sich die Anzahl der Lösungen. Fällt nämlich von den Doppelpunkten der sechs ersten projectivischen Punktreihen irgend einer, oder zwei, mit irgend einem oder zwei zusammen gehörigen Doppelpunkten der sechs anderen projectivischen Punktreihen zusammen, dann liefern im ersten Falle diese besondern Punktreihen kein Dreieck, im zweiten Falle aber bestimmen die Punktreihen unendlich viele Dreiecke, welche mit den gegebenen perspectivisch liegen. In diesem letzteren Falle sind 6 besondere Dreiecke vorhanden, welche mit einem der gegebenen Dreiecke auf dreierlei, mit den beiden anderen auf einerlei Art perspectivisch sind. Um dies einzusehen, setzen wir voraus, dass $A_1B_1C_1\ldots$, $A_2B_2C_2\ldots$, und $A_1B_1C_1\ldots$, $A_3B_3C_3\ldots.$ projectivischen Punktreihen dieselben Doppelpunkte haben, welche daher auch Doppelpunkte sind der $A_2B_2C_2\ldots$, $A_3B_3C_3\ldots$ projectivischen Punktreihen. Die Verbindingslinie dieser Doppelpunkte ist die gemeinsame Pascal-sche Linie der $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$, $A_1C_3B_1A_3C_1B_3$, $A_2C_3B_2A_3C_2B_3$ einfachen Sechsecke. Auf dieser Pascal'schen Linie liegen S_3, S_2, S_1 drei Steiner'sche Punkte, welche aus den drei aufgeschriebenen Sechsecken entstammen, wenn man dieselben als vollständige Sechsecke betrachtet. Werden nun z. B. die Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ aus S_3 auf den Kegelschnitt projicirt, so bekommen wir zwei solche Dreiecke, von welchen das erste mit $A_1B_1C_1$, $A_3B_3C_3$ auf einerlei mit $A_2B_2C_2$ auf dreierlei, das zweite mit $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ auf einerlei, mit $A_1B_1C_1$ auf dreierlei Art perspectivisch ist.

Wir können daher sagen:

„Wenn einem Kegelschnitt drei Dreiecke einbeschrieben sind, so können im Allgemeinen 36 Dreiecke dem Kegelschnitt einbeschrieben werden, welche mit den gegebenen perspectivisch sind. Bilden die Eckpunkte des einen Dreiecks mit den Eckpunkten eines

der zwei anderen zwei solche Sechsecke, von dessen Seiten keine auf die Seiten der Dreiecke fällt, von welchen aber zwei Pascal'sche Linien in derselben s Geraden liegen, dann kann man dem Kegelschnitt unendlich viele Dreiecke einbeschreiben, welche mit den gegebenen perspectivisch sind. In diesem Falle kann man sechs besondere Dreiecke finden, welche die Projectionen von den gegebenen Dreiecken aus gewissen Punkten der s Geraden sind; diese besonderen Dreiecke sind mit einem der gegebenen auf dreierlei, mit den übrigen zwei auf einerlei Art perspectivisch."

6.

Wir wollen jetzt die Frage beantworten: wie man einem Kegelschnitt ein Dreieck einbeschreiben kann, dass mit dem im Kegelschnitt einbeschriebenen $A_1 B_1 C_1$ Dreieck auf zwei-, drei- oder viererlei Art perspectivisch ist und einen A Punkt des Kegelschnittes zum Eckpunkt hat.

a) Die erste Aufgabe kann man nur dann lösen, wenn die Eckpunkte des Dreiecks und der gegebene Punkt harmonisch liegen, dann aber hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen. Sind z. B. $B_1 C_1$ Punkte durch AA_1 harmonisch getrennt und BC fernere Punkte des Kegelschnittes, welche ebenfalls durch AA_1 harmonisch getrennt sind, dann ist ABC Dreieck mit $A_1 B_1 C_1$ auf zweierlei Art perspectivisch.

b) Um die zweite Aufgabe zu lösen, bezeichnen wir die (bekanntlich in derselben Geraden liegenden) Schnittpunkte der Tangenten in $A_1 B_1 C_1$ Punkten mit den gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ resp. mit $Q_1 Q_2 Q_3$, den gemeinsamen Punkt von AA_1, $Q_1 Q_2$ Geraden mit P_1, endlich die Projection von B_1, C_1 aus P_1 auf den Kegelschnitt mit B resp. C. Die Pascal'schen Linien der $B_1 B_1 B A C_1 C$ und $A A_1 B C_1 C B_1$ einfachen Sechsecke liegen in derselben $P_1 Q_1 Q_2 Q_3$ Geraden, da die Pascal'sche Linie des ersteren Sechsecks $Q_2 P_1$ ist und durch den Schnittpunkt P_3 von BA_1, CB_1 geht, während die des zweiten P_3 und P_1 Punkte verbindet und zugleich den Schnittpunkt P_2 von BC_1, AB_1 enthält. Ebenso kann man beweisen, dass die Pascal'schen Linien der $C_1 C_1 C A_1 B_1 B$, $A C_1 B B_1 C A_1$ wie auch $A_1 A_1 A B_1 C_1 C$, $A B_1 B A_1 C C_1$ einfachen Sechsecke in $P_1 P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3$ Gerade fallen und in Anbetracht des zweiten und vierten Sechsecks $C_1 B$, CA_1 Gerade durch P_2, BA_1 und CA_1 Gerade durch P_3 gehen. Die Lage der BC Punkte ist daher derart bestimmt, dass ABC Dreieck mit $A_1 B_1 C_1$ auf dreierlei Art perspectivisch liegt.

c) Die dritte Aufgabe kann man nur unter der Bedingung lösen, dass — wie bei a) — ein Eckpunkt des Dreiecks z. B. A_1 von $B_1 C_1$ durch den gegebenen A Punkt harmonisch getrennt ist. Führt man dabei die unter b) gegebene Construction durch, so erhält man BC Punkte, und ABC Dreieck wird mit $A_1 B_1 C_1$, $B_1 C_1 A_1$, $C_1 A_1 B_1$, $A_1 C_1 B_1$ perspectivisch liegen. Bezeichnet man die Projectionscentren, welche diesen Lagen entsprechen, mit $P_1 P_2 P_3 R$, die Schnittpunkte von $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$ mit $P_1 P_2 P_3$ Gerade resp. mit $Q_1 Q_2 Q_3$, dann folgt in Anbetracht der Vierecke $B_1 C_1 BC$, $A_1 B_1 AC$, $A_1 C_1 AB$, dass $P_1 Q_1 R$, $P_2 Q_3 R$, $P_3 Q_2 R$ Polardreiecke sind, und dass nicht allein $B_1 C_1$ und BC durch AA_1 harmonisch getrennt sind, sondern auch $A_1 C_1$, BA durch CB_1, sowie $A_1 B_1$, AC durch BC_1, welche letztere Eigenschaft zur einfachen Construction der BC Punkte dienen kann. Man bemerkt auch, dass $ABC A_1 B_1 C_1$ Punkte auf dem Kegelschnitt $P_1 P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3$ aber auf der Polare von R auf viererlei Art Involutionen bilden.

Mittelst dieser Constructionen sind wir im Stande folgende Aufgaben zu lösen:

„Auf einer Geraden (oder Kegelschnitt) sind $A_1 B_1 C_1$ A Punkte gegeben, man bestimme B, C Punkte derart, dass die sechs Punkte $ABC A_1 B_1 C_1$ auf zwei-, drei- oder viererlei Art Involutionen bilden sollen".

Die erste und dritte Aufgabe kann nur dann gelöst werden, wenn die gegebenen Punkte harmonisch liegen. Ist AA_1 von $B_1 C_1$ harmonisch getrennt, dann entsprechen alle Punktpare, welche A, A_1 harmonisch trennen (und beim Kegelschnitt auf demselben liegen) der ersten, diejenigen zwei Punkte B resp. C aber, welche A_1, B_1 von C_1 und A_1, C_1 von B_1 harmonisch trennen, der dritten Aufgabe.

Um die zweite Aufgabe zu lösen, projicirt man die gegebenen Punkte, wenn dieselben auf einer Geraden liegen, auf einen Kegelschnitt aus einem beliebigen 0 Punkte desselben nach $A_1' B_1' C_1' A'$ und sucht B', C' derart, dass $A'B'C'$, $A_1' B_1' C_1'$ Dreiecke auf dreierlei Art perspectivisch liegen sollen, die Projectionen BC, der $B'C'$ aus 0 auf die Gerade sind die gewünschten Punkte.

7.

Wenn wir in der letzteren Construction keine Rücksicht auf die Ordnung der gegebenen Punkte nehmen, dann hat die Aufgabe vier Lösungen. Um die gegenseitige Lage dieser vier Punktpaare zu erkennen, wollen wir folgende Bezeichnungen einführen.

Die gegebenen vier Punkte A, B, C, D bestimmen vier Dreiecke und wir bezeichnen mit a, b, c, d diejenigen Geraden, in welchen die Seiten der BCD, CDA, DAB, BAC Dreiecke die Tangenten in den gegenüber liegenden Eckpunkten schneiden. Auf jeder der Geraden a, b, c, d liegen sechs involutorische Punkte, wovon drei die Schnittpunkte der Seiten des zur Geraden gehörigen Dreiecks sind, die übrigen drei aber die Projectionen der Eckpunkte des Dreiecks aus dem vierten Punkt auf die Gerade; die ersteren drei Punkte z. B. auf d, d. h. die Schnittpunkte von BC, CA, AB mit d nennen wir D_α, D_β, D_γ, die anderen drei, d. h, die Schnittpunkte von DA, DB, DC mit d nennen wir D_a, D_b, D_c. Es wird daher nach dieser Bezeichnung B_γ der Schnittpunkt von b mit AD (oder auch mit der Tangente in C), C_a aber von AC mit c sein.

Bevor wir die gewünschten vier Punktpaare construiren, wollen wir zeigen, dass $ABCD$ Viereck und $abcd$ Vierseit ein gemeinsames Diagonaldreieck XYZ haben, wo X, Y, Z resp. auf AB, AC, AD Geraden liegen. XYZ ist namlich das Diagonaldreieck desjenigen Vierseits, welches den Kegelschnitt in $ABCD$ Punkten berührt und es werden daher die Schnittpunkte der Tangenten in B und A mit den Geraden AC resp. DD, d. h. D_β und C_α durch X Punkt und YZ Gerade harmonisch getrennt; ebenso C_β und D_α Punkte. Daraus folgt, dass sich $C_\alpha C_\beta \equiv c$ und $D_\alpha D_\beta \equiv d$ Geraden auf YZ schneiden. Ebenso wird bewiesen, dass die Schnittpunkte der übrigen Seiten des Vierseits auf den Seiten des XYZ Dreiecks liegen. Aus dieser Eigenschaft des genannten Vierseits ist leicht ersichtlich, dass die so bezeichneten Punktepare A_c, C_a wie auch D_γ, C_δ durch Ecken und Seiten des Diagonaldreiecks XYZ harmonisch getrennt sind.

Wir wenden uns jetzt zur Construction der gewünschten Punktepare und bezeichnen die Projectionen der B, C Punkte aus D_a auf den Kegelschnitt mit E_4F_4, aus A_d mit E_1F_1; die Projectionen der A, D Punkte aus C_b mit E_3F_3 aus B_c mit F_2E_2.

Aus dem Früheren ist bekannt, dass ABC, DE_4F_4; DBC, AE_1F_1; BAD, CE_3F_3; CAD, BF_2E_2 Dreiecke auf dreierlei Art perspectivisch sind, oder was dasselbe ist, die bezeichneten Punktgruppen auf dreierlei Art Involutionen bilden. Nachdem D_a, A_d und C, B Punkte durch Z, XY harmonisch getrennt sind, so werden sich die Geraden CD_a, BA_d wie auch CA_d, BD_a auf XY Gerade, der Polare von Z schneiden; diese Schnittpunkte sind conjugirt zu Z, daher CB und F_4E_1, wie auch CB, E_4F_1 Geraden durch Z gehen.

Ebenso wie wir jetzt bewiesen haben, dass F_1E_1 Punktpar die Projection von E_4F_4 ist aus Z auf den Kegelschnitt, kann man zeigen, E_3F_3 die Projection von E_2F_2 aus Z; E_4F_4 die Projection von E_2F_2 aus Y; E_3F_3 die Projection von E_4F_4 aus X etc. oder in Worte gefasst, dass die Projection eines dieser Punktpare aus XYZ auf den Kegelschnitt die übrigen Punktpare sind.

Das Resultat dieser Untersuchung können wir so aussprechen:

„Wenn einem Kegelschnitt ein Viereck einbeschrieben ist, so kann man vier Punktpare construiren, von denen jede mit den gegebenen vier Eckpunkten auf dreierlei Art Involutionen bilden; die Projectionen eines jeden dieser Punktpare aus den Eckpunkten des zum Viereck gehörigen Diagonaldreiecks auf dem Kegelschnitt, sind die übrigen drei Punktpare.“

XVI.

Einige Sätze über das Viereck und Kegelschnittbüschel.

Von

L. Klug.

---

1. Bekanntlich liegen die conjugirten Punkte zu allen Punkten einer Geraden bezüglich eines Vierecks auf einem Kegelschnitt; derselbe geht durch die Eckpunkte des Diagonaldreiecks, weil diese conjugirt sind zu den Schnittpunkten der Geraden mit den Seiten des Diagonaldreiecks, und trifft ausserdem die Seiten des Vierecks in denjenigen Punkten, welche zu den Schnittpunkten der Seiten mit den Geraden conjugirt, daher durch die Eckpunkte des Vierecks harmonisch getrennt sind. Verbindet man von diesen letzteren Schnittpunkten zwei solche die auf den Gegenseiten liegen, so treffen sich die drei Verbindungsgeraden in demselben Punkte, welcher der Pol der angenommenen Geraden bezüglich des Kegelschnitts ist. Die Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der Geraden sind Doppelpunkte derjenigen Involution, welche die Spuren der Vierecksseiten auf der Geraden bestimmen. Geht die Gerade durch einen Diagonalpunkt des Vierecks, so zerfällt der Kegelschnitt in zwei Gerade, wovon eine von der angenommenen durch zwei Viereckseiten harmonisch getrennt ist, die andere aber die übrigen zwei Diagonalpunkte verbindet; geht die Gerade durch einen Eckpunkt des Vierecks, so berührt sie den entsprechenden Kegelschnitt in diesem Punkte.

Im Folgenden wollen wir die Eckpunkte des Vierecks mit $ABCD$, die Diagonalpunkte auf den Seiten BC, CA, AB mit XYZ, die

Schnittpunkte den angenommenen g Geraden und der BC, CA, AB, AD, BD, CD Seiten mit $PQRP_1Q_1R_1$, die ihnen conjugirten Punkte mit $P'O'R'P_1'Q_1'R_1'$, den Schnittpunkt der $P'P_1'$, $Q'Q_1'$, $R'R_1'$ Geraden mit G, endlich den zu g gehörigen $P'Q' \ldots XYZ$ Kegelschnitt mit γ, bezeichnen.

2. Nennt man die Schnittpunkte der $P'P_1'$, $Q'Q_1'$, $R'R_1'$ Geraden mit g beziehungsweise P_0, Q_0, R_0, dann gehen die Geraden P_0X, Q_0Y, R_0Z durch denselben G' Punkt, welcher conjugirt ist zu G bezüglich des Vierecks.

Nachdem nämlich die Punkte P', P'_1; Q_1, Q_1'; R', R'_1 durch G, g harmonisch getrennt sind, so schneiden sich P_0X, Q_0Y, R_0Z Geraden in einem Punkte, welcher von G durch die Seiten des Vierecks ebenfalls harmonisch getrennt ist, d. h. in dem zu G conjugirten Punkte.

3. Schneidet ein dem Viereck $ABCD$ umschriebener Kegelschnitt E die Gerade g in E, E_1, dann geht die Verbindungslinie der zu E, E_1 bezüglich des Vierecks conjugirten Punkte durch G.

E, E_1 ist ein entsprechendes Punktpar derjenigen involutorischen Punktreihe $PP_1QQ_1RR_1 \ldots$, in welchen die Gegenseiten des Vierecks g schneiden. Construirt man in dem involutorischen Strahlbüschel $X(PP_1QQ_1EE_1)$ diejenigen Strahlen $XP' \ldots$, XE', XE_1', welche von den ersteren durch A, B harmonisch getrennt sind, so bilden dieselben *) ebenfalls ein involutorisches Strahlbüschel $X(P'P_1'Q'Q_1'E'E_1')$. Dieses Strahlbüschel schneidet den Kegelschnitt γ in einer involutorischen Punktreihe $P'P_1'Q'Q_1'E'E_1' \ldots$ und es wird daher die Gerade $E'E_1'$ durch den Schnittpunkt G von $P'P_1'$, $Q'Q_1'$ gehen. — Aendert sich E im Büschel $(ABCD)$, so beschreibt EE_1 die involutorische Punktreihe auf g und $E'E_1'$ Gerade ein Strahlbüschel um G; die involutorische Punktreihe E, $E_1 \ldots$, das Strahlbüschel $E'E_1' \ldots$, wie auch die Spuren desselben in g, sind zu einander projectivisch **).

4. Wenn E' der conjugirte Punkt von E bezüglich des Vierecks $ABCD$ und XYZ das Diagonaldreieck des Letzteren ist, so liegt der conjugirte Punkt E'' von E bezüglich des Vierecks $E'XYX$ auf dem, durch $ABCDE$ Punkte gehenden Kegelschnitt E und $E'E''$ berührt E in E''.

---

*) Staudt. I. Beiträge z. G. d. L. p. 45.

**) Chasles. Traité des Sections coniques. p. 101.

Die Tangenten aus E' zum Kegelschnitt E werden denselben in E und in einem anderen E'' Punkte berühren; die Polare des Schnittpunktes der Geraden EE'', XZ ist $E'Y$, daher die Punkte E, E'', durch $E'Y$, XZ Geraden harmonisch getrennt. Ebenso wird bewiesen, dass E, E'' Punkte durch $E'X$, YZ wie auch $E'Z$, XY harmonisch getrennt und also E'' der zu E bezüglich des Vierecks $E'XYZ$ conjugirte Punkt ist.

5. Werden zu den Schnittpunkten einer Geraden mit den Seiten eines Vierecks zuerst die conjugirten Punkte construirt, dann diejenigen, welche von den genannten Schnittpunkten harmonisch getrennt sind, durch die gefundenen conjugirten und Diagonalpunkte, dann gehen die Verbindungslinien der auf den Gegenseiten liegenden Punkte, die wir zuletzt erhalten haben, durch denselben Punkt.

Bezeichnet man die Schnittpunkte der g Geraden und der Viereckseiten, wie früher, mit $PQRP_1Q_1R_1$, die conjugirten Punkte derselben mit $P'Q' \ldots R_1'$ die conjugirten von P, $Q \ldots R_1$ bezüglich der Vierecke $P'XYZ$, $Q'XYZ, \ldots R'_1XYZ$ mit P'', Q'', $\ldots R_1''$, dann sind $P''Q'' \ldots R_1''$ diejenigen Punkte, deren Lagenverhältnisse der Satz ausspricht. P'' muss nämlich, da sich P auf Seite $P'X$ des Vierecks $P'XYZ$ befindet, auf derselben Seite liegen und von P durch P', X harmonisch getrennt sein. Man construirt diese Punkte auf eine einfache Art. Nachdem P', P_1' Punkte durch g, G harmonisch getrennt sind, so schneiden sich die Geraden GP_1, PP', wie auch GP, P_1P_1' in P'' resp. P_1''; die Strahlen $G(P_1Q_1R_1PQR)$ schneiden daher die entsprechenden Viereckseiten in $P''Q''R''P_1''Q_1''R_1''$ Punkten. Es ist ferner aus der, auf den Viereckseiten liegenden harmonischen Punktgruppe leicht ersichtlich, dass $P''P_1''$, $Q''Q_1''$, $R''R_1''$ Geraden beziehungsweise durch $P_0 \equiv (PP_1, P'P_1')$, $Q_0 \equiv (QQ_1, Q'Q_1')$, $R_0 \equiv (RR_1, R'R_1')$ gehen. Betrachtet man nun die harmonischen Strahlen $P_0(P'P''XP)$, $Q_0(Q'Q''YQ)$, $R_0(R'R''ZR)$ die in g einen gemeinsamen Strahl haben, und deren entsprechende Strahlen P_0P', Q_0Q', R_0R', wie auch P_0X, Q_0Y, R_0Z durch G resp. G' (2), gehen, so folgt, dass sich $P_0P''P_1''$, $Q_0Q''Q_1''$, $R_0R''R_1''$ Geraden in demjenigen G_0 Punkte treffen, welcher von g durch G, G_1 harmonisch getrennt ist.

6. Schneidet der durch $ABCD$ Eckpunkte eines Vierecks, dessen Diagonalpunkte XYZ sind, gelegte E Kegelschnitt eine g Gerade in E, E_1, und sind $E'E_1'$ die conjugirten Punkte von E, E_1 bezüglich $E'XYZ$ resp. $E_1'XYZ$ Vierecke, dann gehen EE_1, $E'E_1'$, $E''E_1''$ Gerade durch denselben E_0 Punkt, EE_1'', E_1E'', $E'E_1'$ durch G; E_0 und G sind conjugirt bezüglich des Kegelschnittes E.

Die Tangenten in den E, E'' und E_1 E_1'' Eckpunkten des dem Kegelschnitt E einbeschriebenen $EE_1E''E_1''$ Vierecks schneiden sich nach (4) in E' resp. E_1'. Daraus folgt, dass EE_1, $E'E_1'$, $E''E_1''$ und EE_1'', E_1E'', $E'E_1'$ Geraden durch denselben E_0 resp. G Punkt gehen, welche bezüglich E conjugirt sind. G stellt den von uns in dem Früheren mit demselben Buchstaben bezeichneten Punkt dar, weil G von $E_0 \equiv (g, E'E_1')$ durch E', E_1' Punkte harmonisch getrennt ist.

7. Schneidet der, durch $ABCD$ Eckpunkte eines Vierecks gelegte Kegelschnitt E eine g Gerade in E, E_1 und sind E', E_1' ihre conjugirten Punkte bezüglich des Vierecks, dann geht die Gerade, welche den Schnittpunkt E_0 von EE_1' mit dem Pole der $E'E_1'$ Geraden verbindet, bei Aenderung des Kegelschnitts E im Büsche $(ABCD)$, durch denselben G' Punkt.

Diese Verbindungsgerade ist die Polare desjenigen Punktes G, welher E', E_1' von E_0 harmonisch trennt, und diese Polare geht bei Aenderung des Kegelschnitts im Büschel $(ABCD)$, durch den zu G conjugirten Punkt G'.

8. Umschreibt man dem Viereck $ABCD$, dessen Diagonalenpunkte XYZ sind, einen Kegelschnitt E, welcher eine Gerade g in E, E_1 trifft, construirt zu diesen Schnittpunkten die conjugirte E', E_1' bezüglich des Vierecks $ABCD$, wie auch E'', E_1'' bezüglich der Vierecke $E'XYZ$ resp. $E_1'XYZ$, dann geht die Verbindungsgerade $E''E_1''$ der zuletzt gefundenen Punkte, bei Aenderung des Kegelschnitts im Büschel $ABCD$ durch denselben Punkt.

Bezeichnet man den zum Schnittpunkt von EE_1'', E_1E'', d. h. G bezüglich $ABCD$ Vierecks conjugirten Punkt mit G, so werden G, G' Punkte nicht nur durch E, sondern auch durch EE_1, $E''E_1''$ Geraden harmonisch getrennt. Bei Aenderung des Kegelschnitts E, im Büschel $(ABCD)$, wird sich daher $E''E_1''$ Gerade um denjenigen Punkt drehen, welcher von $g \equiv EE_1$ Geraden durch G, G' harmonisch getrennt ist, und den wir in (5) mit G_0 bezeichnet haben.

Anmerkung. Die zwei letzten Sätze sind die Verallgemeinerungen von (2) und (5). Denn degenerirt E in die Geraden AD, BC, dann fallen $E_0EE_1E'E_1'E_1''E_1''$ Punkte in $P_0PP_1P'P_1'P''P_1''$, der Pol von $E'E_1'$ in X.

9. Ist XYZ das Diagonaldreieck des Vierecks $ABCD$, der conjugirte Punkt von E bezüglich dieses Vierecks E', bezüglich des

Strahlen im Büschel U, weshalb die Curve III. Ordnung auch durch die Diagonalpunkte des Vierecks $U'XYZ$ geht.

13. Die Pole eines Strahlbüschels I. Ordnung bezüglich der entsprechenden Elemente eines ihm projectivischen Kegelschnittbüschels liegen auf einer Curve III. Ordnung, welche durch die Diagonalpunkte des dem Büschel einbeschriebenen Vierecks und durch den, bezüglich dieses Vierecks, dem Mittelpunkt des Strahlbüschels conjugirten Punkt geht.

Der Beweis dieses Satzes ist in (12) gegeben.

XVII.

Die Auflösung dreigliedriger Gleichungen nach Gauss.

Von

A. M. Nell.

---

§ 1.

Um die reellen Wurzeln solcher höherer Gleichungen zu finden, welche aus nur 3 Gliedern bestehen, hat der unsterbliche Verfasser der Theoria motus eine überraschend einfache Methode entwickelt, bei welcher eine Tafel der Additionslogarithmen zu benutzen ist. Im III. Buche der Gauss'chen Werke findet sich diese Methode unter dem Titel: Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen Seite 85 u. s. f. abgeleitet. Auch wird dort (Seite 96 u. s. f.) gezeigt, wie die imaginären Wurzeln verhältnissmässig leicht bestimmt werden können.

Da nun diese Methode einerseits nicht so bekannt zu sein scheint, wie sie es verdient, andererseits die neueren Tafeln der Additionslogarithmen zweckmässiger angeordnet sind, als die erste von Gauss selber berechnete Tafel, wodurch auch das Verfahren zur Lösung der bezeichneten Gleichungen selbst entsprechend abzuändern ist, so wollen wir uns hier nochmals damit beschäftigen.

Die allgemeine Form einer dreigliedrigen Gleichung ist

$$x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0$$

in welcher e, f, m und n stets positive Grössen sein sollen; dabei wird jederzeit vorausgesetzt, dass die Exponenten m, n keinen gemein-

schaftlichen Teiler haben. Indem zunächst die positiven Wurzeln aufgesucht werden sollen, hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

Erste Form.

$$x^{m+n} + ex^m - f = 0,$$

durch f dividirt, gibt

$$\frac{x^{m+n}}{f} + \frac{e}{f} . x^m = 1$$

Setzt man

$$\frac{x^{m+n}}{f} = \sin^2\theta, \quad \frac{ex^m}{f} = \cos^2\theta,$$

so findet sich

$$\frac{x^n}{e} = \mathrm{tg}^2\theta$$

also

$$x^m = \frac{f \cos^2\theta}{e}$$

und

$$x^n = e\,\mathrm{tg}^2\theta$$

$$x^{mn} = \frac{f^n \cos^{2n}\theta}{e^n}, \quad x^{mn} = e^m \mathrm{tg}^{2m}\theta$$

Die beiden Werte gleichgesetzt, gibt

$$\mathrm{tg}^{2m}\theta . \sec^{2n}\theta = \frac{f^n}{e^{m+n}} = \lambda$$

$$m \log \mathrm{tg}^2\theta + n \log \sec^2\theta = \log \lambda$$

Nach der sehr zweckmässigen Entwicklung, welche Wittstein seiner fünf- und siebenstelligen Tafel der Additionslogarithmen gegeben, und welche jetzt fast überall zu Grunde gelegt wird, besteht zwischen dem Argument A und der Function B der Tafel die Beziehung, dass wenn $A = \log x$, $B = \log(x+1)$ ist, also auch, wenn $A = \log \mathrm{tg}^2\theta$, $B = \log \sec^2\theta$ sein muss.

Hiernach lässt sich obige Gleichung schreiben:

$$mA + nB = \log \lambda$$

Durch einige Versuchsrechnungen erhält man gewöhnlich sehr schnell, wenn man ausserdem noch die Regula falsi anwendet, den genauern Wert von A; dann hat man

$$\log x = \frac{\log e + A}{n}$$

Zweite Form.

$$x^{m+n} - ex^m - f = 0,$$

durch das erste Glied dividirt, gibt

$$ex^{-n} + fx^{-m-n} = 1$$

$ex^{-n} = \cos^2\theta$ und $fx^{-m-n} = \sin^2\theta$ gesetzt, so wird

$$\frac{fx^{-m}}{e} = \operatorname{tg}^2\theta$$

$$x^m = \frac{f}{e\operatorname{tg}^2\theta}, \quad x^n = e\sec^2\theta$$

$$x^{mn} = \frac{f^n}{e^n . \operatorname{tg}^{2n}\theta}, \quad x^{nm} = e^m \sec^{2m}\theta$$

$$\operatorname{tg}\theta^{2n} . \sec\theta^{2m} = \frac{f^n}{e^{m+n}} = \lambda$$

$$nA + mB = \log\lambda, \quad \log x = \frac{\log f - \log e - A}{m}$$

In beiden Fällen hat die Gleichung nur **eine** positive Wurzel.

Dritte Form.

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0,$$

durch ex^m dividirt

$$\frac{x^n}{e} + \frac{fx^{-m}}{e} = 1$$

$$\frac{x^n}{e} = \sin^2\theta, \quad \frac{f}{ex^m} = \cos^2\theta,$$

also

$$x^m = \frac{f}{e\cos^2\theta}$$

$$x^{nm} = e^m \sin^{2m}\theta, \quad x^{mn} = \frac{f^n}{e^n \cos^{2n}\theta}$$

$$\sin^{2m}\theta . \cos^{2n}\theta = \frac{f^n}{e^{m+n}} = \lambda$$

Wird zur Linken mit $\cos^{2m}\theta$ dividirt und multiplicirt, so findet sich

$$\operatorname{tg}^{2m}\theta . \cos^{2m+2n}\theta = \lambda$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg}^{2m}\theta}{\sec^{2m+2n}\theta} = \lambda$$

$$mA - (m+n)B = \operatorname{tg}\lambda.$$

Da ferner

$$x^{m+n} = f . \operatorname{tg}^2\theta,$$

so hat man

$$\log x = \frac{\log f + A}{m+n}$$

Vierte Form.

$$x^{m+n} + ex^m + f = 0$$

Diese Gleichung kann offenbar keine positive Wurzel haben.

§ 2.

Bei der dritten Form hatten wir die Gleichung

$$\sin^{2m}\theta . \cos^{2n}\theta = \lambda$$

Schreiben wir statt dessen $u = \sin^{2m}\theta . \cos^{2n}\theta$, so wird $u = 0$, sowohl für $\theta = 0$, als für $\theta = 90^0$; daraus folgt, dass u zwischen diesen Grenzen einen Maximalwert haben wird, der durch u_1 und das zugehörige θ durch θ_1 bezeichnet werden soll.

$$lu = 2m . l\sin\theta + 2n . l\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 2u(m\cot\theta - n\,\mathrm{tg}\,\theta)$$

Die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

liefert

$$\mathrm{tg}^2\theta_1 = \frac{m}{n}, \quad \sin^2\theta_1 = \frac{m}{m+n}, \quad \cos^2\theta_1 = \frac{n}{m+n}$$

daher

$$u_1 = \frac{m^m . n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

Für $\theta = 45^0 = \theta_2$ wird

$$u_2 = \frac{.1}{2^{m+n}}$$

In dem besonderen Falle, dass $n = m$ wäre, fände sich $\theta_1 = \theta_2 = 45^0$ und $u_1 = u_2$.

Betrachtet man die Bögen θ als Abscissen und die u als Ordinaten einer Curve, so berührt diese die θ Axe an beiden Enden.

Zieht man im Abstande λ parallel zur Abscissenaxe die Gerade PP', so bilden die Abscissen der Durchschnittspunkte P, P' die Lösungen der obigen Gleichung.

Ist λ gleich dem Maximalwert u_1, so hat die Gleichung (dritte Form, § 1.) 2 gleiche Wurzeln, nämlich

$$x^{m+n} = f\,\mathrm{tg}^2\theta_1 = \frac{fm}{n}$$

Wenn $\lambda > u$, so hat die Gleichung keine positive Wurzel.

Dagegen hat die Gleichung stets 2 positive Wurzeln, wenn $\lambda < u_1$.

Man erkennt, dass, wenn $m > n$ und λ zwischen u_1 und u_2 liegt, beide Werte von θ grösser sind als 45^0; es liegt nämlich

der eine Wert zwischen 45^0 und θ_1, also A_1 zwischen 0,0 und $\log \frac{m}{n}$

„ andere „ „ θ_1 „ 90^0 „ $A_2 > \log \frac{m}{n}$

Ist $\lambda < u_2$, so ist der eine Wert von $\theta < 45^0$, daher $A_1 < 0{,}0$

„ „ „ andere „ „ $\theta > \theta_1$, „ $A_2 > \log \frac{m}{n}$

Ebenso zeigt sich, wenn $m < n$, dass, wenn λ zwischen u_1 und u_2 liegt, beide Werte von $\theta < 45^0$ sind und zwar der eine Wert $< \theta_1$, der andere zwischen θ_1 und 45^0 liegt. Ist $\lambda < u_2$, so ist der eine Wert von $\theta < \theta_1$, der andere $> 45^0$.

Die negativen Wurzeln der Gleichung bestimmt man dadurch, dass man $x = -y$ setzt, und die positiven Wurzeln der umgeformten Gleichung nach den oben gegebenen Vorschriften aufsucht.

§ 3.

Imaginäre Wurzeln.

Dividirt man die Gleichung

$$X = x^{m+n} + e \cos \varepsilon x^m + f \cos \varphi = 0$$

durch das erste Glied, so wird

$$1 + e \cos \varepsilon x^{-n} + f \cos \varphi x^{-m-n} = 0$$

Wird eine imaginäre Wurzel derselben durch

$$x = r(\cos \varrho + i \sin \varrho)$$

bezeichnet und dieser Wert eingesetzt, so findet sich:

$$1 + er^{-n} \cos\varepsilon \cos n\varrho + f \cos\varphi r^{-m-n}.\cos(m+n)\varrho - i[er^{-n} \cos\varepsilon \sin n\varrho + fr^{-m-n} \cos\varphi.\sin(m+n)\varrho] = 0$$

Hieraus folgt

$$er^{-n} \cos \varepsilon \sin n\varrho + fr^{-m-n} \cos \varphi \sin(m+n)\varrho = 0$$

$$r^m = -\frac{f\cos\varphi\sin(m+n)\varrho}{e\cos\varepsilon\sin n\varrho}$$

Dividirt man die Gleichung $X=0$ durch $f\cos\varphi$ und setzt den obigen Wert von x ein, so wird

$$r^{m+n}.\sin(m+n)\varrho + e\cos\varepsilon\, r^m \sin m\varrho = 0$$

$$r^n = -\frac{e\cos\varepsilon\sin m\varrho}{\sin(m+n)\varrho}$$

Der erste Wert von r zur $n$ten, der andere zur $m$ten Potenz erhoben, gibt

$$r^{mn} = (-1)^n.\frac{f^n\cos\varphi^n\sin(m+n)\varrho^n}{e^n\cos\varepsilon^n\sin n\varrho^n} = (-1)^m.\frac{e^m\cos\varepsilon^m\sin m\varrho^m}{\sin(m+n)\varrho^m},$$

daraus

$$\frac{1}{\lambda} = (-1)^{m+n}.\frac{\cos\varphi^n}{\cos\varepsilon^{m+n}}.\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m\sin n\varrho^n}$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf ϱ aufzulösen, wobei es genügt, die zwischen den Grenzen 0 und 90° liegenden Werte von ϱ zu bestimmen, da, wenn eine imaginäre Wurzel bekannt ist, auch sogleich noch eine zweite angegeben werden kann. Eliminirt man noch die Grösse aus den Werten für r^m und r^n, so findet sich

$$r^{m+n} = f\cos\varphi\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}.$$

§ 4.

Nach den Ausführungen des § 3. ergeben sich folgende Regeln zur Bestimmung der imaginären Wurzeln einer dreigliedrigen Gleichung:

Erste Form.

$$x^{m+n} + ex^m - f = 0$$

In der Gl. $X=0$ des § 3. ist zu setzen $\varepsilon=0$, $\varphi=180^0$, dadurch wird

$$\frac{1}{\lambda} = (-1)^m\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m\sin n\varrho^n},\quad r^{m+n} = -f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

Zweite Form.

$$x^{m+n} - ex^m - f = 0$$

Setzt man $\varepsilon = 180^0$ und $\varphi = 180^0$, so wird

$$\frac{1}{\lambda} = (-1)^n\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m\sin n\varrho^n},\quad r^{m+n} = -f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

Dritte Form.

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0, \quad \varepsilon = 180^0, \quad \varphi = 0$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m \sin n\varrho^n}, \quad r^{m+n} = f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}.$$

Vierte Form.

$$x^{m+n} + ex^m + f = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \varphi = 0$$

$$\frac{1}{\lambda} = (-1)^{m+n}\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m \sin n\varrho^n}, \quad r^{m+n} = f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

In allen 4 Fällen erhält man zu jedem Werte von ϱ die beiden Wurzeln

$$x = r(\cos\varrho \pm i\sin\varrho).$$

§ 5.

Noch ist zu zeigen, wie die transcendente Gleichung

$$\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m \sin n\varrho^n} = \frac{1}{\lambda}$$

aufgelöst werden kann. Wir setzen y an die Stelle von $\frac{1}{\lambda}$ und stellen uns die Aufgabe, die entsprechende Curve zu construiren, indem die Bögen ϱ als Abscissen betrachtet werden.

Für $\varrho = 0$ wird $y = \frac{0}{0}$. Entwickeln wir die Sinus nach der Form

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120}\cdots\right)$$

so wird

$$\sin m\varrho^m = m^m\varrho^m\left[1 - \frac{m^3}{6}\varrho^2 + \frac{m^5(5m-2)}{360}\varrho^4\ldots\right]$$

$$\sin n\varrho^n = n^n\varrho^n\left[1 - \frac{n^3}{6}\varrho^2 + \frac{n^5(5n-2)}{360}\varrho^4\ldots\right]$$

$$\sin m\varrho^m . \sin n\varrho^n = m^m . n^n . \varrho^{m+n}\left[1 - \frac{m^3+n^3}{6}\varrho^2\ldots\right]$$

$$\sin(m+n)\varrho^{m+n} = (m+n)^{m+n} . \varrho^{m+n}\left[1 - \frac{(m+n)^3}{6}\varrho^2\ldots\right]$$

$$y = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m . n^n}\left[1 - \tfrac{1}{2}mn(m+n)\varrho^2\ldots\right]$$

Setzt man hier $\varrho = 0$ und bezeichnet den entsprechenden Wert von y durch y_0

$$y_0 = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m \cdot n^n}$$

Nehmen wir von

$$y = \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m \sin n\varrho_n}$$

die Logarithmen und differentiiren, so wird

$$\frac{dy}{d\varrho} = y[(m+n)^2 \cot(m+n)\varrho - m^2 \cot m\varrho - n^2 \cot n\varrho]$$

und weil

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^2 \dots$$

$$\frac{dy}{d\varrho} = -mn(m+n)[\varrho + \tfrac{1}{9}(m^2+mn+n^2)\varrho^3 \dots]y$$

$$\frac{d^2y}{d\varrho^2} = -mn(m+n)\left[\varrho + \frac{m^2+mn+n^2}{9}\varrho^3 \dots\right]\frac{dy}{d\varrho}$$
$$-mn(m+n)\left[1 + \frac{m^2+mn+n^2}{3}\varrho^2 \dots\right]y$$

Für $\varrho = 0$ wird $\frac{dy}{d\varrho} = 0$. Die Curve schneidet also die Ordinatenaxe in B im Abstande $AB = y_0$ vom Anfangspunkte und eine durch B geführte Parallele zur Abscissenaxe ist eine Tangente.

y wird $= 0$ für $\varrho = \frac{\pi}{m+n}$; dafür ist $\frac{dy}{d\varrho} = 0$ und auch $\frac{d^2y}{d\varrho^2} = 0$.

Macht man also $AC = \frac{\pi}{m+n}$, so geht die Curve durch C, wo gleichzeitig AC Tangente ist. Zwischen A und C liegt jedenfalls ein Wendepunkt, ausserdem kann C stets möglicher Weise ein Wendepunkt sein. Um darüber zu entscheiden, sind die Ordinaten der Nachbarpunkte von C zu untersuchen. Nur dann, wenn dieselben verschiedene Vorzeichen haben, hat C die bezeichnete Eigenschaft. Zu dem Zweck setzen wir

$$\varrho = \frac{\pi}{m+n} + \alpha,$$

also

$$\sin(m+n)\varrho = \sin[\pi + (m+n)\alpha] = \cos\pi \sin(m+n)\alpha,$$

hier soll α einen sehr kleinen Bogen bedeuten. Dadurch wird

$$y = \frac{(-1)^{m+n}.\sin(m+n)\alpha^{m+n}}{\sin\left(\frac{m\pi}{m+n}+m\alpha\right)^m \sin\left(\frac{n\pi}{m+n}+n\alpha\right)^n}$$

Das Vorzeichen des Zählers entscheidet über das von y, da die Bögen im Nenner kleiner sind als π.

Wenn $(m+n)$ eine gerade Zahl, so ist y für positive und negative α stets positiv.

Wenn $(m+n)$ eine ungerade Zahl, so erhält y verschiedene Vorzeichen, je nachdem man α positiv oder negativ nimmt, daher kann nur in letzterem Falle C ein Wendepunkt sein.

Die Curve trifft noch an mehreren Stellen mit der Abscissenaxe zusammen; man erhält die betreffenden Punkte aus der Bedingung $\varrho = \frac{k\pi}{m+n}$, wo der Reihe nach $k = 1, = 2, = 3$ zu setzen ist. Für alle diese Stellen ist $\frac{dy}{d\varrho}$ und $\frac{d^2y}{d\varrho^2} = 0$, daher findet jedesmal eine Berührung mit der Abscissenaxe statt, ausserdem können diese Punkte auch Wendepunkte sein. Setzt man ferner $\varrho = \frac{\pi}{m}, = \frac{2\pi}{m}, = \frac{3\pi}{m}$ ... und auch $\varrho = \frac{\pi}{n}, = \frac{2\pi}{n}$ ..., so wird für alle diese Werte $y = \infty$, d. h. die durch diese Punkte der Abscissenaxe geführten Ordinaten sind Asymptoten der Curve. Letztere besteht daher aus einer Reihe von Zweigen, welche durch Asymptoten getrennt sind.

Wenn $(m+n)$ eine gerade Zahl, so liegen diese Zweige abwechselnd ober- und unterhalb der Abscissenaxe.

Ist dagegen $(m+n)$ ungerade, so liegen stets beide Teile eines Zweiges zu verschiedenen Seiten der Abscissenaxe.

Um dies nachzuweisen, betrachten wir zuerst den Fall, dass $(m+n)$ eine gerade Zahl ist. Dann sind stets m und n ungerade Zahlen, da sie keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Wir schreiben jetzt:

$$y = \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}.\sin m\varrho.\sin n\varrho}{\sin m\varrho^{m+1}.\sin n\varrho^{n+1}}$$

$$= \left[\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^{m+1}.\sin n\varrho^{n+1}}\right].\sin m\varrho.\sin n\varrho$$

Der in [ ] gesetzte Factor ist stets positiv, daher stimmt das Zeichen von y mit dem des Products der beiden Sinus überein.

Setzt man

$$\varrho = \frac{k\pi}{m+n} + \alpha,$$

also

$$m\varrho = \frac{k\pi m}{m+n} + m\alpha$$

$$\sin m\varrho = \sin\frac{k\pi m}{m+n} + m\alpha . \cos\frac{k\pi m}{m+n} - \tfrac{1}{2}m^2\alpha^2 . \sin\frac{k\pi m}{m+n} \ldots$$

Den Zuwachs α stellen wir uns so klein vor, dass nur die erste Potenz zu beachten ist

$$\sin n\varrho = \sin\frac{k\pi n}{m+n} + n\alpha\cos\frac{k\pi n}{m+n}$$

$$\sin m\varrho . \sin n\varrho = \sin\frac{k\pi m}{m+n}\,\sin\frac{k\pi n}{m+n} + m\alpha\sin\frac{k\pi n}{m+n}\cdot\cos\frac{k\pi m}{m+n}$$
$$+ n\alpha\sin\frac{k\pi m}{m+n}\cdot\cos\frac{k\pi n}{m+n} = S_k$$

Da nun allgemein

$$\sin x . \sin y = \tfrac{1}{2}\cos(x-y) - \tfrac{1}{2}\cos(x+y)$$
$$\sin x . \cos y = \tfrac{1}{2}\sin(x-y) + \tfrac{1}{2}\sin(x+y),$$

so wird

$$S_k = -\tfrac{1}{2}\cos k\pi + \tfrac{1}{2}\cos\frac{k\pi(m-n)}{m+n} - \frac{m-n}{2}\alpha . \sin\frac{k\pi(m-n)}{m+n}$$

$$k=1 \quad S_1 = \left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{m-n}{m+n}\right)^2 - \frac{m-n}{2}\alpha\sin\pi\frac{m-n}{m+n}$$

$$k=2 \quad S_2 = -\left(\sin\pi\frac{m-n}{m+n}\right)^2 - \frac{m-n}{2}\alpha\sin 2\pi\frac{m-n}{m+n}$$

$$k=3 \quad S_3 = \left(\cos\frac{3\pi}{2}\frac{m-n}{m+n}\right)^2 - \frac{m-n}{m+n}\alpha\sin 3\pi\frac{m-n}{m+n}$$

$$k=4 \quad S_4 = -\left(\sin 2\pi\frac{m-n}{m+n}\right)^2 - \frac{m-n}{2}\alpha\sin 4\pi\frac{m-n}{m+n}$$

Das zweite Glied hat, da α sehr klein, keinen Einfluss auf das Vorzeichen der S.

Hiernach sind die Ordinaten der beiderseitigen Nachbarpunkte von C, C', C'' entweder alle positiv, oder alle negativ; es können also hier keine Wendepunkte vorkommen.

§ 6.

Ist $(m+n)$ eine ungerade Zahl, dann ist

entweder m gerade und n ungerade
oder n „ „ m „

Nehmen wir an, m sei gerade, so ist $(n+1)$ gleichfalls eine gerade Zahl.

$$y = \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n} . \sin n\varrho}{\sin m\varrho^m . \sin n\varrho^{n+1}}$$

Um über das Zeichen von y zu entscheiden, braucht man nur den Zähler, den wir durch Z bezeichnen wollen, zu beachten, da der Nenner jedenfalls positiv ist.

Ausserdem lassen wir den Exponenten $(m+n)$ weg, da er auf das Vorzeichen ohne Einfluss ist. Setzen wir noch

$$\varrho = \frac{k\pi}{m+n} + \alpha,$$

daher

$$\sin(m+n)\varrho = \sin[k\pi + (m+n)\alpha] = \cos k\pi \sin(m+n)\alpha,$$

so wird

$$Z = \cos k\pi . \sin(m+n)\alpha . \sin n\varrho = \cos k\pi \sin\left(\frac{k\pi n}{m+n} + n\alpha\right) .$$
$$\sin(m+n)\alpha$$

Z und also auch y erhalten entgegengesetzte Vorzeichen, wenn man dem α einmal einen positiven, das andere mal einen negativen Wert beilegt, daher sind alle in der Abscissenaxe liegenden Punkte Wendepunkte.

Setzt man noch

$$\cos k\pi \sin\left(\frac{k\pi n}{m+n} + n\alpha\right) = Q,$$

so ist, unter der Voraussetzung, dass Q positiv ist:

für positive α der Wert von y positiv
„ negative α „ „ „ y negativ.

Ist dagegen Q negativ, so ist für positive α der Wert von y negativ. und für negative α der Wert von y positiv.

Wäre n gerade und m ungerade, so dürfte man in dem Ausdruck für Q nur m an die Stelle von n setzen und die gleichen Schlüsse ziehen.

Zur Anwendung dieser Regeln soll die Gestalt der Curve für den Fall bestimmt werden, dass $m = 4$ und $n = 5$ sei.

Für $k = 1$ wird $Q = -\sin\left(\frac{5}{9}\pi + 5\alpha\right)$

„ $k = 2$ „ $Q = \sin\left(\frac{10}{9}\pi + 5\alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{9} + 5\alpha\right)$

„ $k = 3$ „ $Q = -\sin\left(\frac{15}{9}\pi + 5\alpha\right) = \sin\left(\frac{6}{9}\pi + 5\alpha\right)$

„ $k = 4$ „ $Q = \sin\left(\frac{20}{9}\pi + 5\alpha\right) = \sin\left(\frac{2}{9}\pi + 5\alpha\right)$

Hat man nach diesen Andeutungen die Curve aufgezeichnet und zieht im Abstande $= \frac{1}{\lambda}$ eine Parallele zur Abscissenaxe, so sind die Abscissen der der Durchschnittspunkte P_1, P_2, P_3 die gesuchten Werte des Bogens ϱ, welche zur Berechnung der imaginären Wurzeln erforderlich sind. In dem vorliegenden Beispiel wären also 3 Paare imaginärer Wurzeln vorhanden, und da $m + n = 9$ ist, 3 reelle Wurzeln. Hätte dagegen $\frac{1}{\lambda}$ einen kleineren Wert als y_0, so erhielte man 4 Durchschnittspunkte, folglich 8 imaginäre und nur eine reelle.

Erscheint die Gleichung zur Bestimmung von ϱ in der Form

$$-\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m \,.\, \sin n\varrho^n} = \frac{1}{\lambda}$$

so hat die Curve gerade die entgegengesetzte Lage. Hier ist es am einfachsten, zunächst das negative Zeichen ausser acht zu lassen und dann den Wert von $\frac{1}{\lambda}$ unterhalb der Abscissenaxe aufzutragen.

§ 7.

Uebersichtliche Zusammenstellung der Regeln zur Auflösung der dreigliedrigen Gleichungen.

Die folgenden Vorschriften zeigen, wie die positiven und imaginären Wurzeln gefunden werden. Um die negativen zu bestimmen,

setzt man $x = -y$ und sucht von der umgeformten Gleichung die positiven Wurzeln.

Werden diese mit dem negativen Vorzeichen versehen, so sind es Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.

In dem Folgenden ist immer

$$\lambda = \frac{f^n}{e^{m+n}}.$$

Erste Form.

$$x^{m+n} + ex^m - f = 0$$

$$mA + nB = \log\lambda, \quad \log x = \frac{\log e + A}{n}$$

Aus der Gleichung

$$(-1)^m \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m . \sin n\varrho^n} = \frac{1}{\lambda}$$

sind die zwischen 0 und 90⁰ liegenden Werte von ϱ zu bestimmen.

$$r^{m+n} = -f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

oder

$$r^m = \frac{f\sin(m+n)\varrho}{e\sin n\varrho}$$

Letztere Formel entscheidet über das Vorzeichen von r, wenn $(m+n)$ eine gerade Zahl.

$$x = r\cos\varrho \pm ir\sin\varrho.$$

Zweite Form.

$$x^{m+n} - ex^m - f = 0$$

$$nA + mB = \log\lambda, \quad \log x = \frac{\log f - \log e - A}{m}$$

$$(-1)^n \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m . \sin n\varrho^n} = \frac{1}{\lambda},$$

daraus die Werte von ϱ zwischen 0 und 90⁰.

$$r^{m+n} = -f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

oder

$$r^m = -\frac{f\sin(m+n)\varrho}{e\sin n\varrho}$$

$$x = r\cos\varrho \pm ir\sin\varrho$$

Dritte Form.

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0.$$

Hier sind 4 Fälle zu unterscheiden:

1. $\frac{1}{\lambda} < \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m . n^n}$, die Gleichung hat keine positive Wurzel,

2. $\frac{1}{\lambda} = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m . n^n}$, „ „ „ 2 gleiche „ Wurzeln,

nämlich

$$x^{m+n} = f\frac{m}{n}$$

oder

$$x^n = \frac{em}{m+n}$$

3. $\frac{1}{\lambda} > \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m . n^n}$ und nicht grösser als 2^{m+n}, 2 positive Wurzeln

$$mA - (m+n)B = \log\lambda, \quad \log x = \frac{\log f + A}{m+n}$$

$$\alpha) \quad m > n; \quad A_1 > 0{,}0 \text{ und } < \log\frac{m}{n}$$

$$A_2 > \log\frac{m}{n}$$

$$\beta) \quad m < n; \quad A_1 < \log\frac{m}{n}$$

$$A_2 > \log\frac{m}{n} \text{ und } < 0{,}0$$

4. $\frac{1}{\lambda} > 2^{m+n}$, 2 positive Wurzeln.

$$mA - (m+n)B = \log\lambda, \; \log x = \frac{\log f + A}{m+n}$$

$$\alpha) \quad m > n, \quad A_1 < 0{,}0$$

$$A_2 > \log\frac{m}{n}$$

$$\beta) \quad m < n, \quad A_1 < \log\frac{m}{n}$$

$$A_2 > 0{,}0$$

$$\frac{\sin(m \times n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m . \sin n\varrho^n} = \frac{1}{\lambda},$$

daraus die Werte von ϱ zwischen 0 und 90⁰.

$$r^{m+n} = \frac{f \sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

oder

$$r^m = \frac{f \sin(m+n)\varrho}{e \sin n\varrho}$$

$$x = r\cos\varrho \pm ir\sin\varrho.$$

Vierte Form.

$$x^{m+n} + ex^m + f = 0.$$

Diese Gleichung hat keine positive Wurzel.

$$(-1)^{m+n} \cdot \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin(m\varrho^m \cdot \sin n\varrho^n} = \frac{1}{\lambda},$$

daraus die Werte von ϱ zwischen 0 und 90°.

$$r^{m+n} = f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

oder

$$r^m = -\frac{f \sin(m+n)\varrho}{e \sin n\varrho}$$

$$x = r\cos\varrho \pm ir\sin\varrho.$$

§ 8.

Zur Erläuterung der Vorschriften des § 7. sollen sämmtliche Wurzeln der folgenden Gleichung bestimmt werden.

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0 \qquad \text{(Erste Form)}$$

$e = 28,\ f = 480,\ m = 4,\ n = 3 \qquad \log\lambda = 7,913\,6175$

$$4A + 3B = 7,913\,6175.$$

Um diese Gleichung aufzulösen, beginnt man die Arbeit am zweckmässigsten mittelst einer dreistelligen Tafel der Additions-logarithmen *)

A	B	$4A+3B$
9.4	0.097	7.891
9.5	0.119	8.375

Der Wert von A liegt hiernach zwischen 9.4 ... 9.5, man kann ihn durch Anwendung der regula falsi bestimmen. Nach derselben ist

*) Der Verfasser kann hier seine Tafel der fünfstelligen Logarithmen der Zahlen etc. empfehlen, die in Darmstadt im Verlag von A. Bergsträsser 1883 erschienen. Seite 84 sind die Additionslogarithmen auf 3 Decimalen und Seite 69 bis 82 auf 5 Decimalen angegeben.

$$9{,}5-9{,}4 : 8{,}375-7{,}891 = A-9{,}4 : 7{,}914-7{,}891$$
$$0{,}1 : 0{,}484 = A-9{,}4 : 0{,}023$$

$$A = 9{,}4+0{,}1 . \frac{0.023}{0.484} = 9.4048$$

Wendet man jetzt eine fünfstellige Tafel der Additionslogarithmen an, so ist

A	B	$4A+3B$	
9.404	0.09813	7.91039	hieraus genauer $A = 9{,}404702$
9.405	0.09833	7.91499	

Wird A noch genauer verlangt, so wende man die siebenstellige Tafel von Wittstein *) an. Durch diese hat man

A	B	$4A+3B$
9.4047	0.098 2705	7.913 6115
9.4048	0.098 2907	7.914 0721

Nach der Regula falsi erhält man daraus

$$\begin{aligned} A &= 9.404\,7013 \\ +\log e &= 1.447\,1580 \\ \hline 3\log x_1 &= 0.851\,8593 \\ \log x_1 &= 0.283\,9531 \end{aligned}$$

$$x_1 = 1{,}922\,8841$$

Um die negativen Wurzeln zu erhalten, setzen wir $x = -y$ und bekommen

$$y^7-28y^4+480 = 0 \quad \text{(Dritte Form)}$$

$$e = 28, \quad f = 480, \quad m = 4, \quad n = 3;$$

$$y_0 = \frac{7^7}{4^4 . 3^3} = \frac{823\,543}{6912} = 119{,}147; \quad \frac{1}{\lambda} = 122{,}006, \quad 2^{m+n} = 2^7 = 128.$$

Hier sind also die Vorschriften Nro. 3, α) der dritten Form anzuwenden.

$$\log \frac{m}{n} = 0{,}12494.$$

Daher

$$A_1 < 0{,}125 \quad \text{und} \quad A_2 > 0{,}125$$

---

*) Siebenstellige Gauss'sche Logarithmen von Dr. Th. Wittstein. Hannover. Hahn'sche Hofbuchhandlung. 1866.

Durch stufenweise Anwendung der drei-, fünf- und siebenstelligen Tafeln der Additionslogarithmen erhält man unter Zuhülfenahme der Regula falsi die genannten Werte:

$$
\begin{array}{rlcrl}
A_1 & = 0.052\,9417 & \qquad & A_2 & = 0.197\,5072 \\
\log f & = 2.681\,2412 & & \log f & = 2.681\,2412 \\
\hline
7 \log y_1 & = 2.734\,1829 & & 7 \log y_2 & = 2.8787\,484
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\log y_1 &= 0{,}390\,5976, \quad x_2 = -y_1 = -2{,}458\,0890, \\
\log y_2 &= 0.411\,2498, \quad x_3 = -y_2 = -2{,}577\,8036
\end{aligned}
$$

Um die imaginären Wurzeln zu erhalten, ist zunächst folgende Gleichung aufzulösen

$$\frac{\sin 7\varrho^7}{\sin 4\varrho^4 \sin 3\varrho^3} = 122.00638$$

Um die Gleichung

$$y = \frac{\sin 7\varrho^7}{\sin 4\varrho^4 \sin 3\varrho^3}$$

nach den Andeutungen der §§ 6. und 7. zu construiren *), so wird

$$
\begin{array}{llllll}
y = 0 & \text{für} & \varrho = 25\tfrac{5}{7}^0, & = 51\tfrac{3}{7}^0 & \text{und} & = 77\tfrac{1}{2}^0 \\
y = \infty & ,, & \varrho = 45^0, & = 60^0 & ,, & = 90^0
\end{array}
$$

Hiernach bestimmen sich die Berührungspunkte in der Abscissenaxe und die Asymptoten. Ferner ist $y_0 = 119.147$. Die Grösse Q des § 7. wird hier

$$Q = \cos k\pi \,.\, \sin\left(\frac{3k\pi}{7} + 3\alpha\right)$$

$$Q_1 = -\sin(\tfrac{3}{7}\pi + 3\alpha): \qquad Q_2 = \sin(\tfrac{6}{7}\pi + 3\alpha);$$

$$Q_3 = -\sin(\tfrac{9}{7}\pi + 3\alpha) = \sin(\tfrac{2}{7}\pi + 3\alpha)$$

Danach erhält man die einzelnen Teile der Curve.

Den Durchschnittspunkten P und P' mit der im Abstand $\frac{1}{\lambda}$ zur

---

*) Sebstverständlich ist es nicht notwendig, die Curve zu construiren, sondern es genügt vollständig, sich eine Skizze zu entwerfen, indem man auf eine Gerade, dem Augenmaasse nach 9 gleiche Teile aufträgt und mit 0, 10, 20 ... 90 beziffert. Die Dimensionen y_0 und $\frac{1}{\lambda}$ können nach einem ganz willkürlichem Maasse bestimmt werden, oder man hat eigentlich nur darauf zu achten, ob $\frac{1}{\lambda}$ grösser oder kleiner ist als y_0.

Abscissenaxe parallel gezogenen Geraden entsprechen als Abscissen beiläufig die Werte 58° und 87°.

Man nimmt zuerst $\varrho = 58^0$ und berechnet y, wobei man mit dreistelligen *) Logarithmen den Anfang macht. Durch mehrere Versuche erhält man leicht 2 Grenzen, zwischen welchen der richtige Wert von ϱ liegt. Durch Anwendung der Regula falsi und durch stufenweisen Uebergang zu fünf- und siebenstelligen Logarithmen erhält man meist sehr schnell den genauen Wert von ϱ. So findet man z. B. hier

mittelst der dreistelligen Tafel $\varrho = 57^0\,41'$
„ „ fünf „ „ $\varrho = 57^0\,41'\,41{,}5''$
„ „ sieben „ „ $\varrho = 57^0\,41'\,41{,}366$

also wird

$$\begin{aligned} \log(-f) &= 2.681\;2412_n \\ \log\sin m\varrho &= 9.889\;1425_n \\ \hline &\ 2.570\;3837 \\ \log\sin n\varrho &= 9.080\;6477 \\ \hline 7\log r &= 3.489\;7360 \\ \log r &= 0.498\;5337 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\cos\varrho &= 9.727\;8898 \\ \log r &= 0.498\;5337 \\ \log\sin\varrho &= 9.926\;9664 \\ \hline \log r\cos\varrho &= 0.226\;4235 \\ \log r\sin\varrho &= 0.425\;5001 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix} x_4 \\ x_5 \end{matrix}\right\} = 1.684\;3159 \pm 2.663\;7908 i$$

Für das letzte Wurzelpaar findet sich

$$\varrho = 86^0\,19'\,13\,342'', \quad \log r = 0{,}299\;1866_n$$

$$\left.\begin{matrix} x_6 \\ x_7 \end{matrix}\right\} = -0.127\;8113 \mp 1.987\;4234 i.$$

§ 9.

Als zweites Beispiel soll eine Gleichung von geradem Grade aufgelöst werden.

$$x^4 - 16x - 12 = 0 \quad \text{(Zweite Form)}$$

---

*) Die eben angeführte 5 stellige Logarithmentafel des Verfassers enthält Seite 85 die Logarithmen der trigonometrischen Functionen auf 3 Decimalen für jeden Grad des Quadranten.

$$e = 16 \quad f = 12, \quad m = 1, \quad n = 3; \quad \log\lambda = 8.421\,0638$$

$$\log\frac{1}{\lambda} = 1.578\,9362.$$

$$3A + B = 8.421\,0638.$$

Man findet für A der Reihe nach die Werte 9.438; 9.43857 und endlich

$$A = 9.438\,5725$$

und mit diesem Wert

$$x_1 = 2.732\,0508.$$

Die Gleichung hat auch eine negative Wurzel; dafür ist

$$y^4 + 16y - 12 = 0 \quad \text{(Erste Form)}$$

$$A + 3B = 8.421{,}0638.$$

Man erhält

$$A = 8.389, \quad A = 8.389\,50$$

und endlich

$$A = 8.389\,5035; \quad x_2 = -y = -0.732\,0508.$$

Zur Bestimmung der imaginären Wurzeln ist zunächst folgende Gleichung aufzulösen:

$$-\frac{\sin 4\varrho^4}{\sin\varrho\sin 3\varrho^3} = 37.925\,93.$$

Wir setzen

$$y = \frac{\sin 4\varrho^4}{\sin\varrho\,\sin 3\varrho^3}$$

und haben

$$y = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = 45^0 \quad \text{und} \quad = 90^0$$

$$y = \infty \quad ,, \quad \varrho = 60^0.$$

Wegen des negativen Vorzeichens trägt man hier $\frac{1}{\lambda}$ abwärts auf und sieht, dass der Wert von ϱ zwischen 60^0 und 70^0 liegt.

Wir beginnen die Rechnung mit dem Werte 65^0 und erhalten für ϱ stufenweise die Werte $65^0\,54'$; $65^5\,54'$, $18.2''$ und endlich

$$\varrho = 65^0\,54'\,18.569''$$

$$m\varrho = \varrho, \quad n\varrho = 197^0\,42'\,55.707'', \quad 4\log r = 1.556\,3021.$$

Die Formel

$$r = -\frac{f\sin 4\varrho}{e\sin 3\varrho}$$

sagt uns, dass r negativ ist, daher

$$\log r = 0.389\,0755_n$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = = -0.999\,99954 \mp 2.236\,06598i.$$

§ 10.

Zum Schlusse soll noch die Gleichung

$$z^9 + 345 z^3 - 12 = 0$$

aufgelöst werden. Hier setzt man $z^3 = x$ und erhält

$$x^3 + 345x - 12 = 0 \quad \text{(Erste Form)}$$

$$e = 345, \quad f = 12, \quad m = 1, \quad n = 2, \quad \log\lambda = 4.544\,9052 - 10$$

$$A + 2B = 4.544\,9052 - 10,$$

daraus

$$A = 4.544\,9022 - 10$$

$$\log x_1 = \frac{\log e + A}{2} = 8.541\,3607; \quad x_1 = 0.034\,78249$$

Die Gleichung hat nur diese eine reelle Wurzel. Zur Bestimmung der beiden imaginären Wurzeln dienen die Gleichungen:

$$-\frac{\sin 3\varrho^3}{\sin\varrho \sin 2\varrho^2} = 285\,164.1; \quad r^3 = -\frac{f \sin\varrho}{\sin 2\varrho}; \quad x = r(\cos\varrho \pm i \sin\varrho)$$

Wir setzen wieder

$$y = \frac{\sin 3\varrho^3}{\sin\varrho \sin 2\varrho^2}; \quad y_0 = \frac{3^3}{2^2} = \frac{27}{4} = 6.75$$

Für $\varrho = 60^0$ wird $y = 0$ und für $\varrho = 90^0$ wird $y = \infty$.

Da $y = -\frac{1}{\lambda}$, so ist $\frac{1}{\lambda}$ abwärts aufzutragen.

Wegen des sehr grossen Wertes von $\frac{1}{\lambda}$ kann ϱ nur wenig kleiner sein als 90^0; in der Tat findet sich

$$\varrho = 89^0\,56'\,46.871''.$$

Damit erhält man

$$\log r = 1.268\,9096_n.$$

Die imaginären Wurzeln sind

$$-0.017\,3913 \mp 19.360\,1786 i.$$

Nun sind noch die Gleichungen

$$z^3 = x_1 \quad \text{und} \quad z^3 = r(\cos\varrho \pm i \sin\varrho)$$

aufzulösen.

Schreibt man

$$z = \sqrt[3]{x_1} \cdot \sqrt[3]{1},$$

so ist bekanntlich:

$$z = \left[\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right]\sqrt[3]{x_1}$$

Man setzt der Reihe nach $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ und findet

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{x_1} \\ z_2 &= (\cos 120^0 + i\sin 120^0)z_1 = -(\cos 60^0 - i\sin 60^0)z_1 \\ z_3 &= (\cos 240^0 + i\sin 240^0)z_1 = -(\cos 60^0 + i\sin 60^0)z_1 \end{aligned}$$

$$z_1 = 0.326\,4276 \qquad \left.\begin{matrix} z_2 \\ z_3 \end{matrix}\right\} = -0.163\,2138 \pm 0.2826\,946i$$

Die andere Gleichung für z^3 gibt zunächst:

$$z = (\cos\tfrac{1}{3}\varrho \pm i\sin\tfrac{1}{3}\varrho)\sqrt[3]{r}.$$

Hier sind die beiden Fälle zu unterscheiden, ob r positiv oder negativ ist.

I. r sei positiv.

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{r}\,.\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)(\cos\tfrac{1}{3}\varrho \pm i\sin\tfrac{1}{3}\varrho) \\ &= \left[\cos\frac{2k\pi \pm \varrho}{3} + i\sin\frac{2k\pi \pm \varrho}{3}\right]\sqrt[3]{r} \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck braucht man nur das e i n e Vorzeichen vor dem ϱ beizubehalten, da, wenn eine Gleichung die Wurzel $a + bi$ hat, ihr auch noch die andere $a - bi$ zukommt.

Hiernach kann der Wert für z in folgender Weise geschrieben werden:

$$z = \left[\cos\frac{2k\pi + \varrho}{3} \pm i\sin\frac{2k\pi + \varrho}{3}\right]\sqrt[3]{r}$$

Setzt man auch hier $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, so erhält man die 6 übrigen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

II. r sei negativ; dann ist $(-r)$ eine positive Grösse

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{-r}\,.\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{-r}\left[\cos\frac{2k+1}{3}\pi + i\sin\frac{2k+1}{3}\right]$$

$$z = \sqrt[3]{-r}\left[\cos\frac{2k+1}{3}\pi + i\sin\frac{2k+1}{3}\pi\right][\cos\tfrac{1}{3}\varrho \pm i\sin\tfrac{1}{3}\varrho]$$

$$z = \left[\cos\frac{(2k+1)\pi \pm \varrho}{3} + i\sin\frac{(2k+1)\pi \pm \varrho}{3}\right]\sqrt[3]{-r},$$

oder

$$z = \left[\cos\frac{2k+1)\pi + \varrho)}{3} \pm i\sin\frac{(2k+1)\pi + \varrho}{3}\right]\sqrt[3]{-r}.$$

In dem Beispiel dieses Paragraphen ist r negativ, daher

$$\left.\begin{matrix} z_4 \\ z_5 \end{matrix}\right\} = [\cos(60^0 + \tfrac{1}{3}\varrho) \pm i\sin(60^0 + \tfrac{1}{3}\varrho)]\sqrt[3]{-r}$$

$$\left.\begin{matrix} z_6 \\ z_7 \end{matrix}\right\} = [\cos(180^0 + \tfrac{1}{3}\varrho) \pm i\sin(180^0 + \tfrac{1}{3}\varrho)]\sqrt[3]{-r}$$

$$= -[\cos\tfrac{1}{3}\varrho \pm i\sin\tfrac{1}{3}\varrho]\sqrt[3]{-r}$$

$$\left.\begin{matrix} z_8 \\ z_9 \end{matrix}\right\} = [\cos(300^0 + \tfrac{1}{3}\varrho) \pm i\sin(300^0 + \tfrac{1}{3}\varrho)]\sqrt[3]{-r}$$

$$= [\cos(60^0 - \tfrac{1}{3}\varrho) \mp i\sin 60^0 - \tfrac{1}{3}\varrho)]\sqrt[3]{-r}$$

Werden die Zahlenwerte in diese Ausdrücke eingesetzt, nämlich $\tfrac{1}{3}\varrho = 29^0\,58'\,55.624''$, $60^0 + \tfrac{1}{3}\varrho = 89^0\,58'\,55{\cdot}624''$; $60^0 - \tfrac{1}{3}\varrho = 30^0\,1'\,4.376''$ und $\log\sqrt[3]{-r} = 0{,}422\,9699$, so finden sich die übrigen 6 Wurzeln der Gleichung $z^9 + 345z^3 - 12 = 0$ wie folgt:

$$\left.\begin{matrix} z_4 \\ z_5 \end{matrix}\right\} = \quad 0.000\,8265 \pm 2.648\,3165i$$

$$\left.\begin{matrix} z_6 \\ z_7 \end{matrix}\right\} = -2.293\,9222 \mp 1.323\,4424i$$

$$\left.\begin{matrix} z_8 \\ z_9 \end{matrix}\right\} = \quad 2.293\,0963 \mp 1.324\,8741i.$$

XVIII.

Miscellen.

1.

Eine Verallgemeinerung der Sätze von Pascal und Brianchon und das Problem von Castillon.

Wir können den Satz von Pascal auf folgende Art aussprechen. Schneiden sich in einem, einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechseck die erste und vierte und zweite und fünfte Seite in festen Punkten, so liegt der Schnittpunkt der 3. und 6. Seite auf einer festen geraden Linie, der Verbindungslinie der beiden festen Punkte. Dieser Satz nun lässt folgende Verallgemeinerung zu.

Schneiden sich in einem, einem Kegelschnitt einbeschriebenen $2n$ eck $n-1$ Paare von Gegenseiten in festen Punkten, so liegt der Schnittpunkt des n ten Paares von Gegenseiten auf einer festen geraden Linie.

Unter Gegenseite verstehen wir zwei Seiten, welche in ihrer Reihenfolge um die Zah n verschieden sind, also z. B. die 1. und $n+1$. Seite.

Wir wollen nun diesen Satz für einen speciellen Fall, nämlich für $n=4$ beweisen, und wir werden sehen, dass der Beweis für den allgemeinen Fall vollständig gleich bleiben wird. Sind M, N, O drei feste Punkte, und wir legen durch diese Punkte beliebige dem Kegelschnitt einbeschriebenen Achtecke derart, dass die 1. und 5. Seite durch M, die 2. und 6. durch N und die 3. und 7. durch O gehen, so erhalten wir auf dem Kegelschnitt 8 proj. Punktreihen A, B, C, D, E, F, G und H.

Wir können hiebei die Punkte A und E beliebig wählen, wollen aber zunächst annehmen, dass Punkt E, und somit auch die Punkte F, G, H fest seien. Wir erhalten nun als Ort des Punktes P den Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen der Büschel H, A ... und E, D ... In diesen beiden Büscheln entspricht aber wie wir sofort finden der Strahl HE sich selbst, d. h. die beiden Büschel sind perspectivisch, d. h. der Ort von P ist eine gerade Linie xy. Um zu zeigen, dass nun die Linie xy wirklich eine feste gerade Linie ist die von der Lage der Punkte E, F, G, H unabhängig ist, lassen wir den Punkt A mit einem der Schnittpunkte x oder y der geraden Linie mit dem Kegelschnitt zusammenfallen. Fällt A etwa nach x, so finden wir, dass ED durch A, also durch x gehen muss, d. h. die Punkte x und y sind zwei Ecken der durch die Punkte M, N und O bestimmten Dreiecke des Castillon'schen Problems, also von den festen Punkten des Achtecks unabhängig.

Aus dem ganzen Gang des Beweises geht aber offen hervor, dass der Satz für jedes beliebige einem Kegelschnitt einbeschriebene $2n$-eck giltig ist, und dass irgend zwei Lagen der $2n$ ecke zwei Punkte P liefern, und dass die Verbindungslinie dieser Punkte zwei Eckpunkte des Castillon'schen Vielecks durch die $n-1$ Punkte liefert.

Dehnen wir diese Sätze auf die Sätze von Brianchon aus, so finden wir ganz analog eine Construction des entsprechenden Tangenten $n$ecks eines Kegelschnitts. Der Satz, der sich in diesem Falle ergibt, lautet, wenn wir mit Hauptdiagonalen die Verbindungslinien der 1. und $n+1$ ten, 2. und $n+2$ ten u. s. w. Ecke des $2n$ seits verstehen.

Sind in einem Tangenten $2n$ seit eines Kegelschnitts n—1 Haupttangenten fest, so geht die n te durch einen festen Punkt.

Weingarten, (Württ.) im Oct. 1883.

B. Sporer.

2.

Ueber die Lage des Schwerpunkts im Viereck.

Der Beweis des im 65 ten Bande pag. 445 von mir aufgestellten Satzes über die Lage des Schwerpunkts im Viereck hat die Entwickelungen des Herrn Nöggerath in demselben Bande pag. 218 zur Grundlage; im 2 ten Hefte des 13 ten Jahrgangs von Hoffmann's Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht habe ich einen elementaren synthetischen Beweis desselben Satzes gegeben; andere elementare

Beweise von Anderen finden sich eben dort. Im Folgenden soll der Satz analytisch mit Anwendung trimetrischer Liniencoordinaten, die zu diesem Zwecke ganz besonders geeignet sind, entwickelt werden.

Wenn $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ die Gleichungen der vier Eckpunkte eines gewöhnlichen ebenen Vierecks sind, so lassen sich bekanntlich immer vier Grössen α_1, α_2, α_3, α_4 so bestimmen, dass die Identitäten

$$1)\quad \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 + \alpha_4\xi_4 \equiv 0 \quad \text{und}$$

$$2)\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \equiv 0 \quad \text{bestehen.}$$

Die Gleichung des Schnittpunkts der Diagonalen findet man, indem man $\lambda\xi_1 + \lambda_1\xi_3 \equiv \mu\xi_2 + \mu_1\xi_4 = 0$ oder $\lambda\xi_1 - \mu\xi_2 + \lambda_1\xi_3 - \mu_1\xi_4 = 0$ setzt, was mit 1) verglichen giebt: $\lambda = \alpha_1$, $\mu = -\alpha_2$, $\lambda_1 = \alpha_3$, $\mu_1 = -\alpha_4$; daher ist die gesuchte Gleichung:

$$3)\quad \alpha_1\xi_1 + \alpha_3\xi_3 \equiv -(\alpha_2\xi_2 + \alpha_4\xi_4) = 0.$$

Ferner ist die Gleichung des Mittelpunkts von 12: $\xi_1 + \xi_2 = 0$, die des Mittelpunkts von 34: $\xi_3 + \xi_4 = 0$; ein Punkt, der auf der Verbindungslinie beider liegt, hat zur Gleichung:

$$\lambda(\xi_1 + \xi_2) + \lambda_1(\xi_3 + \xi_4) = 0.$$

Ebenso hat ein Punkt, der auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte von 23 und 41 liegt, die Gleichung:

$$\mu(\xi_2 + \xi_3) + \mu_1(\xi_4 + \xi_1) = 0.$$

Sollen beide Punkte identisch sei, so muss

$$(\lambda - \mu_1)\xi_1 + (\lambda - \mu)\xi_2 + (\lambda_1 - \mu)\xi_3 + (\lambda_1 - \mu_1)\xi_4 = 0$$

sein, was geschieht, wenn man $\lambda = \lambda_1 = \mu = \mu_1$ annimmt. Die Gleichung des Punktes, in welchem sich die Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenseiten schneiden, ist demnach:

$$4)\quad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0.$$

Die Gleichungen der Schwerpunkte der Dreiecke 123 und 341 sind bezüglich:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \quad \text{und} \quad \xi_3 + \xi_4 + \xi_1 = 0,$$

ebenso die Dreiecke 412 und 234 bezüglich:

$$\xi_4 + \xi_1 + \xi_2 = 0 \quad \text{und} \quad \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0.$$

Die Verbindungslinie der zwei ersten Punkte schneidet die Verbindungslinie der zwei letzten Punkte im Schwerpunkte des Vierecks; daher hat die Gleichung des letzteren die Formen:

$$\lambda(\xi_1+\xi_2+\xi_3)+\lambda_1(\xi_3+\xi_4+\xi_1)\equiv\mu(\xi_4+\xi_1+\xi_2)+\mu_1(\xi_2+\xi_3+\xi_4)=0$$

woraus

$$(\lambda-\lambda_1-\mu)\xi_1+(\lambda-\mu-\mu_1)\xi_2+(\lambda+\lambda_1-\mu_1)\xi_3+(\lambda_1-\mu-\mu_1)\xi_4\equiv 0$$

folgt. Dies mit 1) verglichen, ergiebt die Bedingungsgleichungen:

$$\lambda-\lambda_1-\mu=\alpha_1,\quad \lambda-\mu-\mu_1=\alpha_2,\quad \lambda+\lambda_1-\mu_1=\alpha_3,$$
$$\lambda_1-\mu-\mu_1=\alpha_4,$$

deren Addition mit Benutzung von 2) die Hülfsgleichung

$$\lambda+\lambda_1-\mu-\mu_1=0$$

liefert. In Folge dessen geben die Bedingungsgleichungen nach der Reihe:

$$\mu_1=\alpha_1,\quad \lambda_1=-\alpha_2,\quad \mu=\alpha_3,\quad \lambda=-\alpha_4,$$

und die Gleichung des Schwerpunkts ist demnach:

$$5)\ \alpha_1(\xi_2+\xi_3+\xi_4)+\alpha_3(\xi_4+\xi_1+\xi_2)\equiv-\{\alpha_2(\xi_3+\xi_4+\xi_1)+\alpha_4(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\}=0$$

oder in anderer Form:

$$(\alpha_1+\alpha_3)(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4)-(\alpha_1\xi_1+\alpha_3\xi_3)$$
$$\equiv-\{(\alpha_2+\alpha_4)(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4)-(\alpha_2\xi_2+\alpha_4\xi_4)\}=0$$

woraus sofort folgt, dass der Schnittpunkt der Diagonalen D, der Schnittpunkt M der die Gegenseiten halbirenden Geraden und der Schwerpunkt S in gerader Linie liegen. Weil aber identisch

$$3\cdot\frac{(\alpha_1+\alpha_3)(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4)-(\alpha_1\xi_1+\alpha_3\xi_3)}{3(\alpha_1+\alpha_3)}\equiv 4\cdot\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4}{4}-\frac{\alpha_1\xi_1+\alpha_3\xi_3}{\alpha_1+\alpha_3}$$

ist, so muss $SD:SM=4:1$ oder $SM:MD=1:3$ sein.

Bensheim, 11. Juli 1884.

Dr. Stoll, Gymnasiallehrer.

XIX.

Elliptische Integralfunctionen und ihre geometrische, analytische und dynamische Bedeutung.

Von

Emil Oekinghaus.

Aus der Untersuchung über die Eigenschaften der analytischen Functionen der Resultanten zwischen den biquadratischen Gleichungen und ihrer Differentialquotienten sind die vorliegenden Entwickelungen hervorgegangen. Die genauere Durchsicht dieser Functionen führte auf eine Gruppe von Gleichungen, aus welchen sich die Euler'schen Identitäten und damit in Folge einer Transformation eine Reihe von Differentialformeln und Integralgleichungen ergaben, deren Anwendung auf Geometrie fast ausnahmslos auf elliptische Integrale und Functionen führte. Aus diesem Grunde haben wir die auftretenden Formen elliptische Integralfunctionen genannt. Indem wir dieselben auf den Kreis, die Lemniskate und Ellipse anwandten, resultirte eine Menge interessanter Sätze über Rectificationsverhältnisse, harmonische und andere geometrische Beziehungen dieser Curven, welche noch in Folge einer dynamischen Einkleidung eine bemerkenswerte mechanische Bedeutung so z. B. in der Theorie der elastischen Curve von J. Bernoulli, in der Pendelbewegung etc. gewannen. Ueberhaupt liessen sich diejenigen mechanischen Probleme, deren Lösung von der Integration einer elliptischen Differentialgleichung abhängt, zwangslos in den Bereich dieser Functionen ziehen. Aus diesem Gesichtspunkte haben wir ebenfalls bestimmte Curven 3. und 4. Grades betrachtet und ausser ihren harmonischen Eigenschaften besonders ihren geo-

metrisch dynamischen Zusammenhang mit dem Problem der Bewegung eines schweren Punktes in Kugel und Kreis nachgewiesen.

In allgemeinster an die Eigenschaften der Kegelschnitte sich anschliessender Betrachtung sind ferner rein analytische, von geometrischen Rücksichten freie Integralfunctionen der 1., 2. und 3. Art aufgestellt worden, welche für biquadratische und kubische Gleichungen sofort diejenigen Functionen zur Verfügung stellen, deren man zum Zwecke einer Untersuchung einer der oben genannten Curven bedarf. Da drei von einander unabhängige Functionen dieser Art entwickelt werden konnten, so war die Folge ihrer Anwendung eine nicht geringe Erweiterung der Eigenschaften namentlich der Lemniskate, des Kreises und der Kegelschnitte, welch' letztere in ihren mannigfachen Beziehungen zu den 3 Fällen der Bewegung eines Punktes im vertikalen Kreis sowie auch für die Centralbewegung eine erhöhte Bedeutung gewannen.

Auch bezüglich der Additionstheoreme für 2 und 3 elliptische Integrale wird man manches Neue finden, wie auch zum Schluss der Abhandlung ein Versuch, die eingeführten Functionen zur Auflösung der Gleichungen 3. und 4. Grades zu benutzen wenigstens ein theoretisches Interesse beanspruchen dürfte.

Erster Teil.

§ 1.

Analytische Entwickelungen.

Die aus der Verbindung der biquadratischen Gleichung und ihres Differentialquotienten hervorgehenden analytischen Gleichungen und Integrale werden die Basis bilden für die nachstehenden Entwickelungen, für welche demnach die Curve

$$1)\qquad \Delta = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$$

und deren derivirte

$$2)\qquad \frac{\partial \Delta}{\partial x} = \operatorname{tg} \tau = 4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)$$

nebst andern verwandten Formen zu Grunde gelegt werden sollen.

Wird aus beiden Gleichungen x eliminirt, so ist die Resultante

$$3)\quad \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^4 - (a^3 - 4ab + 8c)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^3$$

$$+ (4b^3 - 14abc + 18c^2 + 6a^2d - 16bd - ab^2 + 3a^3c)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^2$$

$$+ \frac{4}{27}(b^2 - 3ac + 12d)^3 - \frac{1}{27}(72bd + 9abc - 27c^2 - 27a^2d - 2b^3)^2 = 0,$$

oder abgekürzt

$$4)\quad \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^4 - A\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^3 + B\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^2 + D = 0.$$

worin das Absolutglied die Discriminante der biquadratischen Gleichung ist.

Eliminiren wir ferner aus 1) und

$$\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x} = 4x^2 - 3ax + 2b - \frac{c}{x}$$

die Unbekannte x, so erhält man

$$5)\quad \left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x}\right)^4 - \frac{a^2d - c^2}{d}\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x}\right)^3$$

$$+ \frac{3a^2bd - 8acd - 8b^2d + 32d^2 - a^2c^2 + 3bc^2}{d}\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x}\right)^2 + \frac{D}{d} = 0,$$

oder abgekürzt

$$6)\quad \left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x}\right)^4 - A_1\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x}\right)^3 + B_1\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x}\right)^2 + D_1 = 0.$$

Auf diesem Wege fortfahrend findet man

$$\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^2}\right)^4 - A_2\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^2}\right)^3 + B_2\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^2}\right)^2 + D_2 = 0,$$

$$\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^3}\right)^4 - A_3\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^3}\right)^3 + B_3\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^3}\right)^2 - D_3\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^4}\right) + D_3 = 0,$$

$$7)\quad \left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^4}\right)^4 - A_4\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^4}\right)^3 + B_4\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^4}\right)^2 - D_4 a\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^4}\right) + D_4 = 0,$$

$$7)\quad \left(x\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^4 - A'\left(x\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^3 + B'\left(x\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^2 + \frac{D'}{d}\left(x\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) + D' = 0,$$

$$\left(x^2\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^4 - A''\left(x^2\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^3 + B''\left(x^2\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^2 + \frac{c}{d^2}D''\left(x^2\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) + D'' = 0.$$

Die gegebene Darstellung hat uns also auf die Euler'schen Identitäten geführt, denn es resultiren aus 3)—7) die 5 Formen

$$\text{a)}\quad \frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = 0,$$

$$\text{b)}\quad \frac{x_1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{x_2}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{x_3}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{x_4}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = 0,$$

$$\text{c)}\quad \frac{x_1^2}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{x_2^2}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{x_3^2}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{x_4^2}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = 0,$$

$$8)\qquad \text{d)}\quad \frac{x_1^3}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{x_2^3}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{x_3^3}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{x_4^3}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = 1,$$

$$\text{e)}\quad \frac{x_1^4}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{x_2^4}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{x_3^4}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{x_4^4}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = a,$$

welchen sich noch die folgenden

$$\text{f)}\quad \frac{1}{x_1\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{1}{x_2\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{1}{x_3\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{1}{x_4\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = -\frac{1}{d}$$

$$\text{g)}\quad \frac{1}{x_1^2\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{1}{x_2^2\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{1}{x_3^2\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{1}{x_4^2\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = -\frac{c}{d^2}$$

anschliessen.

Diese Formeln sind allgemein gültig für Gleichungen $n$ten Grades. Indem wir uns hier auf den 4. und 3. Grad beschränken, wollen wir zeigen, dass die daraus abgeleiteten Integrale für die Geometrie von Bedeutung sind.

Liegt nämlich eine geometrisch-analytische Gleichung 4. Grades vor, worin ausser der Variabeln x noch andere Veränderliche y etc. enthalten sind, so gibt die Differentiation der Gleichung

$$\Delta(x, y) = 0 \tag{9}$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \Delta}{\partial y} \cdot dy = 0.$$

Nun folgt aber aus 8) a) nach Multiplication und Division der Summanden mit den entsprechenden dx

$$\Sigma \frac{dx}{\frac{\partial \Delta}{dx} dx} = 0, \tag{10}$$

welche Gleichung vermöge 9) in die Differentialformel

$$\Sigma \frac{dx}{\frac{\partial \Delta}{\partial y}} = 0 \tag{11}$$

übergeht.

Vermittelst $\Delta(xy) = 0$ kann man in 11) das darin vorkommende y fortschaffen, sofern der 2. Grad dieser Grösse nicht überschritten ist und als Resultat erhält man durch Integration dieser Differentialfunctionen folgende Formel

$$\int \frac{dx_1}{f(x_1)} + \int \frac{dx_2}{f(x_2)} + \int \frac{dx_3}{f(x_3)} + \int \frac{dx_4}{f(x_4)} = \text{Const.} \tag{12}$$

Um nun für gegebene Fälle die Function $f(x)$ gleich niederschreiben zu können, wählen wir zwei häufig auftretende Gleichungen von $\Delta(x, y)$ deren einer wir die folgende typische Form geben:

$$X_1 y^2 + 2X_2 y + X_3 = 0, \tag{13}$$

worin die X bekannte Functionen von x sind.

Nach 11) ist also

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{dx}{X_1 y + X_2} = C.$$

Aus der quadratischen Gleichung 13) folgt aber

$$X_1 y + X_2 = \sqrt{X_2^2 - X_1 X_3},$$

demnach gewinnen wir folgende Integralfuncton

$$\int \frac{dx_1}{2\sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}} + \int \frac{dx_2}{2\sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}} + \int \frac{dx_3}{2\sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}} + \int \frac{dx_4}{2\sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}} = \text{Const.} \tag{14}$$

Eine andere Form von $\Delta(xy) = 0$ ist:

$$X_1 \sin\varphi + X_2 \cos\varphi + X_3 = 0, \tag{15}$$

das Integral 11) geht hierfür über in

$$\Sigma \int \frac{dx}{X_1 \cos\varphi - X_2 \sin\varphi} = C.$$

Nach Elimination von φ vermittelst 15) resultirt

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 - X_3^2}} + \int \frac{dx_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 - X_3^2}} + \int \frac{dx_3}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 - X_3^2}} + \int \frac{dx_4}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 - X_3^2}} = \text{Const.} \tag{16}$$

Ueber die Vorzeichen werden wir später das Notwendige festsetzen.

Von allgemeiner Bedeutung werden diese Integrale dadurch, dass man nach 8) unter dem Integralzeichen noch mit x und x^2 multipliciren darf, für die andern Potenzen x^3, x^4, x^{-1}, x^{-2}, bestehen für die Constanten leicht zu bestimmende Modificationen, welche von den Parametern der Gleichungen abhängen.

Wir führen sämmtliche Integralfunctionen hier auf:

17)

$$\text{a)} \quad \Sigma \int \frac{dx}{f(x)} = C,$$

$$\text{b)} \quad \Sigma \int \frac{x\,dx}{f(x)} = C,$$

$$\text{c)} \quad \Sigma \int \frac{x^2 dx}{f(x)} = C,$$

$$\text{d)} \quad \Sigma \int \frac{x^3 dx}{f(x)} = y,$$

$$\text{e)} \quad \Sigma \int \frac{x^4 dx}{f(x)} = \int a\,dy,$$

$$\text{f)} \quad \Sigma \int \frac{dx}{x f(x)} = -\int \frac{dy}{d},$$

$$\text{g)} \quad \Sigma \int \frac{dx}{x^2 f(x)} = -\int \frac{c\,dy}{d^2},$$

wonach man über 7 Integralfunctionen verfügen kann.

In den Anwendungen wird sich zeigen, dass die meisten Integrale dieser Art auf elliptische zurückzuführen sind. In Folge der hohen Bedeutung der letzteren werden deshalb die folgenden Entwickelungen einiges Interesse beanspruchen dürfen.

§ 2.

Die Integralfunction des Kreises.

In den folgenden §§ wenden wir die vorigen Entwickelungen an auf den Kreis, die Lemniskate und die Ellipse, um alsdann die Resultate zu verallgemeinern. Wir verbinden zugleich damit eine dynamische Betrachtung und Erklärung, sofern die vorkommenden Functionen einer solchen fähig sind.

Ein Kreis vom Radius s sei gegeben (Fig. 1.), auf dem Durchmesser oder der Verlängerung desselben gehe durch einen Punkt D eine Secante, welche mit der ersten DE den Winkel φ einschliesst und durch den Kreis in 2 Punkten geschnitten wird, deren Strecken von D aus gleich $x_1 x_2$ sind. Der feste Punkt D habe vom Centrum die Enfernung R. Danach besteht die Gleichung

$$18)\qquad x^2 - 2R\cos\varphi . x + R^2 - s^2 = 0,$$

welche der Form 15) entspricht. Die Differentialgleichung ist also

$$19)\qquad \frac{dx_1}{\sqrt{4R^2x_1^2-(x_1^2+R^2-s^2)^2}}+\frac{dx_2}{\sqrt{4R^2x_2^2-(x_2^2+R^2-s^2)^2}}=0,$$

woraus nach einer Transformation und Integration die Function

$$20)\qquad \Sigma\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-(R-s)^2)((R+s)^2-x^2)}}=\text{Const.}$$

folgt.

Um sie auf die Normalform des elliptischen Integrals der 1. Art zu bringen, sind folgende Relationen einzuführen:

$$21)\qquad x=\frac{R-s}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{\vartheta^2}{2}}},\qquad Z^2=\frac{4Rs}{(R+s)^2},$$

und es resultirt

$$22)\qquad \int_0^{\frac{\vartheta}{2}}\frac{d\frac{1}{2}\vartheta_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_1^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_2^2}}=K,$$

worin K das vollständige elliptische Integral der 1. Art bedeutet. Dass die Constante $= K$ sei, geht aus der leicht zu beweisenden Relation

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_2 = \frac{R+s}{R-s} = \frac{1}{Z'}$$

hervor.

Verbindet man den Punkt E mit den Schnittpunkten der Secante durch Gerade, so sind die Winkel zwischen diesen und der Secante bezüglich $\frac{1}{2}\vartheta_1$, $\frac{1}{2}\vartheta_2$, also Peripheriewinkel zweier entsprechenden Centriwinkel $\vartheta_1 \vartheta_2$ als Wurzeln von

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2 - \frac{2s\cot\varphi}{R-s}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta + \frac{R+s}{R-s} = 0.$$

Die obige Integralfunction steht mit dem kinetischen Problem der Pendelbewegung oder allgemeiner mit der Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreise in eigentümlicher Verbindung:

Die theoretische Mechanik zeigt bekanntlich, dass die Lösung dieser Aufgabe auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{s}\sin\vartheta = 0 \tag{23}$$

führt, woraus das Integral

$$t = \int_\vartheta^\alpha \frac{s\,d\vartheta}{\sqrt{v_0^2 + 4gs\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - 4gs\sin\vartheta^2}} \tag{24}$$

folgt. Hierin bedeutet t die Zeit, welche verfliesst, bis der anfängliche Winkel α in ϑ übergegangen ist. Von den 3 Fällen der Bewegung trifft hier derjenige ein, für welchen im letzten Integral

$$Z^2 = \frac{4gs}{v_0^2 + 4gs\sin\frac{1}{2}\alpha^2} \tag{25}$$

kleiner als 1 ist. Der Punkt beschreibt also volle Umläufe. Soll nun das obige Kreisintegral 22) mit der Kreisbewegung übereinstimmend sein, so muss nach 21) und 25)

$$\frac{4Rs}{(R+s)^2} = \frac{4gs}{v_0^2 + 4gs\sin\frac{1}{2}\alpha^2} \tag{26}$$

gesetzt werden.

Führen wir anstatt v_0 die Geschwindigkeitshöhe h ein, wonach $v_0^2 = 2gh$ ist, so resultirt aus der letzten Formel

$$R^2 + s^2 + 2R\cos\alpha = 2Rh.$$

Bezeichnet man die Strecke vom festen Punkt D nach dem Anfangspunkt der Bewegung mit ϱ_0, und nennt sie Harmonikale, so ist

27) $$\varrho_0^2 = 2Rh \quad \text{oder} \quad \varrho_0^2 = \frac{R}{g} v_0^2,$$

d. i.

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}\, \varrho_0.$$

Diese Formel gilt allgemein.

Aus

$$v = -s\frac{d\vartheta}{dt}$$

folgt nämlich nach 24) und 26)

28) $$v^2 = 4gs\left(\frac{(R+s)^2}{4Rs} - \sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2\right),$$

und hieraus erhält man die Beziehung

29) $$v = \sqrt{\frac{g}{R}}\, \varrho.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes in der Bahn ist direct proportional der Harmonikalen der Bewegung.

Bedeutet nun $2T$ die Zeit des vollen Umlaufs, so ist demnach nach 22)

30) $$t_1 + t_2 = T$$

Man bemerke aber, dass die aus 29) folgende Formel

$$h = \frac{(R+s)^2}{2R}$$

auf die quadratische Gleichung

$$R^2 - 2R(h-s) + s^2 = 0$$

führt, deren Wurzeln

31) $$R = h - s \pm \sqrt{(h-s)^2 - s^2}$$

sind. Hierin ist

$$\sqrt{(h-s)^2 - s^2}$$

die Tangente von D an den Kreis, woraus eine einfache Construction für die beiden Strecken R_1 und R_2 folgt. Die hierdurch bestimmten Punkte D und D' sind in Bezug auf den Kreis harmonisch zugeordnete Punkte, und die Mitte ihrer Verbindungsgeraden ist von dem

tiefsten Punkte E des Kreises um die Geschwindigkeitshöhe entfernt. Zieht man von dem äussern Punkt D zwei Secanten an den Kreis, so schliessen dieselben 2 Kreisbogen ein, welche von dem den Kreis durchlaufenden Punkte in gleichen Zeiten zurückgelegt werden. Zieht man durch den innern Punkt eine Gerade, so werden die hierdurch bestimmten Kreisbogen ebenfalls in gleichen Zeiten beschrieben, welche der halben Umlaufszeit gleichkommen.

Zwei durch den genannten Punkt gehende Gerade begrenzen also 2 Bogen gleicher Zeitdauer. Beide Fälle sind übrigens identisch; wie auch die Geschwindigkeit durch die Constanz des Verhältnisses beider Harmonikalen $\varrho : \varrho'$ nach bekannten Sätzen durch

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}}\,\varrho = \sqrt{\frac{g}{R'}}\,\varrho'$$

ausgedrückt wird.

Je grösser die Geschwindigkeit des im Kreise herumfliegenden Punktes ist, um so mehr entfernt sich der äussere Punkt vom Centrum, während der entsprechende harmonische innere Punkt sich demselben nähert und ihn für unendliche Geschwindigkeit erreicht. Bei abnehmender Geschwindigkeit nähern sich diese zugeordneten Punkte der Peripherie und fallen in der Grenzlage für die Geschwindigkeitshöhe $h = 2s$ der asymptotischen Bewegung zusammen.

Wir werden später eine Verallgemeinerung der vorstehenden Sätze geben, in welcher wir die Geraden durch Kegelschnitte ersetzen. Wir fügen noch folgende Betrachtung bei:

Eine Secante schneide den Kreis in 2 imaginären Punkten, (Fig. 2), die aus 18) folgenden Wurzeln sind dann

$$z = R\cos\varphi \pm \sqrt{R^2\cos\varphi^2 - R^2 + s^2},$$

oder

$$s = x \pm iy,$$

indem wir setzen

$$x = R\cos\varphi$$

und

$$y = \sqrt{R^2\sin\varphi^2 - s^2}$$

Die Construction dieser Ausdrücke ist der vorigen analog. Die durch $\pm y$ bestimmten Punkte DD' sind zugeordnete harmonische Punkte für den Kreis. Der obige complexe Wurzelwert erhält durch die gegebene Darstellung eine allgemeine geometrische Erklärung, die vielleicht neu ist.

§ 3.

Die Integralfunctionen der Lemniskate.

Durch einen Brennpunkt einer Lemniskate, deren Polargleichung

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

ist, legen wir eine Gerade und verbinden die 4 Schnittpunkte der Curve durch die Brennstrahlen $x_1 x_2$ etc. mit dem andern Brennpunkt. (Fig. 3.)

Der Winkel zwischen der Geraden und der X-Achse sei ψ, dann besteht folgende Gleichung

$$x^4 - 4c^2x^2 + 4c^3 \cos\psi \,.\, x - c^4 = 0. \tag{32}$$

Der Radiusvector r nach einem Schnittpunkt schliesse mit x den Winkel γ ein, der Winkel zwischen den beiden Brennstrahlen xy heisse v, folgende Formeln sind dann leicht nachzuweisen

$$r = a \cos \tfrac{1}{2}v, \quad \cos 2\varphi = \cos \tfrac{1}{2}v^2, \quad \sin \tfrac{1}{2}v = \sqrt{2} \sin\varphi,$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2}v + \varphi,$$

$$\sin \tfrac{1}{2}v = \sin(\gamma - \varphi) = \sqrt{2}\sin\varphi, \tag{33}$$

$$\frac{x}{c} = \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}.$$

Man kann also φ durch γ und demnach auch $x = \frac{c^2}{y}$ durch γ ausdrücken, und es findet sich

$$y^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos\gamma, \tag{34}$$

ferner

$$\sin(\gamma - \tfrac{1}{2}v) = \sin\varphi,$$

oder

$$\sin(\gamma - \tfrac{1}{2}v) = \frac{c}{a}\sin\tfrac{1}{2}v.$$

Wir wenden nun auf 16) die Formel 32) an und finden zunächst das Differential

$$\frac{dx}{\sqrt{16c^2x^6 - (x^4 + 4c^2x^2 - c^4)^2}} \quad \text{d. i.} \quad \frac{dx}{(x^2 - c^2)\sqrt{-x^4 + 2(a^2 + c^2)x^2 - c^4}} \tag{35}$$

oder transformirt und integrirt

$$\Sigma \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - x^2)}} = C. \tag{36}$$

Die Bildung der Normalform verlangt die Substitutionen

$$37)\qquad x=\frac{a-c}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}},\qquad Z^2=\frac{4ac}{(a+c)^2}.$$

Demnach ist

$$38)\qquad \sin\tfrac{1}{2}\gamma^2=\frac{(a+c)^2-y^2}{4ac},\qquad \cos\tfrac{1}{2}\gamma^2=\frac{x^2-(a-c)^2}{4ac}$$

Hieraus erhält man durch Subtraction und eine Umformung

$$39)\qquad y_2=a^2+c^2+2ac\cos\gamma,$$

und diese stimmt mit 34) überein.

Die Integralfunction ist demnach

$$40)\int\frac{d\frac{1}{2}\gamma_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_1^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}\gamma_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_2^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}\gamma_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_3^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}\gamma_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_4^2}}=C,$$

welche wir noch vermittelst der Landon'schen Substitution transformiren.

Wir führen deshalb ein

$$41)\qquad p=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \sin(\gamma-\tfrac{1}{2}v)=\frac{c}{a}\sin\tfrac{1}{2}v,$$

und das Resultat ist

$$42)\qquad \frac{2c}{1+\frac{c}{a}}\int\frac{d\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{1-\frac{4ac}{(a+c)^2}\sin\frac{1}{2}\gamma^2}}=c\int\frac{d\frac{1}{2}v}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v^2}}=a\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Da aber die Rectification der Lemniskate auf letztere Integrale führt, so erhält man aus der folgenden Integralfunction

$$43)\int\frac{d\frac{1}{2}v_1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_1^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}v_2}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_2^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}v_3}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_3^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}v_4}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_4^2}}=2K$$

den Satz:

Jede durch einen Brennpunkt einer Lemniskate gehende Gerade schneidet auf derselben 4 von den entsprechenden beiden Scheitelpunkten an gerechnete Bogen u_1, u_2 und u_3, u_4 ab, deren Summe $u_1+u_2+u_3+u_4 = 2K$ constant der halben Lemniskate gleich ist.

Entwickelt man die Gleichung der durch einen Brennpunkt gehenden Geraden in Bezug auf $\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$ so findet sich die Amplitudengleichung

$$44)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^4 - 2\cot\psi\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3 + (1+\cot\psi^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2 - 2\cot\psi\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v - 1 = 0.$$

Nach der Formel

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(v_1+v_2+v_3+v_4) = \frac{a-c}{1-b+d}$$

ist, wenn $\frac{1}{2}v$ in absolutem Sinn genommen wird

$$\tfrac{1}{2}v_1+\tfrac{1}{2}v_2+\tfrac{1}{2}v_3-\tfrac{1}{2}v_4 = 180^0,$$

und also auch

$$45)\quad \operatorname{am}u_1+\operatorname{am}u_2+\operatorname{am}u_3-\operatorname{am}u_4 = \pi.$$

Die elliptischen Functionen aber leiten für $\operatorname{am}u$ folgende periodische Reihe ab

$$\operatorname{am}u = \frac{\pi u}{2K}+2\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\tfrac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}\cdots\right).$$

Schreiben wir hierin für u der Reihe nach u_1 u_2 etc. und addiren diese Reihen, wobei wir für die Summe zweier Sinus ihr bekanntes Product setzen, und beachten ferner, dass $\Sigma\operatorname{am}u$ wegen 45) durch $\pi+2\operatorname{am}u_4$ ausgedrückt werden kann, so erhält man schliesslich

$$46)\quad \tfrac{1}{8}v_4 = \frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi}{2K}(u_1+u_2)\sin\frac{\pi}{2K}(u_1+u_3)\sin\frac{\pi}{2K}(u_2+u_3)$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{q}{1+q^4}\sin\frac{2\pi}{2K}(u_1+u_2)\sin\frac{2\pi}{2K}(u_1+u_3)\sin\frac{2\pi}{2K}(u_2+u_3)\ldots$$

In ähnlicher Art findet man noch

$$K^2\cos 2\varphi = \pi+8\pi^2\times$$
$$\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi}{2K}(u_1+u_2)\cos\frac{\pi}{2K}(u_1+u_3)\cos\frac{\pi}{2K}(u_2+u_3)\ldots\right)$$

$$47)\quad \tfrac{1}{2}u_4 = \tfrac{1}{2}a_2\sin\tfrac{1}{2}(v_1+v_2)\sin\tfrac{1}{2}(v_1+v_3)\sin\tfrac{1}{2}(v_2+v_3)$$
$$-\tfrac{1}{4}a_4\sin(v_1+v_2)\sin(v_1+v_3)\sin(v_2+v_3)\ldots$$

Hierin ist $q = e^{-\pi}$ und die Constanten a_2, a_4 sind die bekannten Coefficienten der Reihe

$$F(\varphi) = a_0\varphi - \tfrac{1}{2}a_2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{4}a_4\sin 4\varphi\ldots$$

§ 4.

Andere Integralfunctionen lassen sich nach 8) ohne Mühe ableiten. Da das zweite Glied 32) d. i. der Coefficient von x^3 gleich Null ist, so führt die hierauf bezügliche Formel 17e) auf

48) $$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{(1-Z^2 \sin\frac{1}{2}\gamma^2)^3}} = C.$$

Nach den Methoden der Integralrechnung geht diese Function über in

49) $$E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = Z^2 \Sigma \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\gamma}{\Delta}.$$

In

$$Z^2 \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\gamma}{\Delta} = \frac{Z^2}{2(a-c)} y \sin\gamma = \frac{2a}{a+c} \sin\psi$$

ist $y \sin\gamma$ die Normale vom Brennpunkte auf den entsprechenden Radius r.

Man kann das obige Integral auch auf folgende Art deuten:

In einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sei ein Punkt durch die Coordinaten $x = a \sin\varphi$ und $y = b \cos\varphi$ bestimmt, der Winkel zwischen den Brennstrahlen sei Θ, der Winkel der Normalen mit der X-Achse sei ψ Das elliptische Integral E oder

$$\int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin\varphi^2}\, d\varphi$$

transformiren wir durch Einführung von

$$\cos\varphi = \frac{b}{c} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Theta, \qquad \sin\frac{1}{2}\Theta = \frac{c}{a} \sin\psi$$

in

$$\frac{b^2}{a^2} \int \frac{d\frac{1}{2}\Theta}{\cos\frac{1}{2}\Theta^2 \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \sin\frac{1}{2}\Theta^2}} = \frac{b^2}{a^2} \int \frac{d\psi}{\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{a^2} \sin\psi^2\right)^3}}.$$

Es bedeutet also

50) $$s = \frac{b^2}{a} \int \frac{d\psi}{\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{a^2} \sin\psi^2\right)^3}}$$

den vom Scheitelpunkte der grossen Achse an bis zu jenem Punkte, dessen Normale mit der Achse den Winkel ψ einschliesst, gerechneten Bogen der Ellipse, wie bekannt ist. Hiernach kann man das analoge

Integral 49) der Lemniskate für die Ellipse einrichten, wenn $\psi = \frac{1}{2}\gamma$ und $Z^2 = \frac{4ac}{(a+c)^2}$ = dem Modul des letztern Integrals gemäss bestimmt wird.

Man kann übrigens auch das Integral

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2-(a-c)^2)((a+c)^2-y^2)}}$$

in anderer Art für die Ellipse benutzen, wenn man beachtet, dass die Normale des genannten Punktes durch

$$N = b\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\varphi^2},$$

und der zu r conjugirte Halbmesser r' durch

$$r' = \frac{a}{b}N$$

bestimmt ist. Daher geht das Integral

$$a\int\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\varphi^2}\,d\varphi$$

über in

$$-\int\frac{r'^2 dr'}{\sqrt{(r'^2-b^2)(a^2-r'^2)}}.$$

Wenn wir nun als Halbachsen einer Ellipse $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$ die Beziehungen

$$A = a+c$$
$$B = a-c$$

einführen, in welchen a und c sich auf die Lemniskate beziehen, und die Brennstrahlen x der letztern als Radien r' der erstern einführen, so bestimmen die ihnen entsprechenden conjugirten Radien 4 Ellipsenpunkte, deren zugehörige von der kleinen Achse an gerechneten Bogen s die Relation haben:

$$s_1+s_2-s_3-s_4 = S,$$

worin S ein Ellipsenquadrant ist.

Diesen Functionen lassen sich noch mehrere anschliessen, so ist das Differential

$$\frac{x dx}{\sqrt{(x^2-(a-c)^2)((a+c)^2-y^2)}} = \frac{a-c}{a+c}\,\frac{d\frac{1}{2}\gamma}{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2} = d\psi$$

ferner

$$\frac{d\gamma}{c+a\cos\gamma}$$

leicht zu integriren.

Ebenso existirt ein elliptisches Integral 3. Art

$$51) \qquad \Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\gamma}{\left(1-\frac{2a}{a+c}\sin\frac{1}{2}\gamma^2\right)\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}} = C,$$

welches sich aus 35) ergibt.

Um zu entscheiden, ob noch Integrale 2. Art bestehen, berücksichtigen wir die Formel 17g) oder

$$\Sigma \frac{dx}{x^2\frac{\partial \varDelta}{\partial x}} = -\frac{c}{d^2}$$

in welchem unserm Beispiel gemäss $c = -4c^3\cos\varphi$ und $d = -c^4$ ist. Das obige Differential können wir nun nach geeigneter Transformation in die Integralfunction

$$\Sigma \int \frac{dx}{x^2(x^2-c^2)\sqrt{(x^2-(a-c)^2)((a+c)^2-y^2)}} = \int \frac{4c^3}{c^8}\cos\psi d\psi$$

übergehen lassen. Nach Einführung von $\frac{1}{2}\gamma$ wird hieraus

$$\Sigma \int \frac{c^5(1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2)\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}}{(a+c)(a-c)^2(a^2-2ac+c^2Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2)} = \int 4\cos\psi d\psi.$$

Ferner ist

$$\Sigma \int \frac{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}\,d\frac{1}{2}\gamma}{(a+c)(a-c)^2(a^2-2ac+c^2Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2)} = 0.$$

Wir multipliciren das vorletzte Integral mit $-c^2$, das letzte mit $a^2-2ac+c^2$ und addiren beide, dann resultirt nach geordneter Zusammenstellung

$$\int \sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_1^2}\,d\frac{1}{2}\gamma_1 + \int \sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_2^2}\,d\frac{1}{2}\gamma_2 \ldots = 4\,\frac{a-c}{c}\sin\psi,$$

oder kurz

$$52) \qquad E_1+E_2-E_3-E_4 = 4\cdot\frac{a-c}{c}\sin\psi.$$

Die geometrische Deutung dieser Function ist leicht.

§ 5.

Die Integrale der entwickelten Formeln haben die Amplitude $\frac{1}{2}\gamma$, man kann noch mehrere von der Amplitude $\frac{1}{2}v$ in folgender Art bestimmen. Wir transformiren nämlich die allgemeine Form

$$\Sigma\int\frac{dx}{(x^2-c^2)\sqrt{(x^2-(a-c)^2)((a+c)^2-x^2)}}=C$$

in

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}v}{(x^2-c^2)\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}v^2}}=C.$$

Es ist aber

$$\frac{x}{c}=\sqrt{1+\cos\tfrac{1}{2}v^2}-\cos\tfrac{1}{2}v,\qquad \frac{y}{c}=\sqrt{1+\cos\tfrac{1}{2}v^2}+\cos\tfrac{1}{2}v,$$

also auch

$$\frac{x}{a}=\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v^2}-\frac{\cos\frac{1}{2}v}{\sqrt{2}}.$$

Das letzte Integral geht also nach Einführung von x und darauf erfolgter Multiplication mit x über in

$$\int\frac{d\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v^2}}=\int\frac{d\varphi}{\cos 2\varphi}=C.$$

Die Integration ergibt

53) $\quad \operatorname{tg}(45^0+\varphi_1)\operatorname{tg}(45^0+\varphi_2)\operatorname{tg}(45^0+\varphi_3)\operatorname{tg}(45^0+\varphi_4)=1.$

Das Hauptintegral 35) multipliciren wir jetzt mit $x^2(x^2-c^2)$ und beachten, dass das 2. Glied der Gleichung 32) fehlt. Nach einigen Umformungen resultirt

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}v}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}v^2}}\times$$
$$\left(1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v^2-\sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v^2}+\frac{\cos\frac{1}{2}v^2}{2}\right)=C.$$

Die Reduction dieses Ausdruckes auf die kanonischen Integrale führt schliesslich auf folgende Form:

$$\Sigma\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}v^2}\,d\tfrac{1}{2}v=\Sigma\frac{\sin\frac{1}{2}v}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{2}\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}v}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}v^2}},$$

oder

54) $\quad E_1+E_2-E_3-E_4=\Sigma\sin\varphi+\frac{1}{2}(F_1+F_2-F_3-F_4).$

Das Additionstheorem für die Integrale 2. Art lässt eine Vergleichung der Functionen 52) und 54) zu. Es ist bekanntlich

$$E\tfrac{1}{2}v = \tfrac{1}{4}F\tfrac{1}{2}v + \left(1+\frac{c}{a}\right)E\tfrac{1}{2}\gamma - \frac{\sin\frac{1}{2}v}{\sqrt{2}}.$$

Die Combination der letzten Integrale gibt also in Verbindung mit 52)

$$2(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 - \sin\varphi_3 - \sin\varphi_4)$$

$$= \frac{a+c}{a}(\sin\tfrac{1}{2}\gamma_1 + \sin\tfrac{1}{2}\gamma_2 + \sin\tfrac{1}{2}\gamma_3 + \sin\tfrac{1}{2}\gamma_3) = 4 \cdot \frac{(a+c)(a-c)}{ac}\sin\psi$$

oder die Relation

$$55)\qquad \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 - \sin\varphi_3 - \sin\varphi_4 = \sqrt{2}\sin\psi,$$

d. i.

$$2\sin\tfrac{1}{4}(v_1+v_2)\sin\tfrac{1}{4}(v_2-v_4)\sin\tfrac{1}{4}(v_1-v_4) = \sin\psi.$$

Die letzten Formeln finden ihre Bestätigung durch die leicht zu entwickelnde Gleichung

$$56)\quad \sin\varphi^4 - \sqrt{2}\sin\psi\sin\varphi^3 - \tfrac{1}{2}\sin\varphi^2 + \frac{\sin\psi}{\sqrt{2}}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin\psi^2 = 0,$$

woraus

$$\Sigma\sin\varphi = \sqrt{2}\sin\psi.$$

Die bisher entwickelten Integrale der 2. Art haben, wie man sieht, Bezug auf die Rectification einer die Lemniskate einschliessenden Ellipse mit den Halbachsen a und c, deren Bogen also mit den entsprechenden Lemniskatenbogen in einfachem additivem Zusammenhang stehen.

Es lässt sich im Anschluss an die Function

$$\int\frac{d\frac{1}{2}v^2}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_1{}^2}} + \int\frac{d\frac{1}{2}v_2}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_2{}^2}} + \int\frac{d\frac{1}{2}v_3}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_3{}^2}}$$

$$+\int\frac{d\frac{1}{2}v_4}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_4}} = 2K,$$

eine zweite leicht entwickeln:

$$57)\quad \int\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v_1}\,d\tfrac{1}{2}v_1 + \int\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v_2{}^2}\,\tfrac{1}{2}dv_2$$

$$+\int\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v_3}\,d\tfrac{1}{2}v_3 + \int\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v_4}\,d\tfrac{1}{2}v_4 = 2E + \sqrt{2}\sin\psi,$$

wo E das vollständige Integral der 2. Art ist. Eine directe Herleitung dieser und anderer Formeln geben wir später.

Aus der Combination der Formeln

$$\begin{aligned} &F_1+F_2+F_3+F_4 = 2K,\\ 58)\quad &E_1+E_2+E_3+E_4 = 2E+\sqrt{2}\sin\psi,\\ &E_1+E_2-E_3-E_4 = \tfrac{1}{2}(F_1+F_2-F_3-F_4)+\sqrt{2}\sin\psi \end{aligned}$$

resultirt noch

$$59)\qquad E_3+E_4-\tfrac{1}{2}(F_3+F_4) = E-\tfrac{1}{2}K,$$

und

$$E_1+E_2-\tfrac{1}{2}(F_1+F_2) = E-\tfrac{1}{2}K+\sqrt{2}\sin\psi,$$

welche als Ellipsen- und Lemniskatenbogen eine gegenseitige Vergleichung zulassen. Für jede durch einen Brennpunkt einer Lemniskate gehende Gerade ist, wenn die Curve mit der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$ in Verbindung gebracht wird, die Differenz der Ellipsenbogen $\frac{a}{\sqrt{2}}(E_3+E_4)$ und der Lemniskatenbogen $\frac{c}{4}(F_1+F_2)$ eine constante Grösse. Die Brennpunkte beider Curven fallen wie die grossen Achsen aufeinander, und die kleine Halbachse der Ellipse ist $= c$. Ihre Amplitude ist $\frac{1}{2}v$, so dass die entsprechenden Ellipsencoordinaten $x = a\sin\frac{1}{2}v$; $y = c\cos\frac{1}{2}v$ durch den excentrischen Winkel $\frac{1}{2}v$ definirt sind.

§ 6.

Obgleich die vorhergehenden geometrischen Anwendungen der entwickelten Integralfunctionen nur specielle Fälle behandelten, so zeigten dieselben doch schon die Fruchtbarkeit der gegebenen Methoden, so dass der Gedanke nahe liegt, diese Functionen allgemein für alle möglichen Fälle derart einzurichten, dass die Moduli und Constanten der elliptischen Integrale ohne Zwischenrechnung aus den Parametern der Gleichungen abgeleitet werden können.

Da wir nun die Art, wie vorhin das Beispiel der Lemniskate behandelt worden ist, für die folgenden Probleme zum Muster nehmen, so wollen wir die auch später vorkommenden Reihenentwickelungen jener Integrale in unserm speciellen Falle der Lemniskate zunächst entwickeln, um den Gang derselben bei der Auflösung der biquadratischen Gleichungen mittelst der genannten Integralfunctionen schon jetzt anzudeuten.

Wir benutzen die bekannten Reihen

$$60)\qquad \begin{aligned} F(\varphi) &= a_0\varphi-\tfrac{1}{2}a_2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{4}a_4\sin 4\varphi-\ldots,\\ E(\varphi) &= b_0\varphi+\tfrac{1}{2}b_2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{4}b_4\sin 4\varphi-\ldots, \end{aligned}$$

in welchen

$$61)\quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}K, \quad a_2 = \lambda a_0 - \frac{8}{\pi Z^2}K, \quad a_4 = \frac{2}{3}(\lambda a_2 - a_0) \text{ etc.} \\ b_0 &= \frac{2}{\pi}E, \quad b_2 = \frac{1}{3}\left(\lambda b_0 - 8\frac{(1-Z^2)}{\pi Z^2}K\right), \quad b_4 = \frac{2}{5}(\lambda b_2 - b_0) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ferner erinnern wir an die Formeln

$$62)\quad \begin{aligned} \sin 2\varphi &= 2\sin\varphi - \sin\varphi^3 - \tfrac{1}{4}\sin\varphi^5 - \tfrac{1}{8}\sin\varphi^7 \ldots \\ \sin 3\varphi &= 3\sin\varphi - 4\sin\varphi^3 \\ \sin 4\varphi &= 4\sin\varphi - 10\sin\varphi^3 + \tfrac{7}{2}\sin\varphi^5 + \tfrac{3}{4}\sin\varphi^7 \ldots \\ \sin 5\varphi &= 5\sin\varphi - 20\sin\varphi^3 + 16\sin\varphi^5 \\ \sin 6\varphi &= 6\sin\varphi - 35\sin\varphi^3 + \tfrac{189}{4}\sin\varphi^5 - \tfrac{99}{8}\sin\varphi^7 \ldots \end{aligned}$$

und benutzen endlich noch die für die biquadratische Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

bestehenden symmetrischen Relationen der Wurzelpotenzen

$$63)\quad \begin{aligned} \Sigma x &= -a, \\ \Sigma x^3 &= -a^3 + 3ab - 3c, \\ \Sigma x^5 &= -a^5 + 5a^3b + 5ab^2 - 5a^2c + 5ad + 5bc, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

welche wir für das folgende nötig haben.

In der abgeleiteten Relation der Lemniskatenbogen

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 2K$$

ist die Amplitude $\frac{1}{2}v$ an die Gleichung

$$64)\quad \sin v^4 - 8\sin\psi\cos\psi\sin v^3 + 16\sin\psi^2\sin v - 16\sin\psi^4 = 0$$

geknüpft, wie leicht zu beweisen ist.

Man bemerke aber, dass eine Wurzel $\frac{1}{2}v_4$ negativ ist, dass also, wenn die Amplituden absolut genommen werden, geschrieben werden muss

$$\tfrac{1}{2}v_1 + \tfrac{1}{2}v_2 + \tfrac{1}{2}v_3 - \tfrac{1}{2}v_4 = 180^0,$$

$$\sin v + \sin v_2 + \sin v_3 - \sin v_4 = 4\sin 2\psi,$$

oder

$$65)\quad \begin{aligned} \Sigma\sin v &= 8\sin\psi\cos\psi, \\ \Sigma\sin v^3 &= 128\cos 3\psi\sin\psi^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Das unvollständige elliptische Integral 1. Art hat nun folgende Form

$$
\begin{aligned}
F(\tfrac{1}{2}v) = a_0\,\tfrac{1}{2}v &- \tfrac{1}{2}a_2 \sin v \\
&+ \tfrac{1}{4}a_4 (2 \sin v - \sin v^3 - \tfrac{1}{4} \sin v^5 - \tfrac{1}{8} \sin v^7 \ldots) \\
66)\qquad &- \tfrac{1}{6}a_6 (3 \sin v - 4 \sin v^3) \\
&+ \tfrac{1}{8}a_8 (4 \sin v - 10 \sin v^3 + \tfrac{7}{2} \sin v^5 + \tfrac{3}{4} \sin v^7 \ldots) \\
&- \tfrac{1}{10}a_{10} (5 \sin v - 20 \sin v^3 + 16 \sin v^5) \ldots
\end{aligned}
$$

Die Function

$$
\begin{aligned}
67)\qquad & F_1 + F_2 + F_3 - F_4 \\
&= a_0\, \Sigma \tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}a_2\, \Sigma \sin v + \tfrac{1}{4}\, a_4\, \Sigma \sin 2v - \tfrac{1}{6}a_6\, \Sigma \sin 3v \ldots
\end{aligned}
$$

kann nun in folgender Art transformirt werden. Für $F_1+F_2+F_3$ setzen wir $2K-F_4$, und beachten, dass $a_0\, \Sigma \tfrac{1}{2}v = a_0 \pi = 2K$. Da wir die F reell wählen, so muss dementsprechend der Winkel ψ innerhalb bestimm'er Grenzen genommen werden. Derselbe ist, wie man sieht, ein Parameter der Hauptgleichung 32) oder 44). Für

$$
F_4 = u_4 = \int \frac{d\tfrac{1}{2}v_4}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin \tfrac{1}{2}v^2}}
$$

gewinnen wir schliesslich das Resultat

$$
\begin{aligned}
u_4 &= (a_2 - a_4 + a_6 - a_8 \ldots) \sin 2\psi \\
68)\qquad &+ \tfrac{16}{3} (3a_4 - 8a_6 + 15a_8 - 24a_{10} \ldots) \cos 3\psi \sin \psi^3 \\
&+ \tfrac{4}{5}(5a_4 - 35a_8 + 128a_{12})(21 - 32 \cos 2\psi + 32 \cos 4\psi) \sin 2\psi \sin \psi^4,
\end{aligned}
$$

. . . .

wonach der Lemniskatenbogen u_4 durch eine Reihe ausgedrückt wird, deren Cofficienten durch vollständige elliptische Integrale bestimmt sind, und die innerhalb der angegebenen Grenzen des Focalwinkels ψ convergirt.

In ähnlicher Art findet man

$$
\begin{aligned}
E_4 = \frac{\sin \psi}{\sqrt{2}} &- (b_2 - b_4 + b_6 - b_8 \ldots) \sin 2\psi \\
69)\qquad &- \tfrac{16}{3} (3b_4 - 8b_6 + 15b_8 \ldots) \cos 3\psi \sin \psi^3 \\
&- \tfrac{4}{5}(5b_4 - 35b_8 + 128b_{10})(21 - 32\cos 2\psi + 32\cos 4\psi)\sin 2\psi \sin \psi^4.
\end{aligned}
$$

Die obigen Reihen haben wir aus dem Grunde zunächst an einem einfachen Beispiel entwickelt, um den Weg anzudeuten, auf welchem wir später bei Verallgemeinerung der Methoden zur Auflösung der Gleichungen 3. und 4. Grades vermittelst dieser Functionen gelangen werden.

Bemerkung. In § 1 leiteten wir aus der Gleichung 4. Grades und ihrem Differentiaquotienten die Formel her:

$$\operatorname{tg}\tau^4 - A\operatorname{tg}\tau^3 + B\operatorname{tg}\tau^2 + D = 0$$

und es war

$$\Sigma\frac{1}{\operatorname{tg}\tau} = 0$$

In ähnlicher Weise findet man aus der letzten Gleichung die folgende

$$\Sigma\frac{1}{4\operatorname{tg}\tau^3 - 3A\operatorname{tg}\tau^2 + 2B\operatorname{tg}\tau} = 0$$

oder auch

$$\Sigma\frac{1}{4\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial x}\right)^2 - 3A\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial x}\right) + 2B}\cdot\frac{1}{\frac{\partial\varDelta}{\partial x}}$$

und an diese Relation schliessen sich noch andere verwandte an.

§ 7.

Integralfunctionen der Curven 4. und 3. Grades.

Da die gemeinsame Betrachtung der Eigenschaften der Lemniskate und der durch die Gleichung

$$\pm y^2 = x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D \tag{70}$$

definirten Curven 4. Grades auf harmonische Verhältnisse führt, so wollen wir folgende Untersuchung hier einschalten. Die Schnitte der X-Achse mit der obigen Curve (Fig. 4.) bestimmen die Wurzeln $a_1 a_2$ etc. der Gleichung $y = 0$. Die Formel 13) findet Anwendung auf dieselbe, wenn wir zur X-Achse eine parallele Gerade ziehen, welche, im Fall wir das obere Zeichen wählen und also y constant $= b$ festsetzen, in ihren Schnittpunkten mit der Curve auf die Wurzeln $x_1 x_2$ etc. führt. Dann ist

$$\int\frac{dx_1}{\sqrt{(x_1-a_1)(x_1-a_2)(x_1-a_3)(x_1-a_4)}} + \int\frac{dx_2}{\sqrt{(x_2-a_1)(x_2-a_2)(x_2-a_3)(x_2-a_4)}} + \text{etc.} = C \tag{71}$$

die Integralfunction.

Die Bedingungen, welche für die Normalform der elliptischen Integrale 1. Art notwendig sind, finden sich aus

$$Z' = \frac{\sqrt{(a_1-a_3)(a_2-a_4)} - \sqrt{(a_2-a_3)(a_1-a_4)}}{\sqrt{(a_1-a_3)(a_2-a_4)} + \sqrt{(a_2-a_3)(a_1-a_4)}},$$

72)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{(a_1-a_3)(a_2-a_4)} + \sqrt{(a_1-a_4)(a_2-a_4)}}{\sqrt{(a_1-a_3)(a_1-a_4)} - \sqrt{(a_2-a_3)(a_2-a_4)}}\sqrt{\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(x-a_3)(x-a_4)}},$$

und die Normalform wird

$$73)\quad \int\frac{d\tfrac{1}{2}\gamma_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma_1^2}}+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\gamma_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma_2^2}}+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\gamma_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma_3^2}}+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\gamma_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma_4^2}}=C.$$

Wir wenden hierauf die Landen'sche Substitution an, und demnach hat man

$$\sin(\gamma-\tfrac{1}{2}v)=\frac{c}{a}\sin\tfrac{1}{2}v$$

zu setzen, wodurch die Function 71) übergeht in

$$74)\quad \Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}v}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\tfrac{1}{2}v^2}}=C,\quad Z^2=\frac{4ac}{(a+c)^2}$$

Nun geht aber vorstehender Ausdruck für $a^2=2c^2$ in die bekannte Function für die Lemniskate über, und die Relation

$$75)\quad Z'=\frac{a-c}{a+c}$$

bedingt gemäss 72) die zweite

$$76)\quad \frac{(a_2-a_3)(a_1-a_4)}{(a_1-a_3)(a_2-a_4)}=\tfrac{1}{2}.$$

Diesem harmonischen Doppelverhältniss schliessen sich durch Permutation die beiden folgenden

$$77)\quad \begin{cases}\dfrac{(a_2-a_1)(a_4-a_3)}{(a_3-a_2)(a_4-a_1)}=1,\\[2ex] \dfrac{(a_3-a_1)(a_2-a_4)}{(a_2-a_1)(a_3-a_4)}=2,\end{cases}$$

identisch an. Dies zusammen fassend haben wir den Satz:

Wenn die Wurzeln a_1a_2 etc. der Curve 4. Grades

$$y^2=x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D$$

für $y=0$ in harmonischer Beziehung zu einander stehen, dann existirt für jede beliebige der X-Achse parallele Gerade $y=b$ und der dadurch bedingten Wurzeln x_1x_2 etc. eine Integralfunction

$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\gamma}{\sqrt{1-\frac{4ac}{(a+c)}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2}}=2K,$$

deren doppelte Amplitude γ als Winkel zwischen einem Brennstrahl

und dem entsprechenden Radius einer Lemniskate aufgefasst werden kann, während in der transformirten Function

$$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}v}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v^2}} = 2K, \qquad a = c\sqrt{2}$$

die doppelte Amplitude v der Winkel zwischen den beiden Brennstrahlen ist und die Function selbst 4 Lemniskatenbögen charakterisirt, deren Summe stets constant ist. Die Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen x, y und v sind

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{(a_1-a_3)(a_2-a_3)}+\sqrt{(a_1-a_4)(a_2-a_4)}}{\sqrt{(a_1-a_3)(a_1-a_4)}-\sqrt{(a_2-a_3)(a_2-a_4)}}\,\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{b},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(v-\gamma) = (\sqrt{2}-1)^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Die obigen harmonischen Doppelverhältnisse führen zu einer bekannten Reducente der biquadratischen Gleichung und zwar zur kubischen Invariante $K=0$ oder

$$78)\qquad 72BD+9ABC-27C^2-27A^2D-2B^3=0.$$

Sobald diese Bedingung unter den Constanten der Gleichung erfüllt ist, sind ihre Wurzeln bekanntlich einander harmonisch zugeordnet.

§ 8.

Wir legen jetzt die Curven dritten Grades

$$79)\qquad \pm y^2 = x^3 - Ax^2 + Bx - C$$

den folgenden Untersuchungen zu Grunde und werden die aus ihr resultirende Integralfunction

$$80)\ \int\frac{dx_1}{\sqrt{(x_1-a_1)(x_1-a_2)(x_1-a_3)}}+\int\frac{dx_2}{\sqrt{(x_2-a_1)(x_2-a_2)(x_2-a_3)}}+\int\frac{dx_3}{\sqrt{(x_3-a_1)(x_3-a_2)(x_3-a_3)}}=0$$

geometrisch und dynamisch interpretiren. Wir wählen zunächst das obere Vorzeichen, setzen also voraus, dass die der X-Achse parallele Gerade $y=+b$ oberhalb der Achse die Curve in 3 durch die Abscissen $x_1 x_2 x_3$ bestimmten Punkten $P_1 P_2 P_3$ schneidet. (Fig. 5.) Bei der Bildung der Normalform hat man nun folgendes zu beachten:

Im 1. Integral der Function führen wir ein

$$x_1 - a_1 = z_1^2,$$

dasselbe geht dann über in

$$\int \frac{dz_1}{\sqrt{(a_2 - a_1 - z_1^2)(a_3 - a_1 - z_1^2)}}.$$

Wir setzen ferner

$$Z^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}, \qquad z_1^2 = (a_2 - a_1)\sin\varphi_1^2,$$

dann folgt

$$\frac{x_1 - a_1}{a_2 - a_1} = \sin\varphi_1^2, \tag{81}$$

und das Integral wird

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi_1^2}}.$$

Ebenso findet man für $x_2 - a_2 = -z_2^2$

$$Z^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}, \qquad z_2^2 = (a_2 - a_1)\sin\varphi_2^2$$

woraus

$$\frac{a_2 - x_2}{a_2 - a_1} = \cos\varphi_2^2 \tag{82}$$

und es ist das zweite Integral

$$\int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi_2^2}}.$$

Es sei endlich

$$x_3 - a_3 = z_3^2$$

dann ist ebenfalls

$$Z^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}, \qquad z_3^2 = (a_3 - a_1)\cot\varphi_3^2,$$

also

$$\frac{x_3 - a_3}{a_3 - a_1} = \cot\varphi_3^2, \tag{83}$$

so dass die allgemeine Normalform wird:

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi_1^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi_3^2}} = 0 \tag{84}$$

Es lässt sich leicht die geometrische Bedeutung der Amplituden φ nachweisen. Die X-Achse möge die Curve in den Punkten $A_1 A_2 A_3$ schneiden. Ueber $A_1 A_2$ beschreiben wir einen Halbkreis, verlängern die Ordinaten der Punkte $P_1 P_2$ bis zum Durchschnitt mit demselben und ziehen von A_2 aus nach diesen Schnittpunkten Sehnen, dieselben schliessen, wie aus 81) und 82) hervorgeht, mit der X-Achse die Winkel φ_1 und φ_2 ein.

Ferner beschreiben wir über $A_1 X_3$ einen Halbkreis, errichten in A_3 eine Ordinate bis zum Kreise und verbinden den Durchschnitt mit

X_3 durch eine Sehne, welche nach 83) den Winkel φ_3 mit der Achse einschliesst. In der Figur ist nur eine der zwei congruenten Curven angegeben. In der Integralfunction ist also die Amplitude geometrisch definirt.

Will man dieselbe auf die Lemniskate anwenden, so ist $Z^2 = \frac{1}{2}$ zu setzen, woraus

85) $$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

folgt.

Die Wurzeln $a_1 a_2 a_3$ müssen also, im Falle dass die Integralfunction durch Lemniskatenbogen ausgedrückt werden soll, eine stetige arithmetische Proportion bilden.

Die allgemeine Bedingungsgleichung ist hierfür das Verschwinden der kubischen Variante

86) $$2A^3 - 9AB + 27C = 0.$$

Erfüllen die Constanten der Curve 3. Grades 79) diese Bedingung, so ist φ der halbe Focalwinkel der Lemniskate, in welcher drei durch die oben angegebenen Amplituden bestimmten Lemniskatenbogen in der Relation

87) $$u_1 + u_2 = u_3$$

zu einander stehen.

In Bezug auf das untere Vorzeichen geht für die Curve

$$-y^2 = x^3 - Ax^2 + Bx - C$$

die Integralfunction über in

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{-(x_1-a_1)(x_1-a_2)(x_1-a_3)}} + \int \frac{dx_2}{\sqrt{-(x_2-a_1)(x_2-a_2)(x_2-a_3)}}$$
$$+ \int \frac{dx_3}{\sqrt{-(x_3-a_1)(x_3-a_2)(x_3-a_3)}} = 0.$$

Im 1. Integral ist einzuführen

$$x_1 - a_1 = -z_1^2, \quad Z'^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}, \quad x_1 = a_1 - (a_3 - a_1)\cot\sigma_1^2,$$

woraus

$$\frac{a_1 - x_1}{a_3 - a_1} = \cot\sigma_1^2.$$

Im 2. Integral ist einzuführen

$$x_2 - a_2 = z_2^2, \quad Z'^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}, \quad x^2 = a_2 + (a_3 - a_2)\cos\sigma_2^2,$$

woraus

$$\frac{x_2 - a_2}{a_3 - a_2} = \cos \sigma_2^2.$$

Im 3. ist

$$x_3 - a_3 = -z_3^2, \quad Z'^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}, \quad x_3 = a_3 - (a_3 - a_2) \sin \sigma_3^2,$$

woraus

$$\frac{a_3 - x_3}{a_3 - a_2} = \sin \sigma_3^2,$$

so dass die Integralfunction übergeht in die Normalform

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - Z'^2 \sin \sigma_1^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - Z'^2 \sin \sigma_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1 - Z'^2 \sin \sigma_3^2}} = 0$$

deren Amplituden auf die nämliche Art wie im ersten Fall durch Winkel zwischen Kreissehnen und der X-Achse geometrisch definirt sind.

Die Anwendung auf die Lemniskate führt wieder auf die stetige Proportion

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

und damit auf Lemniskatenbogen, die in der Relation

$$u_1 + u_2 = u_3$$

zu einander stehen.

In Bezug auf die Curve bemerken wir, dass für das obere Zeichen die Curve oberhalb der Achse reell, unterhalb derselben imaginair wird. Für das untere Zeichen gilt das Gesagte umgekehrt, so dass die ganze Curve beide Fälle umfasst.

§ 9.

Dynamische Bedeutung der Curven 3. Grades.

Da die Untersuchung der Bewegung eines schweren Punktes auf der Kugeloberfläche auf das vorhin entwickelte Integral führt, so wollen wir eine gemeinschaftliche Betrachtung beider Integrale jetzt noch in Kürze vornehmen.

Nach den bekannten Methoden der analytischen Mechanik betreffs des Problems des Kugelpendels werden folgende Differentialgleichungen die Lösung desselben geben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{r},$$

$$88) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{r},$$

$$88)\qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -N\frac{z}{r} + g,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$v^2 = 2gz + C,$$

woraus

$$\frac{xdy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C'.$$

Bei Einführung bekannter Polarcoordinaten φ und ψ wird

$$89)\qquad v^2 = r^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + r^2 \sin\psi^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

$$z = r\cos\psi,$$

und es ist also:

$$90)\qquad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \sin\psi^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{r}\cos\psi + \frac{C}{r^2},$$

oder wegen

$$\sin\psi^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C'}{r^2},$$

$$91)\qquad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{\sin\psi^2} = \frac{2g}{r}\cos\psi + A,$$

worin

$$A = \frac{C}{r^2}, \quad C = \frac{C'}{r^2}.$$

Aus der letzten Differentialgleichung resultirt also das Zeitintegral

$$92)\qquad t = \int \frac{\sin\psi d\psi}{\sqrt{-C^2 + \left(A + \frac{2g}{r}\cos\psi\right)\sin\psi^2}},$$

worin die Constanten sich auf den Anfangszustand beziehen.

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen oder

$$93)\qquad -\frac{2g}{r}\left(\cos\psi^3 + \frac{Ar}{2g}\cos\psi^2 - \cos\psi - \frac{r}{2g}(A - C^2)\right)$$

kann durch Einführung der Wurzeln dieser Gleichung auf eine Form gebracht werden, welche eine Vergleichung mit dem Integral 84) zulässt. Diese Form ist

$$94)\qquad t = \sqrt{\frac{r}{2g}}\int \frac{d\cos\psi}{\sqrt{-(\cos\psi - \cos\alpha)(\cos\psi - \cos\beta)\left(\cos\psi + \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right)}}$$

Vermittelst der bekannten Substitution (S. Schell, Theorie etc. S. 358)

$$\cos\psi = \cos\beta - (\cos\beta - \cos\alpha)\sin\sigma^2, \quad \text{woraus}$$

95) $$\sin\sigma^2 = \frac{\cos\beta - \cos\psi}{\cos\beta - \cos\alpha},$$

geht das Integral für $\cos\psi = x$ über in

96) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-(x-\cos\alpha)(x-\cos\beta)\left(x+\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right)}},$$

und seine Normalform ist $\int \frac{d\sigma}{\sqrt{1-Z^2\sin\sigma^2}}$, so dass man hat

97) $$\int \frac{d\sigma_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\sigma_1^2}} + \int \frac{d\sigma_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\sigma_2^2}} + \int \frac{d\sigma_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\sigma_3^2}} = 0$$

worin

98) $$Z^2 = \frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta^2}.$$

Diese Gleichungen sind mit dem der Curve 3. Grades identisch, wenn man letzterer die Form gibt

99) $$y^2 = -(x-\cos\alpha)(x-\cos\beta)\left(x+\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right)$$

Hiernach sind die Abscissen der 3 Schnittpunkte $A_1 A_2 A_3$ von Achse und Curve der Reihe nach gleich

$$-\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}, \quad \cos\alpha, \quad \cos\beta. \quad \text{Fig. 6.}$$

Um den Anfangspunkt beschreiben wir mit dem Radius $r = 1$ einen Kreis, derselbe wird den 1. Punkt A_1 aus-, dagegen die beiden andern einschliessen. Ferner ziehen wir eine die Curve in 3 Punkten schneidende, der X-Achse parallele Gerade, die Ordinaten des 2. und 3. Punktes verlängern wir bis zum Kreise, und die Radien dieser Schnittpunkte mögen mit der X-Achse die Winkel ψ_2, ψ_3 einschliessen. Endlich construiren wir noch über A_2A_3 und A_3X_1 Halbkreise, (X_1 bezeichnet den Abscissenpunkt der 1. Ordinate); im ersten verbinden wir die Schnittpunkte der Ordinaten y_2, y_3 und der Curve A_2 durch Sehnen, welche mit der Achse die Winkel σ_2 und σ_3 bilden. Der Schnittpunkt der Ordinate in A_1 und des 2. Kreises, verbunden mit X_1 durch eine Sehne, bestimmt den 3. Winkel σ, so dass auch hier die Amplituden der Integrale geometrisch bekannt sind. Die Sache verhält sich nun so:

Während das Kugelpendel seine Bewegung vom tiefsten Punkte (β) zum höchsten (α) vollführt, geht in der auf der Ebene darge-

stellten Bewegung der ensprechende Punkt von A_3 nach A_2, gelangt also aus der Lage $\psi_3(\sigma_3)$, wozu die Zeit t_3, in die Lage $\psi_2(\sigma_2)$, wozu die Zeit t_2 erforderlich ist, und es ist, wenn man die der Amplitude σ_1 entsprechende Zeit mit t_1 bezeichnet, für alle der X-Achse parallele Geraden und die dadurch bedingten Amplituden die Relation

$$t_1 = t_2 + t_3 \tag{100}$$

allgemein gültig.

Wegen $t = c\int\frac{dx}{y}$ hat man $\frac{dx}{dt} = v_x = cy$, so dass die auf die X-Achse projicirte Bewegungsgeschwindigkeit des Curvenpunktes der zugehörigen Ordinate proportional ist.

Unserer Figur gemäss geht wegen der Lage der Ordinatenachse die Bewegung in der untern Halbkugel vor sich, denn α liegt zwischen $\frac{\pi}{2}$ und 0. Rückt aber diese Achse über A_2 hinaus, so liegt α zwischen π und $\frac{\pi}{2}$, und der höchste Punkt befindet sich auf der obern Halbkugel. Zieht man im Punkte (β) eine Tangente bis zur Achse, so bildet das von der X-Achse abgeschnittene Stück $OC = \frac{r}{\cos\beta}$ ein Kriterium für diese Bewegungsverhältnisse. Ist nämlich die Geschwindigkeitshöhe im tiefsten Punkt der Bahn kleiner oder grösser als diese Strecke, so liegt der höchste Curvenpunkt in der untern beziehungsweise obern Halbkugel.

Es erübrigt noch, die geometrische Bedeutung des Modulus der obigen elliptischen Integrale nachzuweisen.

Zu dem Ende beschreiben wir noch über A_1A_3 einen Halbkreis, errichten in A_2 die Ordinate und verbinden den Schnittpunkt derselben mit dem Mittelpunkt des Kreises. Der Radius ist

$$\varrho = \frac{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta^2}{\cos\alpha + \cos\beta},$$

die Abscissenache Z des Punktes A_2 in Bezug auf den Mittelpunkt

$$= \frac{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + 2\cos\alpha^2 - \cos\beta^2}{\cos\alpha + \cos\beta},$$

also ist

$$\frac{Z}{\varrho} = \cos\alpha' = \frac{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + 2\cos\alpha^2 - \cos\beta^2}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta^2}.$$

Aus der Figur ergibt sich ferner, wenn wir

$$Z^2 = \frac{A_3 - A_2}{A_3 - A_1}$$

transformiren, dass

101) $$Z = \sin \tfrac{1}{2}\alpha'$$

womit der Ausdruck

$$Z^2 = \frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta^2}$$

geometrisch definirt ist.

§ 10.

Die so eben gegebenen Entwickelungen finden ebenfalls Anwendung auf die Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreise, welcher Fall aus dem vorhergehenden durch die Annahme, dass die Bewegung im tiefsten Punkte der Kugel beginne, oder dass $\beta = 0$ ist, leicht abgeleitet werden kann. Der Punkt geht bis α und kehrt wieder zurück, der Modulus des Integrals für diese schwingende Bewegung ist $Z = \sin \frac{1}{2}\alpha$, der Winkel desselben oder α hat den Spielraum von 0 bis 180°. Für $Z = 1$ hat man die asymptotische Bewegung als Grenzfall für die Curve 3. Grades. Die Verhältnisse bleiben in diesem speciellen Falle dieselben, wie vorhin für den allgemeinen. Jede der X-Achse parallele, die Curve in 3 reellen Punkten schneidende Gerade bestimmt 3 Amplituden und entsprechende Zeiten, welche durch die Relation $t_1 = t_2 + t_3$ mit einander verknüpft sind. Die Curve wird durch die Gleichung 3. Grades

$$y^2 = -(x - \cos\alpha)(x^2 - 1),$$

oder

102) $$x^3 - \cos\alpha\, x^2 - x + \cos\alpha + y^2 = 0$$

bestimmt.

Ist $\alpha = 90^0$, so ist $Z^2 = \frac{1}{2}$. Die Bewegung des Punktes geschieht in dem Halbkreise und die Integralfunction

$$\int \frac{d\sigma_1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\sigma_1^2}} = \int \frac{d\sigma_2}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\sigma_2^2}} + \int \frac{d\sigma_3}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\sigma_3^2}}$$

in welcher die Amplituden σ als Focalwinkel einer Lemniskate angesehen werden können, geht über in eine Relation $u_1 = u_2 + u_3$ von Lemniskatenbogen. Die Curve hat dann die Gleichung

$$x^3 - x + y^2 = 0,$$

wobei wir daran erinnern, dass dieselbe wie alle übrigen aus 2 zur X-Achse symmetrischen Teilen besteht, von denen aber nur eine gezeichnet ist.

Zum Zwecke einer Verification wählen wir den Fall der asymptotischen Bewegung, welche der Curve (Fig. 7.)

$$x^3+x^2-x-1+y^2=0 \tag{103}$$

entspricht. Für $y=0$ sind deren Wurzeln $x_3=+1$ und $x_{12}=-1$.

Die Gerade sei eine Tangente, so dass die Gleichung für den Maximalwert von $y=\sqrt{\frac{32}{27}}$, zwei gleiche Wurzeln $x=\frac{1}{3}$ besitzt, die 3. Wurzel $=-\frac{5}{3}$. Die erste Kreisordinate, welche mit der 2. zusammenfällt, hat den Wert $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, die Ordinate y' im Punkte A_1 ist $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, woraus die Amplituden $\operatorname{tg}\sigma_2=\operatorname{tg}\sigma_3=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\sigma_1=\sqrt{3}$, oder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma_1=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ folgen. Da nun das Integral

$$\int\frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sin\sigma^2}}=\log\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{\sigma}{2}\right)$$

ist, so geht die Integralfunction über in

$$\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\sigma_2)^2=\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\sigma_1) \tag{104}$$

welche Gleichung bei Benutzung der berechneten Amplituden leicht bewahrheitet werden kann.

§ 11.

Die Integralfunctionen der Ellipse.

Von besonderer Bedeutung werden die allgemeinen Entwickelungen des § 1. für die Kegelschnitte, indem die aus denselben gewonnenen Theoreme einer Erweiterung fähig sind.

Die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{105}$$

werde von einem Kreise, dessen Centrum die Coordinaten $R(\alpha)$ habe, in 4 Punkten, deren Coordinaten $x=a\sin\varphi$, $y=b\cos\varphi$ etc. geschnitten.

Ist der Radius des Kreises $=s$, so bestehen die Formeln

$$\begin{gathered} s^2=R^2+r^2-2Rr\cos(\psi-\alpha), \\ R\cos\psi=a\sin\varphi,\quad R\sin\psi=b\cos\varphi, \\ r^2=a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2. \end{gathered} \tag{105}$$

Die Elimination von φ und r aus der 1. dieser Gleichungen vermittelst der beiden folgenden liefert das Schlussresultat

$$105)\quad \sin\varphi^4 - \frac{4Ra}{c^2}\cos\alpha\sin\varphi^3 + \frac{a^2}{c^4}\left(4R^2\cos\alpha^2 + 4\frac{b^2R^2}{a^2}\sin\alpha^2 + 2\frac{c^2}{a^2}L\right)\sin\varphi^2$$
$$-4\frac{Ra}{c^4}L\cos\alpha\sin\varphi + \frac{L^2 - 4b^2R^2\sin\alpha^2}{c^4} = 0,$$

worin

$$L = R^2 + b^2 - s^2.$$

Führt man $x = a\sin\varphi$ ein, so entsteht

$$106)\quad x^4 - 4R\frac{a^2}{c^2}\cos\alpha . x^3 + \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{4R^2a^2}{c^2}\cos\alpha^2 + 4\frac{b^2R^2}{c^2}\sin\alpha^2 + 2L\right)x^2$$
$$-4R\frac{a^4L}{c^4}\cos\alpha . x + \frac{a^4}{c^4}(L^2 - 4b^2R^2\sin\alpha^2) = 0.$$

Dieser Gleichung steht zur Seite

$$107)\quad y^4 + 4R\frac{b^2}{c^2}\sin\alpha . y^3 + \frac{b^2}{c^2}\left(\frac{4R^2a^2}{c^2}\cos\alpha^2 + 4\frac{b^2R^2}{c^2}\sin\alpha^2 - 2L'\right)y^2$$
$$-4R\frac{b^4}{c^4}L'\sin\alpha . y + \frac{b^4}{c^4}(L'^2 - 4R^2a^2\cos\alpha^2) = 0.$$

$$L' = R^2 + a^2 - s^2.$$

Auf diese Gleichung findet die Formel 13) Anwendung, die Ausführung gibt in geordneter Darstellung das Differential

$$108)\quad \frac{dx}{\frac{4abR}{c^2}\sqrt{(x^2-a^2)\left(x^4 - \frac{2a^2}{c^2}(L-2R^2)x^2 + \frac{a^4}{c^4}(L^2-4b^2R^2)\right)}}$$

oder transformirt und integrirt

$$109)\quad \Sigma\int\frac{dx}{\frac{4abR}{c^2}\sqrt{(x^2-a^2)\left(x^2+\frac{a^2}{c^2}(b^2-(R+1)^2)\right)\left(x^2+\frac{a^2}{c^2}(b^2-(R-1)^2)\right)}} = C$$

Dies hyperelliptische Integral kann durch Multiplication mit x auf ein elliptisches zurückgeführt werden, welche Lösung wir nachher in voller Allgemeinheit geben. Hier machen wir die Annahme, dass $s = R \pm b$ sei, dann ist auch $L = \mp 2Rb$. Bei Einführung von $x = a\sin\varphi$ geht das letzte Integral über in

$$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{4R(R\pm b)}\sin\varphi^2}} = C.$$

Nach einer Untersuchung über die Vorzeichen und die Constante resultirt

$$110)\quad \int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1^2}} = \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3^2}} + \int \frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4^2}},$$

und beziehen sich die Indices auf die entsprechenden Quadranten, wobei wir $R(\alpha)$ in 1. annehmen.

Aus der Relation

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=0$$

olgt, wenn die φ absolut genommen werden,

$$\operatorname{am}u_1-\operatorname{am}u_2-\operatorname{am}u_3+\operatorname{am}u_4=0.$$

Setzt man im Anschluss an die Ellipse den Modulus $Z^2=\frac{c^2}{4R(R+b)}$ und die Amplituden φ_2, φ_3, φ_4 als gegeben voraus, so lassen hieraus die auf die Ellipse sich beziehenden Verhältnisse $\frac{a}{b}$, $\frac{R}{b}$, α sich bestimmen. Es besteht nämlich die folgende Relation

$$\frac{a}{b}\cos\alpha.\sin\varphi+\sin\alpha.\cos\varphi-\frac{2R}{b}Z^2\sin\varphi^2=2Z^2\sin\varphi^2-1.$$

Es sei

$$\frac{a}{b}\cos\alpha=x,\quad \sin\alpha=y,\quad \frac{2RZ^2}{b}=z,$$

dann hat man die folgenden 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} x\sin\varphi_1+y\cos\varphi_1-z\sin\varphi_1^2 &= 2Z^2\sin\varphi_1^2-1,\\ x\sin\varphi_2+y\cos\varphi_2-z\sin\varphi_2^2 &= 2Z^2\sin\varphi_2^2-1,\\ x\sin\varphi_3+y\cos\varphi_3-z\sin\varphi_3^2 &= 2Z^2\sin\varphi_3^2-1.\end{aligned}$$

Die Auflösung ergibt

$$\frac{Z^2}{2}\left(\frac{R}{b}+1\right)=-\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_3)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_1)}{\sin\varphi_1^2\sin(\varphi_2-\varphi_3)+\sin\varphi_2^2\sin(\varphi_3-\varphi_1)+\sin\varphi_3^2(\varphi_1-\varphi_2)}$$

u. s. w.

Bemerkenswerter sind die elliptischen Integrale der 2. Art.

Gemäss den in § 1. entwickelten Formeln findet man leicht

$$111)\quad \Sigma\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi^2}\,d\varphi=\frac{2b}{c}\sqrt{\frac{R}{s}}\,d(\cos\alpha).$$

Nach Feststellung der Vorzeichen ist die Integralfunction

$$112)\quad -\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1^2}\,d\varphi_1+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^2}\,d\varphi_2$$
$$+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3^2}\,d\varphi_3+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^4}\,d\varphi_4=\frac{4bR}{ac}\cos\alpha.$$

$$Z^2=\frac{c^2}{4R(R+b)}.$$

Da nun bekanntlich Ellipsenbogen durch Integrale dieser Art ausgedrückt werden, so liegt der Gedanke nahe, die obigen Integrale durch die dazu erforderliche Bedingung

$$Z^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

mit solchen Bogen unserer Ellipse zu identificiren. Aus der Bedingung

$$113)\qquad \frac{c^2}{a^2}=\frac{c^2}{4R(R+b)}\quad\text{und}\quad s=R+b$$

folgen nun die Relationen

$$114)\qquad R=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{2},\quad s=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{2},$$

wodurch die Integrale in Ellipsenbogen übergehen, wenn die Function noch mit a multiplicirt wird.

Demnach kann man folgenden Satz aussprechen:

Jeder Kreis vom Halbmesser $s=R+b$, dessen Centrum $R(\alpha)$ auf einem mit dem Radius $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{2}$ um den Mittelpunkt einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ beschriebenen Kreise liegt, schneidet auf derselben von den entsprechenden Scheitelpunkten der kleinen Achse an gerechnete Bogen S ab, für welche die Relation

$$115)\qquad S_1=S_2+S_3+S_4-4\frac{bR}{c}\cos\alpha$$

besteht.

S_3+S_4 bilden zusammen einen Ellipsenbogen.

Auf die Integralfunction

$$116)\qquad F(\varphi_1)-F(\varphi_2)=F(\varphi_3)+F(\varphi_4)$$

lässt sich das Additionstheorem der elliptischen Integrale 1. Art mit seinen bekannten Gleichungssystemen anwenden. Erwägen wir, dass

durch Transposition aus dem obigen Ausdruck noch die beiden folgenden

$$117)\quad \begin{aligned} F(\varphi_1)-F(\varphi_3) &= F(\varphi_2)+F(\varphi_4),\\ F(\varphi_1)-F(\varphi_4) &= F(\varphi_2)+F(\varphi_3), \end{aligned}$$

hervorgehen, und führen ein

$$118)\quad \begin{aligned} F(\varphi_1)-F(\varphi_2) &= F(\sigma),\\ F(\varphi_3)+F(\varphi_4) &= F(\sigma), \end{aligned}$$

welche mit den Formeln

$$119)\quad \begin{aligned} \cos\sigma &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\sigma),\\ \cos\sigma &= \cos\varphi_3\cos\varphi_4-\sin\varphi_3\sin\varphi_4\Delta(\sigma) \end{aligned}$$

vorknüpft sind, so hat man folgende symmetrische Function:

$$120)\quad \sin\sigma = \frac{\cos\varphi_1{}^2-\cos\varphi_2{}^2}{-\cos\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\varphi_1)-\cos\varphi_2\sin\varphi_1\Delta(\varphi_2)} = \frac{\cos\varphi_3{}^2-\cos\varphi_4{}^2}{\cos\varphi_3\sin\varphi_4\Delta(\varphi_3)-\cos\varphi_4\sin\varphi_3\Delta(\varphi_4)},$$

und in Verbindung mit andern bekannten Relationen noch eine zahlreiche Menge neuer. Wir geben später unter Benutzung der Jacobischen Construction bezüglich der Addition der elliptischen Integrale eine weitere geometrische Durchführung der bisher entwickelten Functionen in allgemeinster Betrachtung. Man bemerke noch die der Formel 108) analoge Integralfunction

$$121)\quad \int \frac{dy}{\frac{4abR}{c^2}\sqrt{(y^2-b^2)\left(y^2-\frac{b^2}{c^2}(a^2-(R-s)^2)\right)\left(y^2-\frac{b^2}{c^2}(a^2-(R-s)^2)\right)}}.$$

Auf diese hyperelliptischen Integrale kommen wir später zurück.

§ 12.

Wenden wir die vorhin gegebenen Functionen auf die Hyperbel

$$122)\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

an und setzen die Bedingung $s = R \pm a$ voraus, so erhalten wir die Function

$$123)\quad \Sigma\int\frac{dy}{\frac{4abR}{c^2}y\sqrt{(y^2+b^2)\left(\frac{4Rsb^2}{c^2}-y^2\right)}} = C.$$

Die Reduction auf die kanonische Form basirt auf

$$124)\quad Z^2 = \frac{4Rs}{c^2+4Rs}, \qquad y = \frac{2b}{c}\sqrt{Rs}\cdot\cos\tfrac{1}{2}\vartheta',$$

und es ist

$$125)\quad \Sigma\frac{1}{\frac{4b^2}{c^2}aR\sqrt{1+\frac{4Rs}{c^2}}}\int\frac{d\varphi}{y\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}} = C,$$

woraus zunächst

$$126)\quad \Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}} = 0.$$

Ferner ist nach bekannten Methoden

$$127)\quad \Sigma\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}\,d\varphi = \frac{4Ra}{c^2}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\frac{4Rs}{c^2}}}.$$

Setzt man $c^2 = 4Rs$, so wird $Z^2 = \frac{1}{2}$, woraus

$$128)\quad R = \frac{\sqrt{a^2+c^2}\mp a}{2}, \qquad s = \frac{\sqrt{a^2+c^2}\pm a}{2}.$$

Demnach besteht für $y = b\cos\varphi$ die Integralfunction

$$129)\quad \Sigma\int\frac{dx}{b^4-y^4},$$

welche, wenn y als Radiusvector einer Lemniskate $r^2 = b^2\cos 2\varphi$ aufgefasst wird, Bogen dieser Curve darstellt.

Um auf Hyperbogen zu kommen, multiplicire man in 125) den Nenner mit y und beachte 124), dann wird man

$$130)\quad \Sigma\int\frac{d\varphi}{\cos\frac{1}{2}\vartheta'^2\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}} = \frac{4s}{a}\sqrt{1+\frac{4Rs}{c^2}}\,\frac{1}{\sin\alpha}$$

als eine Summe von Hyperbelbogen haben.

Die geometrische Bedeutung von ϑ' geben wir § 16.

Sollen diese Bogen sich auf die vorliegende Hyperbel beziehen, so ist einzuführen

$$131)\quad Z^2 = \frac{4Rs}{c^2+4Rs} = \frac{a^2}{c^2},$$

woraus wegen $s = R+a$

$$132)\quad R = \frac{-b+\sqrt{b^2+c^2}}{2}\cdot\frac{a}{b}$$

$$y = a\cos\tfrac{1}{2}\theta' = a\cos\frac{\theta}{2}.$$

Die geometrische Bedeutung von θ werden wir gleich angeben. Demnach ist

$$133)\quad \Sigma\int\frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta^2}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}\sin\frac{\theta^2}{2}}} = \frac{4cs}{ab}\,\frac{1}{\sin\alpha}.$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{y}{a}.$$

Man verbinde einen Hyperbelpunkt durch Brennstrahlen mit den Brennpunkten, und bezeichne den Winkel, welchen ein Brennstrahl mit der Verlängerung des andern einschliesst, mit θ, dann ist

$$134)\quad \frac{x^2}{a^2} = 1+\frac{b^2}{c^2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta^2,$$

$$y = \frac{b^2}{c}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta.$$

Der Ausdruck für den Bogen

$$135)\quad s = \int\frac{b^4+c^2y^2}{b\sqrt{(b^2+y^2)(b^4+c^2y^2)}}$$

geht in Folge des obigen Wertes für y über in

$$136)\quad s = \frac{b^2}{c}\int\frac{d\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta^2\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}\sin\frac{1}{2}\theta^2}},$$

wonach dies bekannte Integral bezüglich seiner Amplitude eine klarere Bedeutung gewinnt.

Bezeichnet man in ähnlicher Art mit θ den Winkel zwischen zwei Brennstrahlen einer Ellipse, so ist der von der grossen Achse an gerechnete Bogen durch das Integral

$$137)\quad s = \frac{b^2}{c}\int\frac{d\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta^2\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}\sin\frac{1}{2}\theta^2}}$$

ausgedrückt.

Wir haben diese beiden Integrale aus dem Grunde eingeführt, weil wir dieselben nachher bei einer dynamischen Betrachtung nötig haben.

Bezüglich der Ellipse erwähnen wir noch das folgende:

Wird ein Ellipsenpunkt P, dessen Coordinaten $x = a \sin\varphi$, $y = b\cos\varphi$ sind, mit einem Brennpunkt F durch den Vector r verbunden, und schliesst derselbe mit der X-Achse den Winkel ψ ein, so ist folgende Relation leicht zu beweisen:

$$138)\quad \int \sqrt{1-Z^2\sin\varphi^2}\,d\varphi = (1-Z)\int \frac{d\tfrac{1}{2}\psi}{\sqrt{1-p^2\sin\tfrac{1}{2}\psi^2}} + (1+Z)\int \sqrt{1-p^2\sin\tfrac{1}{2}\psi^2}\,d\tfrac{1}{2}\psi - Z\cos\varphi\sqrt{\frac{1+Z\sin\varphi}{1-Z\sin\varphi}}.$$

§ 13.

Geometrische Darstellung allgemeiner Integralfunctionen.

Von einiger Bedeutung für die Geometrie und die Theorie der biquadratischen Gleichungen werden die folgenden unter allgemeinsten Gesichtspunkten betrachteten Integralfunctionen werden, indem dieselben geometrisch und analytisch auf eine grosse Menge bemerkenswerter, durch elliptische Integrale bestimmter Probleme sich anwenden lassen.

Wir fanden bei Betrachtung von Kreis und Kegelschnitt die folgenden Functionen

$$139)\quad \begin{aligned} &\Sigma\int \frac{dx}{\frac{4abR}{c^2}\sqrt{(x^2-a^2)(x^2+\frac{a^2}{c^2}(b^2-(R+s)^2))(x^2+\frac{a^2}{c^2}(b^2-(R-1)^2))}} = C \\ &\Sigma\int \frac{dy}{\frac{4abR}{c^2}\sqrt{(y^2-b^2)(y^2-\frac{b^2}{c^2}(a^2-(R+s)^2))(y^2-\frac{b^2}{c^2}(a^2-(R-s)^2))}} = C. \end{aligned}$$

Diese, sowie die uns aus ihnen durch Multiplication von $x^{-2}, x^{-1} \dots x^4$ unter dem Integralzeichen hervorgehenden andern Functionen, sofern sie in den Rahmen dieser Abhandlung gehören, werden wir im folgenden discutiren.

Die Integrale werden wir zunächst vermittelst der Ellipsengleichung

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \text{oder} \quad x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2,$$

woraus

$$y\,dy = -\frac{b^2}{a^2}x\,dx,$$

transformiren. Nach Einführung der gegebenen Substitutionen geht das erste Integral über in

$$\Sigma\int\frac{dx}{\frac{4b^2}{c^2}Ry\sqrt{\left(x^2-\frac{a^2}{c^2}((R+s)^2-b^2)\right)\left(\frac{a^2}{c^2}((R-s)^2-b^2)-x^2\right)}}=0$$

140) oder

$$\Sigma\int\frac{dx}{\frac{4b^2}{c^2}Ry\sqrt{\left(x^2+\frac{a^2}{c^2}(b^2-(R-s)^2)\right)\left(\frac{a^2}{c^2}((R+s)^2-b^2)-x^2\right)}}=0.$$

Um dies Integral auf die Normalform elliptischer Integrale zu bringen, führen wir eine neue Transformation ein.

Wir bezeichnen, wie bekannt, die Entfernung der Mittelpunkte von Ellipse und Kreis mit R, deren Neigung zur X-Achse mit α, und mit $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$ die 4 Winkel zwischen R und den Kreisradien s nach den Schnittpunkten beider Curven. Man hat also (Fig. 8.)

$$x^2 + y^2 = R^2 + s^2 - 2Rs\cos\vartheta,$$

also auch

$$y^2 = \frac{b^2}{c^2}(2Rs\cos\vartheta + a^2 - R^2 - s^2)$$

141)

$$x^2 = \frac{a^2}{c^2}(-2Rs\cos\vartheta - b^2 + R^2 + s^2).$$

Führt man nun diese Ausdrücke in das obige Integral ein, so vereinfacht sich dasselbe ganz bedeutend, und es resultirt schliesslich folgende interessante Integralfunction allgemeinster Art:

142)
$$\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_1}{1-\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2}+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_2}{1-\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2^2}$$
$$+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_3}{1-\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3^2}+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_4}{1-\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4^2}=0$$

deren Amplituden an folgende leicht abzuleitende Gleichung

$$
\begin{aligned}
&((R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2)\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4-2c^2s(R+s)\sin2\alpha\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3\\
143)\quad &+2((a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)(R^2-s^2)+2s^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)-a^2b^2)\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2\\
&-2c^2s(R-s)\sin2\alpha\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta+(R-s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2=0
\end{aligned}
$$

geknüpft sind.

Nach früheren Erörterungen folgt hieraus

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_4)=\frac{a-c}{s-b+d}=-\mathrm{tg}\,2\alpha,$$

woraus

$$144)\qquad \tfrac{1}{2}\vartheta_1+\tfrac{1}{2}\vartheta_2+\tfrac{1}{2}\vartheta_3+\tfrac{1}{2}\vartheta_4=180^0-2\alpha.$$

Führen wir den Modulus Z vermittelst

$$145)\qquad Z^2=\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}$$

ein und bestimmen die Vorzeichen der Integrale, so ist die Relation

$$
146)\qquad
\begin{aligned}
F(\tfrac{1}{2}\vartheta_1)&=F(\tfrac{1}{2}\vartheta_2)+F(\tfrac{1}{2}\vartheta_3)+F(\tfrac{1}{2}\vartheta_4)\\
\mathrm{am}\,u_1+\mathrm{am}\,u_2+\mathrm{am}\,u_3-\mathrm{am}\,u_4&=\pi-2\alpha
\end{aligned}
$$

für den Fall gültig, dass die Gleichung 143) 3 positive $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3$ und 1 negative Wurzel ϑ_4 besitzt. (Siehe Fig. 8.)

Dagegen ist

$$
147)\qquad
\begin{aligned}
F(\tfrac{1}{2}\vartheta_1)&=F(\tfrac{1}{2}\vartheta_2)-F(\tfrac{1}{2}\vartheta_3)+F(\tfrac{1}{2}\vartheta_4)\\
\mathrm{am}\,u_1+\mathrm{am}\,u_2-\mathrm{am}\,u_3-\mathrm{am}\,u_4&=\pi-2\alpha
\end{aligned}
$$

wenn 2 positive $\vartheta_1\,\vartheta_2$ und 2 negative $\vartheta_3\,\vartheta_4$ Wurzeln existiren.

Endlich ist

$$
148)\qquad
\begin{aligned}
F(\tfrac{1}{2}\vartheta_1)&=F(\tfrac{1}{2}\vartheta_2)+F(\tfrac{1}{2}\vartheta_3)-F(\tfrac{1}{2}\vartheta_4)\\
\mathrm{am}\,u_1+\mathrm{am}\,u_2+\mathrm{am}\,u_3+\mathrm{am}\,u_4&=\pi-2\alpha
\end{aligned}
$$

wenn alle Wurzeln ϑ positiv sind.

Geometrisch sind diese Modificationen durch verschiedene Lagen des Kreises und der dadurch entstehenden Verschiebung der Schnittpunkte bezüglich der Centrale leicht zu unterscheiden. Wie man sieht, sind zwar die Vorzeichen der Integrale von diesen Lagen der Curven zu einander abhängig, aber sie folgen nicht den Wurzelvorzeichen der Amplitudengleichung, weshalb sie durch eine besondere geometrische Untersuchung erst festgestellt werden müssten.

Die Integrale 2. Art werden auf ähnliche Art gefunden. Indem wir an die Formel 17) d) erinnern, multipliciren wir 140) mit x^3 und transformiren den Ausdruck.

Das Endresultat ist

$$150)\quad \int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_1+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_2$$
$$+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_3+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_4$$
$$=\frac{2b}{c}Z\sqrt{\frac{R}{s}}\cos\alpha$$

und die Vorzeichen bestimmen sich nach den in 146) — 148) angegebenen.

Wollen wir endlich noch Integrale 3. Art in den Kreis der Betrachtung ziehen, so erinnern wir an 17) f). Demnach hat man im Nenner mit y zu multipliciren und man wird nach einigen leichten Rechnungen folgende Integralfunction finden:

$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{\left(1-\frac{4Rs}{b^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2\right)\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}}$$
$$=\frac{4bR}{cZ}\sqrt{4Rs}(b^2-(R-s)^2)\int\frac{d\cos\alpha}{(R^2+b^2-s^2)^2-4b^2R^2+4b^2R^2\cos^2\alpha}$$

151) . d. i.

$$\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{(1-h\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2)\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}}$$
$$=\frac{4\sqrt{Rs}}{cZ}\frac{(b^2-(R-s)^2)}{\sqrt{(R^2+b^2-s^2)^2-4b^2R^2}}\operatorname{arctg}\frac{2bR\cos\alpha}{\sqrt{(R^2+b^2-s^2)^2-4b^2R^2}}.$$

Diese von jeder speciellen Annahme unabhängigen Integralfunctionen können auf verschiedene Weise geometrisch interpretirt oder analytisch transformirt werden, wodurch die Fälle mathematischer oder dynamischer Probleme, in welchen elliptische Integrale vorkommen, mit den obigen Entwickelungen in eine nähere Beziehung treten. Die wichtigeren Verhältnisse dieser Art werden wir durch mehrere Beispiele illustriren.

Der Integralfunction für die Ellipse

$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}}=0,\quad Z^2=\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}$$

schliesst sich, wie ohne Weiteres erhellt, die folgende an:

$$152)\qquad \Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta^2}}=C,\quad Z^2=\frac{4Rs}{b^2-(R-s)^2}$$

Die Formeln für die Hyperbel sind denen der Ellipse analog:

$$153)\qquad \Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1+\frac{4Rs}{b^2+(R-s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta^2}}=C,$$

$$\Sigma\int\frac{4Rs}{\sqrt{1+\frac{4Rs}{(R-s)^2-a^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta^2}}=C.$$

Falls man für ϑ seinen Supplementwinkel ϑ' einführt, transformiren sich die Functionen in diejenigen Formen, welche wir später nötig haben.

Indem wir die Winkel, welche die Kreisradien nach den 4 Schnittpunkten des Kreises und der Ellipse mit der verlängerten Centrale OR bilden, mit $\vartheta_1'\vartheta_2'$ etc. bezeichnen, besteht die Gleichung:

$$154)\quad ((R-s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'^4-2c^2s(R-s)\sin2\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'^3$$
$$+2((a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)(R^2-s^2)+2s^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)-a^2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'^2$$
$$-2c^2s(R+s)\sin2\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'+((R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2)=0.$$

Die Integralfunctionen für die Ellipse sind in diesem Falle

$$155)\qquad \begin{aligned}&\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-b^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_1{}^2}}=0\\ &\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}}=C.\end{aligned}$$

Die Integralfunctionen für die Hyperbel dagegen sind

$$156)\qquad \begin{aligned}&\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2+b^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_1'^2}}=2K\\ &\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}}=0\end{aligned}$$

In der obigen Amplitudengleichung muss im letztern Falle $-b^2$ statt b^2 gesetzt werden. Die Integrale 2. Art sind den soeben gegebenen 1. Art entsprechend. Wir wollen für diejenigen 3. Art noch folgende Function aufstellen:

157)

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\left(1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2\right)\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2+b^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}}=C$$

und die entsprechend zweite für dieselbe Hyperbel

158)

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\left(1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-b^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2\right)\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}}=C$$

Ebenso hat man für die Ellipse

159)

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\left(1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-b^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2\right)\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}}=C$$

u. s. w.

§ 14.

Die Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen können wir auf die obigen Integrale anwenden. Wählen wir von den Formeln 146) — 148) die folgende

$$u_1-u_2+u_3-u_4=0,$$

so ist bei Benutzung von

$$\operatorname{am}u=\frac{\pi}{2K}u+2\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}\ldots\right)$$

zunächst

$$\tfrac{1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2+\vartheta_3-\vartheta_4)$$
$$=2\left(\frac{q}{1+q^2}\left(\sin\frac{\pi u_1}{K}-\sin\frac{\pi u_2}{K}+\sin\frac{\pi u_3}{K}-\sin\frac{\pi u_4}{K}\right)+\text{ etc.}\right)\qquad\text{oder}$$

$$\tfrac{1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2+\vartheta_3-\vartheta_4)$$
$$=\frac{2q}{1+q^2}\left(\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_1-u_2}{K}\cos\frac{\pi}{2}\frac{u_1+u_2}{K}+\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_3-u_4}{K}\cos\pi\frac{u_3+u_4}{K}\ldots\right)$$

d. i.

$$-\frac{1}{16}(\vartheta_1-\vartheta_2+\vartheta_3-\vartheta_4)=\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_1-u_2}{K}\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_1+u_3}{K}\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_2-u_3}{K}$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi}{2}\frac{u_1-u_2}{K}\sin\frac{2\pi}{2}\frac{u_1-u_3}{K}\sin\frac{2\pi}{2}\frac{u_2-u_3}{K}\ldots$$

Verbinden wir hiermit

$$\vartheta_1+\vartheta_2-\vartheta_3-\vartheta_4=360^0-4\alpha \quad (\vartheta \text{ absolut})$$

so ist

160) $\tfrac{1}{2}(\vartheta_2-\vartheta_3)$

$$=\frac{\pi}{2}-\alpha+4\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_1-u_2}{K}\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_1+u_3}{K}\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_2-u_3}{K}\ldots\right)$$

und dieser Formel schliessen sich noch mehrere verwandte an.

Wie schon früher erwähnt, können durch Einführung der Additionstheoreme die obigen Ausdrücke erweitert und in geometrischem Sinne gedeutet werden. Demgemäss bestehen die beiden Relationen

161)
$$F\tfrac{1}{2}\vartheta_1+F\tfrac{1}{2}\vartheta_2=F\sigma$$
$$F\tfrac{1}{2}\vartheta_3+F\tfrac{1}{2}\vartheta_4=F\sigma$$

wenn wir die Function etwa in folgender Form

$$F\tfrac{1}{2}\vartheta_1+F\tfrac{1}{2}\vartheta_2=F\tfrac{1}{2}\vartheta_3+F\tfrac{1}{2}\vartheta_4$$

zu Grunde legen. Die Vorzeichen sind den entsprechenden Lagen beider Curven gemäss zu bestimmen.

Alle auf die Additionstheoreme bezüglichen Formeln zwischen den Amplituden der Integrale geben auf die Ellipse oder Hyperbel bezogen eben soviele symmetrische Functionen zwischen den Wurzelwerten der Amplitudengleichung.

So erhält man

162)

$$\frac{\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_1\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_2-\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_1\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_2}{\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_3\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_4-\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_3\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_4}=\frac{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2^2}{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4^2},$$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_2\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_2+\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_1\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_1}{\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_4\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_3+\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_3\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_4}=\frac{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2^2}{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4^2},$$

$$\frac{\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_1\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_2-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_1\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_2}{\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_3\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_4-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_4}=\frac{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2^2}{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4^2},$$

$$\frac{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_1\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_2+\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_2\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_1}{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_3\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_4+\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_4\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_3}=\frac{1-\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_1\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_2\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_1\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_2}{1-\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_3\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_4\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_3\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_4}.$$

$$\Delta_1\tfrac{1}{2}\vartheta_1 \pm \Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_2 = \frac{\Delta(\sigma)\pm 1}{\sin\sigma}\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_1 \pm \vartheta_2),$$

$$\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_3 \pm \Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_4 = \frac{\Delta(\sigma)\pm 1}{\sin\sigma}\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_3 \pm \vartheta_4).$$

Die Division der beiden letzten Gleichungen führt auf

$$163)\qquad \begin{aligned} \frac{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_1 + \Delta\frac{1}{2}\vartheta_2}{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_3 + \Delta\frac{1}{2}\vartheta_4} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3+\vartheta_4)} \\ \frac{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_1 - \Delta\frac{1}{2}\vartheta_2}{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_3 - \Delta\frac{1}{2}\vartheta_4} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3-\vartheta_4)}, \end{aligned}$$

welche Formeln eine geometrische Erklärung zulassen.

Führen wir nämlich die folgenden Beziehungen ein

$$164)\qquad \Delta\tfrac{1}{2}\vartheta = \sqrt{1 - \frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}$$

und setzen

$$\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2 = \sin\varphi^2,$$

woraus

$$\cos\varphi = \frac{cy}{b\sqrt{a^2-(R-s)^2}},$$

so geht 163) über in

$$165)\qquad \frac{y_1+y_2}{y_3+y_4} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3+\vartheta_4)},$$

welche Formel sich auf den Fall bezieht, dass die Gleichung 3 positive und 1 negative Wurzel besitzt.

Beachtet man nun, dass durch Vertauschung der Indices noch 2 andere Relationen existiren, so ist die geometrische Erklärung dieser 3 Fälle diese:

Bezeichnen wir den Winkel zwischen dem 1. und 2. Kreisradius mit $2E = \vartheta_2 - \vartheta_1$ und ebenso mit $2E' = \vartheta_3 + \vartheta_4$ den Winkel zwischen dem 3. und 4. Radius, so ist (Fig. 8.)

$$\frac{y_1+y_2}{y_3+y_4} = \frac{\sin E}{\sin E'},$$

heissen die entsprechenden Sehnen zu $2E$ und $2E'$ S und S', so ist ferner

$$\frac{\sin E}{\sin E'} = \frac{S}{S'},$$

demnach auch

$$\frac{y_1+y_2}{y_3+y_4}=\frac{S}{S'} \quad \text{oder} \quad \frac{y_1+y_2}{S}=\frac{y_3+y_4}{S'},$$

woraus folgt, dass überhaupt die gegenüberstehenden Seiten, sowie die Diagonalen eines Kreisvierecks in einem Kegelschnitt symmetrisch gegen die Achsen stehen.

Das Additionstheorem für elliptische Integrale 2. Art ist bekanntlich

$$E(\varphi)+E(\varphi')=E(\sigma)+Z^2\sin\varphi\sin\varphi'\sin\sigma.$$

Für die Function 150) hat man zunächst

$$\text{165)} \quad \begin{aligned} E(\tfrac{1}{2}\vartheta_1)+E(\tfrac{1}{2}\vartheta_2)&=E(\sigma)+Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\sigma,\\ E(\tfrac{1}{2}\vartheta_3)+E(\tfrac{1}{2}\vartheta_4)&=E(\sigma)+Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4\sin\sigma,\end{aligned}$$

also durch Subtraction, und wenn $\frac{2b}{c}Z\sqrt{\frac{R}{s}}\cos\alpha=C$ gesetzt wird,

$$\text{166)} \quad C=Z^2\sin\sigma(\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2-\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4),$$

und durch Vertauschung der Zeichen die beiden analogen

$$\text{167)} \quad \begin{aligned} C&=Z^2\sin\sigma'(-\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3+\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4)\\ C&=Z^2\sin\sigma''(-\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4+\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3),\end{aligned}$$

worin

$$\sin\sigma=\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta_1\cos\frac{1}{2}\vartheta_2\Delta\frac{1}{2}\vartheta_2+\sin\frac{1}{2}\vartheta_2\cos\frac{1}{2}\vartheta_1\Delta\frac{1}{2}\vartheta_1}{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_1{}^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_2{}^2} \quad \text{etc.}$$

Die Verbindung der letzten Formeln ergibt einige neue symmetrische Gleichungen für die 4 Wurzeln.

In ähnlicher Weise erhält man solche vermittelst der Integrale 3. Art.

§ 15.

Die folgende geometrische Darstellung der elliptischen Integralfunctionen geht von der von Jacobi gegebenen Construction des Additionstheorems der elliptischen Integrale 1. Art aus.

Dieselbe als bekannt voraussetzend, haben wir nach dem Vorhergehenden

$$\text{168)} \quad \begin{aligned} F\tfrac{1}{2}\vartheta_1&=F\tfrac{1}{2}\vartheta+F\tfrac{1}{2}\vartheta_2\\ F\tfrac{1}{2}\vartheta_3&=F\tfrac{1}{2}\vartheta-F\tfrac{1}{2}\vartheta_4\\ F\tfrac{1}{2}\vartheta_1&=F\tfrac{1}{2}\vartheta_2+F\tfrac{1}{2}\vartheta_3+F\tfrac{1}{2}\vartheta_4.\end{aligned}$$

Der grössere Kreis habe den Radius s, der kleinere r, die Centrale sei h, man wird dann haben (Fig. 9.)

$$\frac{s-h}{s+h} = \sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}, \qquad \frac{r}{s+h} = \cos\tfrac{1}{2}\vartheta,$$

$$r = (s+h)\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_1\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_2 + (s-h)\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2,$$
$$r = (s+h)\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_3\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_4 - (s-h)\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4$$

woraus, wenn ϑ_4 negativ

$$\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_1\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_2 + \frac{s-h}{s+h}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2 = \cos\tfrac{1}{2}\vartheta_3\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_4 + \sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4\frac{s-h}{s+h}$$

Diese Formel lässt sich in die folgende überführen

169) $$s\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2) + h\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) = s\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_3-\vartheta_4) + h\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_3+\vartheta_4),$$

deren geometrische Richtigkeit aus der Figur leicht nachzuweisen ist.

Wir halbiren die Winkel γ_1 und γ_2 durch Gerade, welche bezüglich für das Centrum O zwei Centralen OO' und OO'' bestimmen, wovon die erste h_1, die zweite h_2 heissen möge. Von dem Schnittpunkt A derselben mit dem Kreise um O ziehen wir zum innern Kreise um O' eine Tangente t_1, ebenso eine zweite Tangente t_2 von A aus an den äussern Kreis um O_2, beide Kreise berühren bezüglich die gegenüberstehenden Seiten des Kreisvierecks und man hat zunächst für den innern Kreis

170) $$\frac{4sh_1}{(s+h_1)^2} = Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2, \quad \text{also} \quad 4sh_1 = Z^2t_1^2.$$

Ferner ist vermöge einer Permutation von 170)

171) $$\frac{4sh_2}{(s+h_2)^2} = Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2, \quad \text{also} \quad 4sh_2 = Z^2t_2^2,$$

mithin

$$h_1 : h_2 = t_1^2 : t_2^2.$$

Endlich kann man auch für alle 3 Permutationen der Functionen, welche sich auf die Durchschnitte der gegenüberstehenden Seiten und Diagonalen des Kreisvierecks beziehen, allgemein die nachstehende Relation aufstellen:

172) $$Z^2 = \frac{4sh_1}{(s+h_1)^2-r_1^2} = \frac{4sh_2}{(s+h_2)^2-r_2^2} = \frac{4sh_3}{(s+h_3)^2-r_3^2},$$

so dass man hat

173) $$h_1 : h_2 : h_3 = t_1^2 : t_2^2 : t_3^2.$$

Der Centrale kann man beliebige Richtung geben.

Die Halbirungslinien der 3 Winkel $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ sind zu einander parallel, bezüglich senkrecht, demnach ist das Verhältniss z. B. von $\frac{t_1}{t_2}$ für alle Richtungen der Centralen ein constantes, da $\frac{h_1}{h_2}$ constant ist. Demnach resultirt in Beziehung auf 171) folgender Satz:

Ist in einem Kreisviereck der durch 2 gegenüberstehende Seiten gebildete Winkel γ_1 durch eine Gerade M, ebenso der von den andern Seiten gebildete Supplementwinkel γ_2 durch die mit M parallele N halbirt; wird ferner durch den Kreismittelpunkt eine beliebige Gerade AOB gezogen, die jene Geraden in O_1 und O_2 schneidet, und sind letztere Punkte Centra zweier die Seiten des Vierecks entsprechend berührender Kreise; bezeichnet man endlich die Centralen OO' und OO_2 mit h_1 und h_2 und die Tangenten von A nach beiden Kreisen mit t_1 und t_2: so ist das Verhältniss $\frac{h_1}{h_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$ ein constantes für alle durch O gehenden Geraden.

Allgemein ist in Beziehung auf 173) das Verhältniss der drei durch die die Winkel $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ halbirenden parallelen Geraden bestimmten Centralen $h_1 h_2 h_3$ und damit das Verhältniss $t_1 : t_2 : t_3$ der Tangenten an die Kreise für alle Fälle constant.

Wir schreiben die Gleichung in folgender Form:

$$s \sin \tfrac{1}{4}(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \vartheta_3 - \vartheta_4) \sin \tfrac{1}{4}(\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 + \vartheta_4)$$
$$+ h \sin \tfrac{1}{4}(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4) \sin \tfrac{1}{4}(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_3 - \vartheta_4) = 0$$

174) d. i.

$$s \sin \tfrac{1}{2}\gamma_1 \sin \tfrac{1}{2}\gamma_2 + h \sin \tfrac{1}{2}\gamma_3 \cos \alpha = 0.$$

Man kann aber folgende Relation leicht ableiten

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma_1 \sin \tfrac{1}{2}\gamma_2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma_3 = \frac{R}{s} \frac{b^2}{c^2} \cos \alpha,$$

so dass in Folge von

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma_1 \sin \tfrac{1}{2}\gamma_2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma_3 = \frac{h}{s} \cos \alpha \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2$$

die Beziehung

175) $$\sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{R}{p} \frac{b^2}{c^2}$$

ganz allgemein besteht. Es ist darin $p = h \cos \alpha$.

Weil die gegenüberstehenden Seiten des Kreisvierecks gegen die Achsen gleiche Neigung haben, so müssen ihre winkelhalbirenden Geraden überhaupt zu dreien auf der X-Achse senkrecht stehen, während die übrigen derselben parallel sind. Demnach ist $h\cos\alpha = p$ die Projection von h auf die X-Achse d. i. auf die entsprechende winkelhalbirende Gerade. Damit wird die fernere Betrachtung von der Ellipse unabhängig, was auch auf anderm Wege leicht nachzuweisen ist, und wir gelangen zu folgenden neuen Resultaten.

Wir betrachten ein Kreisviereck, dessen Seiten und Diagonalen, wie oben angegeben, die Winkel $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ einschliessen (Fig. 10.). Die Geraden', welche diese Winkel (Nebenwinkel) halbiren, sind zu einander parallel, bezüglich senkrecht. Dem entsprechend ziehen wir durch den Mittelpunkt zwei auf einander senkrecht stehende Gerade, wovon die eine dreien jener Geraden, die andere den übrigen 3 parallel ist.

Nach Feststellung bestimmter Bezeichnungen der Winkel hat man nun

$$176)\quad \begin{aligned} \frac{p_1}{s} &= \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_2\cos\frac{1}{2}\gamma_3}{\cos\frac{1}{2}\gamma_1}, & \frac{p_2}{s} &= \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_2\sin\frac{1}{2}\gamma_3}{\sin\frac{1}{2}\gamma_1}, \\ \frac{p_3}{s} &= \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_1\cos\frac{1}{2}\gamma_3}{\cos\frac{1}{2}\gamma_2}, & \frac{p_4}{s} &= \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_1\sin\frac{1}{2}\gamma_3}{\sin\frac{1}{2}\gamma_2}, \\ \frac{p_5}{s} &= \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_1\cos\frac{1}{2}\gamma_2}{\cos\frac{1}{2}\gamma_3}, & \frac{p_6}{s} &= \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_1\sin\frac{1}{2}\gamma_2}{\sin\frac{1}{2}\gamma_3}. \end{aligned}$$

Die Multiplication dieser Ausdrücke ergibt

$$177)\quad \frac{p_1p_2p_3p_4p_5p_6}{s^6} = \tfrac{1}{8}\sin\gamma_1\sin\gamma_2\sin\gamma_3.$$

Die Division liefert

$$178)\quad \frac{p_1p_3p_5}{p_2p_4p_6} = \cot\tfrac{1}{2}\gamma_1\cot\tfrac{1}{2}\gamma_2\cot\tfrac{1}{2}\gamma_3.$$

Ferner folgt durch Multiplication zweier entsprechenden Ausdrücke

$$179)\quad \begin{aligned} \frac{p_1p_3}{s^2} &= \cos\tfrac{1}{2}\gamma_3^2, & \frac{p_1p_5}{s^2} &= \cos\tfrac{1}{2}\gamma_2^2, & \frac{p_3p_5}{s^2} &= \cos\tfrac{1}{2}\gamma_1^2, \\ \frac{p_2p_4}{s^2} &= \sin\tfrac{1}{2}\gamma_3^2, & \frac{p_2p_6}{s^3} &= \sin\tfrac{1}{2}\gamma_2^2, & \frac{p_4p_6}{s^2} &= \sin\tfrac{1}{2}\gamma_1^2, \end{aligned}$$

Die Addition der unter einander stehenden Formeln ergibt

$$180)\quad \begin{aligned} p_1p_3+p_2p_4 &= s^2, \\ p_1p_5+p_2p_6 &= s^2, \\ p_3p_5+p_4p_6 &= s^2. \end{aligned}$$

Wir haben also folgenden Satz:

Halbirt man in einem Kreisviereck die Winkel zwischen den gegenüberstehenden Seiten und den Diagonalen durch Gerade; zieht man ferner durch das Centrum 2 Gerade, welche beziehungsweise zu dreien der erstern parallel sind, und bezeichnet die Entfernungen der Scheitelpunktsprojectionen der 3 Winkel auf diese Geraden von C durch $p_1 p_2$, $p_3 p_4$, $p_5 p_6$, so ist die Summe der Producte entsprechender Projectionen, d. i. $p_1 p_3 + p_2 p_4 = p_1 p_5 + p_2 p_6 = p_3 p_5 + p_4 p_6$ constant gleich dem Quadrate des Halbmessers.

Man kann aus 179) Doppelverhältnisse wie z. B.

$$\frac{p_1(p_3 - p_5)}{p_3(p_5 - p_1)} = \frac{p_4(p_2 - p_6)}{p_2(p_6 - p_4)}$$

bilden, die in speciellen Fällen in harmonische übergehen.

Aus $p_1^2 + p_2^2 = R_1^2$ folgt unter Benutzung von 176)

$$181) \quad \frac{R_1^2}{s^2} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_2^2 \sin\frac{1}{2}\gamma_3^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma_1^2} + \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_2^2 \cos\frac{1}{2}\gamma_3^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma_1^2},$$

ferner ist

$$\frac{R_2^2}{s^2} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_1^2 \sin\frac{1}{2}\gamma_3^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma_2^2} + \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_1^2 \cos\frac{1}{2}\gamma_3^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma_2^2},$$

$$\frac{R_3^2}{s^2} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_1^2 \sin\frac{1}{2}\gamma_2^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma_3^2} + \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_1^2 \cos\frac{1}{2}\gamma_2^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma_3^2}$$

Die letztern Formeln lassen sich aus allgemeinerm Gesichtspunkt wie folgt ableiten.

Auf Seite 169 unserer Abhandlung: Trigonometrische Auflösung biquadratischer Gleichungen (S. Archiv 70_{II}) haben wir folgende Gleichung aufgestellt:

$$182) \quad \cos\gamma^3 - \frac{2R^2(a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2) - 2a^2b^2 + (a^2+b^2)s^2}{c^2s^2}\cos\gamma^2$$
$$+ \left(\frac{4R^2}{c^4s^2}(a^4\sin\varphi^2 + b^4\cos\varphi^2) - 1\right)\cos\gamma$$
$$- \frac{2R^2(a^2+b^2)(a^2\sin\varphi^2 - b^2\cos\varphi^2) + 2a^2b^2c^2 - (a^4-b^4)s^2}{c^4s^2} = 0,$$

wofür wir schreiben

$$\cos\gamma^3 - A\cos\gamma^2 + B\cos\gamma - C = 0.$$

Hieraus lassen sich nachstehende Relationen herstellen

$$\frac{A+C}{1+B} = \frac{a^4\sin\varphi^2 - b^4\cos\varphi^2}{a^4\sin\varphi^2 + b^4\cos\varphi^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{b^4}{a^4}\cot\varphi^2 = \frac{1+B-A-C}{1+B+A+C},$$

vermittelst dieser letzten Formel kann man aus der ersten φ eliminiren, man findet

$$\frac{1+A+B+C}{a^4}+\frac{1-A+B-C}{b^4}=\frac{8R^2}{c^4s^2}, \quad \text{d. i.}$$

$$\frac{(1+\cos\gamma_1)(1+\cos\gamma_2)(1+\cos\gamma_3)}{a^4}+\frac{(1-\cos\gamma_1)(1-\cos\gamma_2)(1-\cos\gamma_3)}{b^4}=\frac{8R^2}{c^4s^2}$$

oder

$$182)\quad \frac{R^2}{s^2c^4}=\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_1^2\cos\frac{1}{2}\gamma_2^2\cos\frac{1}{2}\gamma_3^2}{a^4}+\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_1^2\sin\frac{1}{2}\gamma_2^2\sin\frac{1}{2}\gamma_3^2}{b^4}.$$

Diese Formel gilt allgemein für Ellipse und Hyperbel, also auch für die Asymptoten der letztern, wenn wir beachten, dass

$$c^2=a^2+b^2, \quad \text{also}$$

$$\frac{c^4}{a^4}=\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^2=\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\gamma_3^2}$$

u. s. w. ist, man findet dann

$$183)\quad \frac{R^2}{s^2}=\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_2^2\cos\frac{1}{2}\gamma_3^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma_1^2}+\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_2^2\sin\frac{1}{2}\gamma_3^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma_1^2}$$

wie oben angegeben.

Beide Formen 181) und 183) lassen eine Vergleichung zu.

Nach dieser Abschweifung kehren wir wieder zu unserm Kreise zurück. Wir wollen in den Punkten, wo die Halbirungslinien der Winkel γ_1 und γ_2 den Kreis zunächst treffen, Tangenten bis zum Durchschnitt mit den genannten senkrecht aufeinander stehenden Geraden (Projectionsachsen) ziehen und die Entfernungen der Schnittpunkte vom Centrum mit P_2 bezüglich P_3 bezeichnen, dann ist $p_4P_2=s^2$, also nach 179) $\sin\frac{1}{2}\gamma_3^2=\frac{p_2}{P_2}$, ferner ist $p_1P_3=s^2$, oder auch $\cos\frac{1}{2}\gamma_3^2=\frac{p_3}{P_3}$, mithin folgt aus

$$184)\quad \frac{p_2}{P_2}+\frac{p_3}{P_3}=1$$

der Satz, dass der dem Centrum gegenüberliegende Eckpunkt des aus p_2 und p_3 gebildeten Rechtecks in der Geraden liegt, welche jene Schnittpunkte der Tangenten und der Achsen mit einander verbindet.

Die Verhältnisse lassen sich geometrisch noch weiter ausdehnen, wenn man die Entfernungen der Durchschnittspunkte der gegenüberstehenden Seiten sowie der Diagonalen einführt. Dieselben seien x, y, z.

Dann ist

$$185)\qquad \begin{aligned} x^2 &= (p_3-p_5)^2+(p_4-p_6)^2\\ y^2 &= (p_1-p_5)^2+(p_2-p_6)^2\\ z^2 &= (p_1-p_3)^2+(p_2-p_4)^2.\end{aligned}$$

Vermittelst 180) gehen dieselben über in

$$186)\qquad \begin{aligned} x^2 &= R_2^2+R_3^2-2s^2\\ y^2 &= R_1^2+R_3^2-2s^2\\ z^2 &= R_1^2+R_2^2-2s^2.\end{aligned}$$

Nimmt man Bezug auf die Formel

$$\frac{R_1^2+R_2^2+R_3^2}{s^2}-\frac{R_1^2R_2^2R_3^2}{s^6}=2,$$

so resultirt aus den letzten Gleichungen

$$187)\qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{2s^2}=\frac{R_1^2R_2^2R_3^2}{s^6}-1.$$

Für die harmonischen und polarischen Beziehungen des Kreises lassen sich aus dem Vorstehenden noch mancherlei interessante Ergebnisse erzielen.

Verbindet man nämlich die Mitte von z mit dem Centrum durch die Mittellinie t_3, so ist

$$R_1^2+R_2^2=2t_3^2+\frac{z^2}{2},$$

also auch

$$z^2=2t_3^2-2s^2+\frac{z^2}{2}, \qquad\text{oder}$$

$$188)\qquad z^2=4(t_3^2-s^2)=4T_3^2,$$

wo T_3 die Tangente von der Mitte von z zum Kreis bezeichnet, demnach ist $z=2T_3$ oder $T_3=\frac{z}{2}$. Verbindet man endlich den Berührungspunkt mit den Durchschnittspunkten U und V der gegenüberstehenden Seiten durch u_3, v_3, so ist $u_3^2+v_3^2=2T_3^2+\frac{z^2}{2}=z^2$, demnach bilden u_3v_3z ein rechtwinkliges Dreieck, was auch schon ohne Rechnung klar ist.

Für $x^2=R_2^2+R_3^2-2s^2$ folgt analog $x=2T_1$, ebenso $y=2T_2$, wo T_1 und T_2 Tangenten von den Mitten der x und y an den Kreis bedeuten, und ebenso folgt, wie vorher $u_1^2+v_1^2=x^2$, $u_2^2+v_2^2=y^2$.

Die Winkel zwischen R_1R_2, R_1R_3, R_2R_3 seien bezüglich δ_1, δ_2, δ_3, es lässt sich leicht nachweisen, dass dann

$$R_1 R_2 \cos\delta_3 = s^2, \quad R_2 R_3 \cos\delta_1 = s^2, \quad R_3 R_1 \cos\delta_2 = s^2$$

ist. Demnach ist auch

189) $$x^2 - y^2 = R_2^2 - R_3^2 \text{ etc.}$$

so dass also die R_1, R_2, R_3 auf x, y, z senkrecht stehen.

Wird die Projection von R_1 auf R_2 mit q_2, die von R_2 auf R_1 mit q_1 bezeichnet, so folgt aus

190) $$R_1 q_1 = s^2, \quad R_2 q_2 = s^2,$$

dass die Tangenten von U und V an den Kreis durch die Schnittpunkte von x und y mit dem Kreise gehen. Im Dreieck xyz liegen also den Seiten xyz die Winkel δ, δ_1, $180^0 - \delta_3$ gegenüber.

§ 16.

Die mit Hülfe der Gleichung 143) abgeleiteten Integralfunctionen regen den Gedanken an, zu untersuchen, ob die Gleichung selbst auf ähnliche Integralfunctionen führt, wenn die Formeln des § 1. benutzt werden. Dabei haben wir aber zu beachten, dass die Coefficienten dieser Gleichung nicht wie bisher ganze, sondern gebrochene Functionen sind, die Integralconstante demnach kein vollständiges Integral mehr ist.

In Folge der bekannten Methoden erhält man

191)
$$\Sigma \int \frac{d\vartheta}{(R - s\cos\vartheta)\sqrt{(R^2 + s^2 - b^2 - 2Rs\cos\vartheta)(a^2 - R^2 - s^2 + 2Rs\cos\vartheta)}} = C.$$

Um auf die Normalform elliptischer Integrale zu kommen, setzen wir

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}, \quad R = s$$

und man hat

$$\Sigma \int \frac{d\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\vartheta^2 \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)^2 \cos\vartheta^2}},$$

und ferner

$$\Sigma \int \frac{d\vartheta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta^2 \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)^2 \cos\vartheta^2}},$$

woraus durch Addition

192) $$\Sigma \int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta^2 \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2 \cos\vartheta^2}}.$$

Wir führen ein

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{C}{A}, \quad \text{woraus} \quad \frac{A-B}{A+B}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2,$$

ferner

$$\frac{C}{A}\sin\psi=\cos\vartheta,$$

und das Integral geht über in

193) $$\Sigma \int \frac{d\psi}{\left(1-\left(\frac{C}{A}\right)^2 \sin\psi^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

und bezieht sich auf eine Ellipse mit den Halbachsen A und B.

In derselben haben ϑ und ψ folgende Bedeutung:

Schliesst die Tangente eines Ellipsenpunktes mit einem Brennstrahl den bekannten Winkel ϑ ein, so ist ψ der Winkel zwischen der Normale und der X-Achse, wie man leicht finden wird.

Demnach bezeichnet das letzte Integral nach früherm einen von dem Scheitelpunkt der grossen Achse gerechneten Ellipsenbogen S, und die Summe ΣS der hiernach bestimmten Bogen ist eine constante Grösse und zwar ein Ellipsenbogen.

Wir betrachten noch die Integralfunction 157), um dieselbe für die Hyperbel einzurichten.

Führen wir demgemäss in

$$\int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\left(1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2\right)\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2+b^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_1{}^2}}=C$$

die Beziehungen

$$\frac{4Rs}{(R+s)^2+b^2}=\frac{c^2}{a^2}, \quad \frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}=1$$

ein, so hat man die Bedingungen

$$R-s=\pm a, \quad 4Rs=\frac{a^2c^2}{b^2},$$

also erhält man R aus

$$R=\left(\frac{\mp b+\sqrt{b^2+c^2}}{2}\right)\frac{a}{b}$$

und ebenso erhält man aus

$$y^2 = \frac{b^2}{c^2}(R^2 + s^2 - a^2 + 2Rs\cos\vartheta')$$

den bekannten Ausdruck

$$y = \frac{2b}{c}\sqrt{Rs}\cos\tfrac{1}{2}\vartheta' \quad \text{(vergleiche 124)).}$$

Die Winkel $\vartheta' = \Theta$ sind demnach identisch und leicht für die Hyperbelbögen zu definiren.

In Bezug auf Ellipsenbögen können die Formeln ebenso leicht combinirt und die entsprechenden Amplituden geometrisch bestimmt werden.

Wir wollen hier noch auf eine Formel aufmerksam machen, welche eine Relation darstellt zwischen den Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 4R\frac{a^2}{c^2}\cos\alpha . x^3 + \frac{a^2}{c^2}\left(4R\frac{a^2}{c^2}\cos\alpha^2 + 4b^2\frac{R^2}{c^2}\sin\alpha^2 + 2L\right)x^2$$
$$-4R\frac{a^4}{c^4}L\cos\alpha . x + \frac{a^4}{c^4}(L^2 - 4b^2R^2\sin\alpha^2) = 0$$

und der grossen Halbaxe a.

Schreibt man dieselbe

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

und berechnet die Invarianten $A^3 - 4AB + 8C$ und $A^2D - C^2$, so erhält man durch Vergleichung beider den Ausdruck

$$194) \qquad a^2A(A^3 - 4AB + 8C) = 4(A^2D - C^2).$$

Die Theorie der biquadratischen Gleichungen zeigt, dass derselbe durch

$$a^2(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$$
$$= 4(x_1x_2-x_3x_4)(x_1x_3-x_2x_4)(x_1x_4-x_2x_3)$$

definirt werden kann. Man hat also

$$195) \quad \frac{a}{2} =$$
$$\sqrt{\frac{(x_1x_2-x_3x_4)(x_1x_3-x_2x_4)(x_1x_4-x_2x_3)}{(x_1+x_1+x_3+x_4)(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)}}$$

und ebenso

$$196)\quad \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{(y_1y_2-y_3y_4)(y_1y_3-y_2y_4)(y_1y_4-y_2y_3)}{(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4)}}.$$

Betrachtet man die Grössen $x_1x_2x_3x_4$ und ferner $y_1y_2y_3y_4$ als Seiten eines Kreisvierecks, so ist, gemäss der Gerhard'schen Formel, der Durchmesser des umbeschriebenen Kreises im ersten Fall gleich der grossen Halbachse a, im zweiten Fall gleich der kleinen Halbachse b.

Für die Hyperbel gelten analoge Formeln.

§. 17.

Anwendung der Functionen auf die elastische Curve.

Einen bemerkenswerten Fall für die Anwendung der elliptischen Integralfunctionen bietet die Gleichung der elastischen Curve. Ein prismatischer Körper, ein gleichförmiger gerader elastischer Draht werde an einem Ende festgehalten und am andern Ende von einer in der Längenaxe wirkenden Kraft angegriffen. Nach der Elastitätslehre besteht dann der Ausdruck

$$197)\qquad \varrho y = A^2,$$

worin ϱ der Krümmungshalbmesser im Punkte xy der Curve bedeutet. Die Constante A) hängt von dem Biegungswiderstand und der Spannung der elastischen Feder ab.

Vermittelst der Formel für den Krümmungsradius hat man

$$y = \frac{A^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Integration führt auf die Gleichung

$$198)\qquad y^2 = C^2 + \frac{2A^2}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Aus derselben erhält man ferner den Bogen

$$199)\,\mathrm{a}\qquad S = 2A^2\int^y \frac{dy}{\sqrt{(2A^2-C^2-y^2)(2A^2-C^2+y^2)}},$$

und endlich

199) b $$x = \int \frac{(y^2 - C^2)dy}{\sqrt{(2A^2 + C^2 - y^2)(2A^2 - C^2 + y^2)}}.$$

Führen wir in 198)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta$$

ein, so resultirt

200) $$y^2 = C^2 + 2A^2 \cos\vartheta.$$ S. d. Fig. 11., 12., 13.

Diese Integrale können wir ohne Weiteres mit den Integralfunctionen 139) in Beziehung bringen, wenn folgende Bedingungen vorausgesetzt werden

201) $$\begin{aligned} 2A^2 + C^2 &= \frac{b^2}{c^2}(a^2 - (R - s)^2) \\ 2A^2 - C^2 &= \frac{b^2}{c^2}((R + s)^2 - a^2). \end{aligned}$$

Demnach folgt aus den Formeln

202) $$\begin{aligned} A^2 &= \frac{b^2}{c^2} Rs, \\ C^2 &= \frac{b^2}{c^2}(a^2 - R^2 - s^2), \end{aligned}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{c^2}(a^2 - R^2 - s^2) + 2\frac{b^2 Rs}{c^2}\cos\vartheta = \frac{b^2}{c^2}(a^2 - R^2 - s^2 + 2Rs\cos\vartheta),$$

dass die Ellipsenordinaten mit den bezüglichen der elastischen Linie identisch sind, und dass ferner der von uns eingeführte Winkel ϑ kein anderer als der entsprechende Tangentenwinkel der genannten Curve ist. Betrachtet man demnach die beim Durchschnitt eines Kreises und einer Ellipse entstehenden Ordinaten als solche der elastischen Curve, so ist für alle Lage der beiden ersten Curven bei constantem R und s die Summe der entsprechenden Curvenbogen in der letztern, d. i.

203) $$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0,$$

sofern die obigen Bedingungen 202) erfüllt sind.

Im Anschluss hieran lässt sich ferner gemäss der Formel 199)b eine zweite Summe für die Abscissen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

bilden, die leicht zu bestimmen ist.

Wie man sieht ist

$$A^2 = \frac{b^2}{c^2} Rs$$

eine positive Grösse, dagegen kann

$$C^2 = \frac{b^2}{c^2}(a^2 - R^2 - s^2)$$

positiv, null und negativ werden, und wir bemerken dabei, dass die mannigfachen und interessanten Formen der elastischen Curve an die Bedingungen $2A^2 \gtreqless C^2$ geknüpft sind, welche in unserm Fall von Ellipse und Kreis durch die gleichwertigen $R + s \gtreqless a$ ausgedrückt werden können.

Die erste Ungleichheit $R + s > a$ führt auf symmetrisch gegen die Kraftlinie liegende Curven, während für $R + s < a$ solche auftreten, in welchen sowohl Maximal- als auch Minimalwerte der Ordinaten vorkommen und ϑ unbegrenzt wachsen kann. Die Bedingung $R + s = a$ führt auf ein logarithmisches Integral.

In analoger Weise lassen sich die Integralfunctionen der Hyperbel auf die besprochenen Verhältnisse anwenden.

In Betreff der Curve sehe man nach: Handbuch der theor. Physik von Thomson und Tait, deutsche Uebersetzung IV. S. 134, welchem auch die 3 Figuren entnommen sind.

§ 18.

Anwendung auf die Pendelbewegung.

Wie wir vorhin die statische Bedeutung der Function an der elastischen Curve dargestellt haben, wollen wir jetzt die erstern auf ein dynamisches Problem, die Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreis betreffend, anwenden.

Wie bekannt, führt die analytische Durchführung dieser Aufgabe auf ein Zeitintegral von folgender Art:

$$103)\qquad t = C \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{4gs \,.\, \sin\frac{1}{2}\vartheta^2}{v_0^2 + 4gs \sin\frac{1}{2}\alpha^2}}},$$

worin C eine Constante.

Die Bewegung geht in einem verticalen Kreise vom Radius s vor sich. Dieselbe beginnt im Elongationswinkel α mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0, und t bezeichnet die Zeit, innerhalb welcher der Punkt aus der Lage α in ϑ gelangt, und es ist

$$t = \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{s d\vartheta}{\sqrt{v_0^2 + 4gs \sin\frac{1}{2}\alpha^2 - 4gs \sin\frac{1}{2}\vartheta^2}}.$$

In diesem elliptischen Integral hat man die 3 Fälle

204) $$v_0^2 + 4gs \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 \lesseqgtr 4gs$$

zu unterscheiden.

Wir werden nun zeigen, dass unsere Integralfunctionen der Ellipse und Hyperbel auf die eleganteste Art sich auf dieses Zeitintegral anwenden lassen, und dass in geometrischem Sinne die daraus erfolgenden Relationen manches Bemerkenswerte zu Tage fördern.

Die Integralfunction der Elipse ist

205) $$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{4Rs}{a^2 - (R-s)^2} \sin\frac{1}{2}\vartheta^2}} = 0.$$

Indem wir beide Integralformen 203) und 205) identificiren, geht letztere Function über in die folgende

206) $$\Sigma t = 0.$$

Die Bedingungsgleichung ist dafür

207) $$\frac{4gs}{v_0^2 + 4gs \sin\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{4Rs}{a^2 - (R-s)^2} = Z^2.$$

Hieraus folgt zunächst, dass Z unabhängig von b ist und dass ferner

208) $$R^2 + s^2 - 2Rs\cos\alpha = a^2 - \frac{R}{g} v_0^2 \qquad \text{(Fig. 8.)}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat eine einfache geometrische Bedeutung. Bezeichnen wir sie mit ϱ^2, so ist ϱ die Entfernung des zur Amplitude α gehörigen Kreispunktes vom Ellipsenmittelpunkt. Es ist also

209) $$\varrho^2 = a^2 - \frac{R}{g} v_0^2.$$

Dreht man die Figur in verticaler Ebene so, dass die Strecke R in der Richtung der Schwere liegt, und lässt im Kreise s den Punkt volle Umläufe machen, so ist $Z < 1$ oder $R + s < a$ d. i. $\varrho < a$ und für die Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{v_0^2}{2g}$ geht 209) über in

210) $$\varrho^2 = a^2 - 2Rh$$

und 206) in

211) $$t_1 - t_2 = t_4 - t_3.$$

Der Punkt durchläuft also die Kreisbogen P_1P_2 und P_3P_4 in gleichen Zeiten.

Man hat also folgenden allgemeinen Satz:

Wenn die Geschwindigkeit eines auf einem verticalen Kreise sich bewegenden schweren Punktes an einer Stelle $= v_0$ ist, und man verbindet diesen Punkt mit einem unter dem Centrum auf dem verticalen Durchmesser liegenden Punkte 0, dessen Entfernung vom Centrum mit R bezeichnet sei, durch die Strecke ϱ, so schneiden diejenigen Ellipsen, deren Mittelpunkte in 0 fallen, und deren grosse Halbachsen von gleicher aus der Formel

$$a^2 = \varrho^2 + \frac{R}{g} v_0^2$$

bestimmbarer Länge sind, auf dem Kreise Bogen ab, von welchen 2 entsprechende von dem Punkte in gleichen Zeiten durchlaufen werden. Wie also auch diese Ellipsen in ihrer Ebene um ihren Mittelpunkt gedreht werden mögen, in allen Lagen und bei veränderlichen kleinen Halbachsen innerhalb bestimmter Grenzen sind die Zeiten, welche zum Durchlaufen dieser gegenüberstehenden Bogen erforderlich sind, stets einander gleich.

Da ferner die Geschwindigkeit des Punktes durch $v = -s \frac{d\vartheta}{dt}$, und $\frac{d\vartheta}{dt}$ durch $\frac{2}{Z} \sqrt{\frac{g}{s}} \sqrt{1 - Z^2 \sin \frac{1}{2}\vartheta^2}$ sowie $\varDelta \operatorname{am} \frac{1}{2}\vartheta = \sqrt{1 - Z^2 \sin \frac{1}{2}\vartheta^2}$ durch $\frac{y}{b\sqrt{a^2 - (R-s)^2}}$ ausgedrückt werden kann, so sind die Geschwindigkeiten des Punktes an den Schnittpunkten beider Curven in Folge der Formel $v = c\sqrt{\frac{g}{R}} \cdot \frac{y}{b}$ den entsprechenden Ellipsenordinaten proportional.

Vermittelst der bekannten obigen Relationen

$$y^2 \cdot \frac{c^2 Z^2}{4Rsb} = 1 - Z^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta^2, \quad Z \sin \tfrac{1}{2}\vartheta = \sin\varphi$$

woraus

$$y = b\sqrt{\frac{a^2-(R-s)^2}{c^2}}\cos\varphi_1$$

geht die Integralfunction über in

$$212)\quad \Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{a^2-(R-s)^2}{4Rs}\sin\varphi^2}} = 0,\quad R+s > a$$

und bemerken dabei beiläufig, dass für $s-R=b$ dieselbe auf schon früher behandelte zurückgeführt wird, indem $y = b\cos\varphi$ ist.

Für das letzte Integral gilt die Bedingung, dass die Geschwindigkeitshöhe des Punktes in der tiefsten Lage kleiner als $2s$ ist. Die Bewegung ist also die des gemeinen Pendels und man kann dieselbe in dem Punkte beginnen lassen, wo $v_0 = 0$, also $\varrho = a$ ist. Der betreffende Punkt wird also durch einen der Schnittpunkte des Kreises mit dem die Ellipse umschliessenden Kreis bestimmt.

Immerhin aber ist die Zeitdauer der Bewegung in den entsprechenden durch die Ellipsen begrenzten Kreisbogen dieselbe.

Im Falle $R+s=a$ oder $v^2+4gs\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = 4gs$ ist, wird die Geschwindigkeitshöhe $= 2s$, das Zeitintegral wird logarithmisch

$$213)\qquad t = \sqrt{\frac{s}{g}}\log\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\vartheta}{4}\right)$$

und der Punkt nähert sich der höchsten Stelle asymptotisch, ohne sie je zu erreichen. Auch in diesem Falle gilt noch immer das oben angegebene Gesetz der Bogen gleicher Zeitdauer.

Wie im statischen Problem der elastischen Curve, so treten also ebenfalls in dem verwandten der Pendelbewegung die unterscheidenden Merkmale in Verbindung mit den Bedingungen $R+s \gtreqless a$ auf. Führt man in 210) $\varrho = s-R$ ein, so sind die Wurzeln der für R quadratischen Gleichung

$$R = s-h \pm \sqrt{(s-h)^2-s^2+a^2}.$$

§ 19.

Die bisher entwickelten Resultate lassen sich erweitern, wenn einige Transformationen eingeführt werden. Man wird dann finden, dass auch die übrigen Ellipsenbogen, was aus der vorigen Darstellung nicht zu ersehen war, einer Deutung fähig sind.

Wir gehen zunächst von der Hyperbel aus, kürzen aber die Betrachtungen ab.

Den Winkel ϑ ersetzen wir im Folgenden durch seinen Nebenwinkel ϑ'.

Die erste Integralfunction der Hyperbel ist

$$214)\qquad \Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}}=0$$

$$R-s>a \quad \text{oder} \quad s-R>a.$$

Die Formel, welche diese Function mit der Pendelbewegung verknüpft, ist

$$215)\qquad \varrho^2-a^2=\frac{R}{g}v^2=2Rh,$$

und mit dieser Bedingungsgleichung steht die folgende

$$t_2-t_1=t_3-t_4$$

in Verbindung, welche ausdrückt, dass die Hyperbel vom Kreise 2 Bogen gleicher Zeitdauer abschneidet. Ebenso sind, wie bei der Ellipse, die Geschwindigkeiten in den Schnittpunkten beider Curven den Ordinaten derselben proportional.

In ähnlicher Art folgt aus der zweiten Integralfunction der Hyperbel

$$216)\qquad \Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R-s)^2+b^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}}=2K,\quad Z<1$$

die Formel

$$217)\qquad \varrho^2+b^2=\frac{R}{g}v^2=2Rh,$$

und damit die Relation

$$t_1+t_2+t_3+t_4=2t,$$

wo $2t$ die volle Umlaufszeit bezeichnet.

Da man letztere Formel auch so schreiben kann

$$t_1+t_4=2t-(t_2+t_3),$$

so folgt nach richtiger Deutung dieses Ausdrucks, dass für diese durch 217) bestimmte Bewegung die beiden Kreisbogen, welche durch getrennte Hyperbeläste begrenzt werden, in denselben Zeiten von dem Punkte zurückgelegt werden.

Die Geschwindigkeiten in den Schnittpunkten beider Curven sind jetzt den bezüglichen Abscissen proportional. In welche Lagen also auch die Hyperbeln bei festem Mittelpunkt gebracht werden, immer begrenzen sie Lagen gleicher Zeitdauer.

Man bemerke, dass der Modulus der ersten Function kein b, der der zweiten kein a enthält, dass ferner die vorgetragenen Sätze noch für die Annahme $a = b = 0$, also für die Asymptoten Gültigkeit haben, und dass der Modulus im letztern Falle in $Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2}$ übergeht. Die beiden Integralfunctionen fallen demnach in eine zusammen, und es hängt die resultirende

$$\Sigma \int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}} = C$$

mit der Relation

$$\varrho^2 = \frac{R}{g}v^2 \text{ woraus } v = \varrho\sqrt{\frac{g}{R}}$$

zusammen.

Demnach kommen wir auf die schon früher betrachteten Integralfunctionen des Kreises zurück, welche also nur specielle Fälle sind, weil die dort durch die harmonischen Punkte des Kreises gezogenen Geraden durch Kegelschnittslinien ersetzt werden können. Eine weitere Betrachtung für diese Asymptoten ist also unnötig.

Wie wir sehen, schlossen die oben angestellten Betrachtungen für die Hyperbel ihre Asymptoten mit ein; es liegt demnach die Frage nahe, ob für die Ellipse ähnliches zu finden sei.

Wir werden im Folgenden sehen, dass zweien sich schneidenden Geraden der Hyperbel 2 parallele Geraden der Ellipse zur Seite stehen.

Wir betrachten die folgende Integralfunction der Ellipse

$$\Sigma \int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-b^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}} = 0,$$

wofür

$$\varrho^2 - b^2 = \frac{R}{g}v^2 = 2Rh \qquad \text{und}$$

$$\Sigma t = 0.$$

Diese Gleichungen gelten für alle Ellipsen mit constanter kleiner Achse b und unveränderlicher grosser a, da letztere in den Formeln

nicht vorkommt. Mithin gelten sie auch noch für eine Ellipse, deren grosse Achse unendlich ist. Die Curve wird demnach zu 2 parallelen Geraden degeneriren.

Die in § 18. besprochenen Ellipsenverhältnisse finden jetzt ihre Erweiterung, indem für die vorliegende Function auch die übrigen Ellipsenbogen vermittelst der Formel

$$t_1 + t_4 = t_3 - t_2$$

ihre dynamische Bedeutung erhalten. Im Uebrigen bleiben die Erörterungen wie früher.

Die analoge Function der Ellipse

$$\Sigma \int \frac{d\,\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1 - \frac{(R+s)^2 - a^2}{4Rs} \sin \frac{1}{2}\vartheta'^2}}$$

führt auf entsprechende Verhältnisse.

Hier interessirt uns besonders das Folgende:

Der Modulus der Function 216) enthält b, lässt man diese Grösse in Null übergehen, so gehen, $a = \infty$ vorausgesetzt, die Functionen und die betreffenden Zeiten in den Fall der Integralfunction des Kreises über, da ja $Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2}$ wird. Von den speciellen Fällen ist also der für die unendlich lange Ellipse der allgemeinere. Dabei haben wir 2 Fälle zu unterscheiden. Da der Mittelpunkt dieser lang gestreckten Ellipsen in einen beliebigen Punkt der grossen Achse gelegt werden kann, so wird $s - R$ entweder grösser oder kleiner als b sein. Im ersten Fall umschliesst der Kreis vom Radius s den von b, und es ist die Formel

$$t_1 + t_4 = t_3 - t_2$$

hierfür die entsprechende (Fig. 14.). Demnach werden die durch die parallelen Geraden getrennten äussern Kreisbogen in denselben Zeiten beschrieben. Für $b = 0$ fallen die Geraden und damit unsere Betrachtungen mit den über die Integralfunctionen des Kreises angestellten zusammen. (Innerer harmonischer Punkt.)

Im zweiten Fall $R - s > b$ liegen die genannten Kreise auseinander, und die letzte Formel geht über in

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2t.$$

Wird auch hier $b = 0$, so ist $t_1 = t_2$, und $t_3 = t_4$, und es ist

$$t_1 + t_2 = t.$$

Der Ellipsenmittelpunkt wird dann zum äussern harmonischen Punkt für die Integralfunction des Kreises.

Die Formel für die betrachteten beiden Fälle ist

$$\varrho^2 - b^2 = 2hR = p^2,$$

in welcher p als Potenz aufgefasst werden kann; sie lässt noch eine einfache geometrische Construction zu. Für $\varrho = R + s$ erhält man aus $(R+s)^2 - b^2 = 2hR$ die beiden Strecken

$$R = h - s \pm \sqrt{(h-s)^2 - s^2 + b^2}.$$

Für bestimmte Geschwindigkeitshöhen h in einem Kreise von bekanntem Radius s und für constante Halbachsen b einer Ellipse von beliebiger grosser Achse a bestehen demnach zwei Ausdrücke für die Centrale R beider Curven, welchen 2 Zeitrelationen entsprechen. Schreiben wir dafür die Integralfunctionen

$$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}} = 0, \quad \Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}} = 2K,$$

$$Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2 - b^2}.$$

so bemerkt man sofort, dass die obige Ableitung mit der bekannten Jacobi'schen Construction des Additionstheorems der elliptischen Integrale in Verbindung steht. Dabei ist es wichtig zu bemerken, dass statt der beiden durch den Abstand $2b$ bestimmten Parallelen die Ellipse eingeführt werden kann. Dreht man also diese Ellipse in ihrer Ebene so, dass ein ϑ, etwa ϑ_1, verschwindet, so erhält man für den innern Kreis

$$\int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_3}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{1}{2}\vartheta_3'}} = \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{1}{2}\vartheta_2'^2}} + \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_4}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{1}{2}\vartheta_4'^2}},$$

für den äusseren

$$\int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{1}{2}\vartheta_2'^2}} + \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_3}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{1}{2}\vartheta_3'^2}} + \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_4}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{1}{2}\vartheta_4'^2}} = 2K.$$

Das Absolutglied der Gleichung 154) wird demnach 0, oder es ist

$$(R+s)^2 \left(\sin\alpha^2 + \frac{b^2}{a^2} \cos\alpha^2\right) = b^2$$

welche Formel für $a = \infty$ in die bekannte Relation

$$(R+s)\cos(90^0-\alpha)=b$$

übergeht und die genannte Gleichung wird zu

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'^3+\left(1-\frac{s}{R}\right)\cot\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'^2+\left(1+\frac{s}{R}-\frac{s}{R}\cot\alpha^2\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'$$
$$+\left(1+\frac{s}{R}\right)\cot\alpha=0 \qquad \text{woraus}$$

$$\Sigma\tfrac{1}{2}\vartheta=\Sigma\,\mathrm{am}\,u=2a$$

und noch andere Formeln sich ergeben.

Wir gehen jetzt über zu dem Additionstheorem der elliptischen Integrale 2. Art.

In § 13. haben wir eine Function dieser Art aufgestellt, welche noch für den jetzigen Fall einer kleinen Transformation bedarf. Man findet nach Ausführung der Rechnungen

$$218)\quad \int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_1+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_2$$
$$+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3{}^3}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_3+\int\sqrt{1-Z^2\sin d\tfrac{1}{2}\vartheta_4}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_4$$
$$=\frac{2a}{c}Z\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha$$

$$Z^2=\frac{4Rs}{(R+s)^2-b^2}$$

Diese allgemeine Formel vereinfacht sich, wenn $\vartheta_1=0$ gesetzt wird. Wie vorhin, kann man anstatt der Ellipse wieder jene Parallelen substituiren, und die nun bestehende Function

$$\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3{}^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_3=\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_2$$
$$+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4{}^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_4-2+\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha$$

bezieht sich auf das Additionstheorem der 2. Art.

Dies Resultat lässt sich vermittelst der Amplitudengleichung und des Additionstheorems für die Integrale 2. Art bewahrheiten.

Das letztere ist in unserer Bezeichnung

$$E\tfrac{1}{2}\vartheta_3=E\tfrac{1}{2}\vartheta_2+E\tfrac{1}{2}\vartheta_4-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4.$$

Aus der genannten Gleichung lässt sich leicht das Product $\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4=\frac{b}{s}\cos\alpha$ berechnen, und es ist

$$Z^2\frac{b}{s}\cos\alpha = 2Z\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha.$$

Demnach ist

$$E\tfrac{1}{2}\vartheta_3 = E\tfrac{1}{2}\vartheta_2 + E\tfrac{1}{2}\vartheta_4 - \frac{4R}{R+s}\operatorname{tg}\alpha$$

Zu der genannten geometrischen Construction lassen sich die Winkel $\alpha = 90^0 - \frac{\vartheta_4}{2}$, ϑ_2 und ϑ_3 leicht feststellen.

§ 20.

Eine Anwendung der vorhin entwickelten Formeln auf den Kreis erhält man dadurch, dass der Modulus der elliptischen Integrale gleich 1 gesetzt wird, wodurch aus den elliptischen Beziehungen cyklometrische werden.

Lassen wir also in der Integralfunction 1. Art

$$\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2}} + \int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1-Z_2^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2^2}} - \int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3^2}}$$
$$+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4^2}} = 0$$

welche vermöge des von der Halbachse a unabhängigen Modulus

$$Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2-b^2}$$

sowohl für jede Ellipse mit beliebiger Achse a als auch für 2 Parallele im Grenzfall $a=\infty$ gültig ist, Z in 1 übergeben, so wird $b = R-s$ oder $b = s-R$. Im ersten Fall berühren sich die beiden Kreise, deren Radien bezüglich s und b sind, von aussen, im zweiten von innen.

Betrachten wir den zweiten Fall zunächst, so geht die obige Formel über in

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{\vartheta_1}{4}\right)\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{\vartheta_2}{4}\right)\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\vartheta_3}{4}\right)\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{\vartheta_4}{4}\right) = 1,$$

welche einfacher wird, wenn für ϑ sein Supplement eingeführt wird.

Die Integralfunction der 2. Art gibt für $Z=1$

$$\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1 + \sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2 - \sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3 + \sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4 = 2\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha,$$

woran man folgende Betrachtung knüpfen kann. (Fig. 14.)

Man multiplicire die Formel mit $2s$ und beachte, dass $2s\sin\frac{1}{2}\vartheta$ die Sehne bezeichnet, welche einen Schnittpunkt des Kreises und der Geraden mit **dem** Kreispunkt verbindet, welcher auf der verlängerten Centrale OR liegt.

Also ist für die innere Berührung

$$s_1+s_2-s_3+s_4=4\sqrt{Rs}\sin\alpha,$$

für die äussere

$$s_1+s_2+s_3-s_4=4\sqrt{R's}\sin\alpha'.$$

Zweiter Teil.

§. 21.

Analytische Darstellung elliptischer Integralfunctionen 1. und 2. Art.

In den bisher entwickelten Integralfunctionen waren die Amplituden der elliptischen Integrale durch die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung definirt, und die Moduli ergeben sich aus den Parametern derselben. Ihre Bestimmung aber war gewissen Beschränkungen unterworfen, infolge dessen die Theorie einer Ergänzung bedarf. Demnach wäre die Frage zu beantworten, ob es möglich sei, aus den Constanten der Gleichung

$$1)\qquad \operatorname{tg}\varphi^4-A\operatorname{tg}\varphi^3+B\operatorname{tg}\varphi^2-C\operatorname{tg}\varphi+D=0$$

den Modulus Z der Integralfunction

$$2)\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1{}^2}}+\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2{}^2}}+\int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3{}^2}}+\int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4{}^2}}=C,$$

deren Amplituden Wurzeln der obigen Gleichung sind, zu bestimmen, und es wäre ferner nachzusehen, ob noch andere solcher Functionen existirten.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Gleichung 1), welche wir im Anschluss an 143) so schreiben

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4-A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3+B\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2-C\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta+D=0$$

und ihre Integralfunction 1. Art

$$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}}} = 0.$$

Die obigen Constanten der Gleichung haben nun folgende Bedeutung

$$A = \frac{2c^2s(R+s)\sin 2\alpha}{(R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2}$$

$$B = 2\,\frac{(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)(R^2-s^2)+2s^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)-a^2b^2}{(R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2}$$

3)

$$C = \frac{2c^2s(a-s)\sin 2\alpha}{(R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2}$$

$$D = \frac{(R-s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2}{(R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2}$$

Die Aufgabe bestünde nun darin, die Grössen a, b, R, s, $\sin\alpha$ vermittelst $ABCD$ auszudrücken und daraus den Modulus

4) $$Z^2 = \frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}$$

herzustellen.

Der Vergleich von A und C ergibt sofort die Relation

$$\frac{A}{C} = \frac{R+s}{R-s}$$ woraus

$$\frac{R}{s} = \frac{A+C}{A-C}$$

und eingesetzt in 4) ergibt sich

5) $$Z^2 = \frac{4(A^2-C^2)}{\frac{a^2}{s^2}(A-C)^2-4C^2}.$$

Die eigentliche Untersuchung beruht also lediglich auf der Ermittelung des Verhältnisses $\frac{a}{s}$, das allerdings noch einiger Zwischenrechnung bedarf.

Aus der Formel für D erhält man

$$a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2 = b^2.\frac{a^2}{s^2}\frac{(A-C)^2(D-1)}{4(A^2D-C^2)} = b\frac{a^2}{s^2}P,$$ wo

$$P = \frac{(A-C)^2(D-1)}{4(A^2D-C^2)}$$

Hieraus folgt

$$\sin \alpha^2 = \frac{b^2}{c^2}\left(P\frac{a^2}{s^2}-1\right),$$

oder auch

$$a^2+b^2-c^2\cos 2\alpha = 2\frac{a^2b^2}{s^2}P,$$

$$2+\frac{c^2}{b^2}-\frac{c^2}{b^2}\cos^2\alpha = 2P\cdot\frac{a^2}{s^2}.$$

Aus der Formel A) folgt ferner

$$\frac{a^2}{s^2}\frac{b^2}{c^2} = \frac{4\sin 2\alpha}{\left(\frac{4A^2P}{(A-C)^2}-1\right)(A-C)} = \frac{\sin 2\alpha}{Q}$$ wo

$$Q = -\frac{(A-C)^2(A+C)}{4(A^2D-C^2)},$$

Die Elimination von $\sin 2\alpha$ in den letzten Formeln ergibt

$$\left(2+\frac{c^2}{b^2}-2P\frac{a^2}{s^2}\right)^2 = \frac{c^4}{b^4}-Q^2\cdot\frac{a^4}{s^4},$$ woraus

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{\left(1-P\frac{a^2}{s^2}\right)^2+\frac{Q^2}{4}\frac{a^4}{s^4}}{P\frac{a^2}{s^2}-1}.$$

Beachten wir nun, dass die Formel für B) übergeht in

$$\frac{B}{2} = \frac{P\left(\frac{R^2}{s^2}-3\right)+2\frac{\left(\frac{c^2}{b^2}+2\right)}{\frac{a^2}{s^2}}}{\left(\frac{R}{s}-1\right)^2P-1}-1$$

so folgt bei Einführung von

$$M = \frac{B}{2}\left(\left(\frac{R}{s}+1\right)^2P-1\right)-P\left(\frac{R^2}{s^2}-3\right)+1$$

die quadratische Gleichung

$$\left(\frac{a^2}{s^2}\right)^2(4P^2-2PM+Q^2)+2M\left(\frac{a^2}{s^2}\right)-4=0,$$

deren Wurzeln

$$\frac{a^2}{s^2}(4P^2-2PM+Q^2 = -M\pm\sqrt{(M-4P)^2+4Q^2}$$

sind.

Der Ausdruck $M-4P$ kann aber durch

$$\frac{(A^2-C^2)(1-B+D)}{2(A^2D-C^2)}$$

ersetzt werden, und das vorläufige Schlussresultat ist demnach

$$\frac{a^2}{s^2}\frac{(A-C)^2}{4(A^2D-C^2)}\times$$
$$\left(-(D-1)^2(A-C)^2-(D-1)(1-B+D)(A^2-C^2)+\tfrac{1}{4}(A^2-C^2)^2\right)$$
$$=\pm\frac{(A^2-C^2)}{2(A^2D-C^2)}\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}$$
$$-\frac{(1-B+D)(A^2-C^2)+2(D-1)(A-C)^2}{2(A^2D-C^2)}.$$

Da hiernach $\frac{a}{s}$ bekannt ist, so ergibt die Substitution desselben in 5) den Modulus

$$6)\quad Z^2=\frac{2(A^2-C^2)}{\dfrac{(A^2D-C^2)\pm\{(A+C)\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}+(1-B+D)(A+C)+2(D-1)(A-C)\}}{(D-1)(2(AD+C)-B(A+C))-\dfrac{(A+C)^2(A-C)}{4}}-2C^2}$$

welchen Ausdruck wir transformiren in

$$7)\quad Z^2=\frac{1}{\dfrac{\{(A^2D-C^2)(\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}+3-B-D)+2A(AB-2C)(D-1)+\frac{A^2}{2}(A^2-C^2)\}}{2(A-C)\left((D-1)(2(AD+C)-B(A+C))-\dfrac{(A+C)^2(A-C)}{4}\right)}+1}.$$

Da für Z zwei Werte bestehen, so existiren demnach für jede biquadratische Gleichung 2 Integralfunctionen, wie dies ja schon früher geometrisch für Ellipse und Hyperbel nachgewiesen ist.

Der etwas complicirte Bau der letzten Formel lässt eine vereinfachte Form wünschen, um dieselbe für gegebene Fälle in brauchbarer Gestalt benutzen zu können.

In der Formel $\sin\alpha^2$ ersetzen wir $\frac{b^2}{c^2}$ durch den oben gefundenen Wert, man wird dann haben

$$\cos\alpha^2 = \frac{\frac{Q^2}{4}\frac{a^4}{s^4}}{\left(1-P\frac{a^2}{s^2}\right)^2+\frac{Q^2}{4}\frac{a^2}{s^4}},$$ woraus

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{\left(P\frac{a^2}{s^2}-1\right)}{Q\frac{a^2}{s^2}}.$$

Ferner findet man

$$\frac{b}{c}\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}Q\frac{a^2}{s^2}\sqrt{\left(P\frac{a^2}{s^2}-1\right)}}{\left(P\frac{a^2}{s^2}-1\right)^2+\frac{1}{4}Q^2\frac{a^4}{s^4}},$$

Ebenso folgt aus

$$\sin 2\alpha = \frac{b^2}{c^2}Q\frac{a^2}{s^2},\quad \cos 2\alpha = \frac{b^2}{c^2}\left(\frac{c^2}{b^2}-2\left(P\frac{a^2}{s^2}-1\right)\right)$$

die Formel

$$\cot 2\alpha = \frac{\frac{c^2}{b^2}-2\left(P\frac{a^2}{s^2}-1\right)}{Q\frac{a^2}{s^2}}$$

Führt man nun in

$$\operatorname{tg}\alpha = -\cot 2\alpha + \sqrt{1+\cot 2\alpha^2}$$

den obigen Ausdruck für $\cot 2\alpha$ ein, so erhält man schliesslich die reducirte Formel

$$8)\quad Z^2 = \frac{D-1+\frac{1}{2}\frac{A+C}{A-C}\left(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}\right)}{D-\frac{C^2}{2(A-C)^2}\left(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)}\right)}$$

Die eleganteste Formel dagegen gewinnen wir bei Benutzung der goniometrischen Function

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

Die hieraus hervorgehende Relation für $Z'^2 = 1-Z^2$ ist

$$9)\quad Z'^2 = \frac{A^2+2(1-B+D\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{C^2+2D(1-B+D\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}.$$

Wir erhalten also folgenden allgemeinen Satz:

Mit jeder biquadratischen Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi^4 - A\operatorname{tg}\varphi^3 + B\operatorname{tg}\varphi^2 - C\operatorname{tg}\varphi + D = 0$$

sind zwei Integralfunctionen 1. Art

$$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1{}^2}} + \int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2{}^2}} + \int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3{}^2}} + \int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4{}^2}} = C$$

verknüpft, deren Amplituden Wurzeln der Gleichung und deren Moduli durch die Formel 9) bestimmt sind. Die Constante C ist entweder $= 2K$ oder Null.

Vermöge dieser Darstellung kann man jede Gleichung von dem geometrischem Charakter der obigen in Beziehung bringen mit elliptischen Integralen, wodurch, wenn letztere wieder geometrisch oder dynamisch interpretirt werden, bemerkenswerte Relationen zwischen beiden hervorgehen.

In diesem Sinne werden wir unter andern die gegebenen Entwickelungen benutzen.

Setzt man

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi^2}} = u, \quad \varphi = \operatorname{am} u$$

und beachtet die Formel

$$\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4) = \frac{A-C}{1-B+D}$$

so gewinnt man noch die Amplitudenfunction

$$10)\quad \operatorname{am} u_1 + \operatorname{am} u_2 + \operatorname{am} u_3 + \operatorname{am} u_4 = \operatorname{arc\,tg}\frac{A-C}{1-B+D}.$$

Wir geben jetzt die Integralfunctionen für elliptische Integrale der 2. Art und haben demnach die Constante der Function

$$\Sigma\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta} = 2\frac{b}{c}Z\sqrt{\frac{R}{s}}\cos\alpha + 2E$$

zu transformiren.

Man findet:

$$\frac{c^2}{b^2}=\frac{(A+C)}{(A-C)}\frac{1}{Z^2}\frac{(A-C)^2+(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})^2}{(C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}$$

$$\frac{a^2}{s^2}=4\frac{A^2-C^2Z'^2}{Z^2(A-C)^2},$$

$$Q\frac{a^2}{s^2}=-\frac{(A+C)(A^2-C^2Z'^2)}{Z^2(A^2D-C^2)},$$

$$P\frac{a^2}{s^2}=\frac{(A^2-C^2Z'^2)(D-1)}{Z^2(A^2D-C^2)},$$

$$P\frac{a^2}{s^2}-1=\frac{(A^2-C^2)(Z'^2D-1)}{Z^2(A^2D-C^2)},$$

$$Z'^2D-1=\frac{A^2D-C^2}{C^2+2D(1+B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}},$$

$$A^2-C^2Z'^2=\frac{2(A^2D-C^2)(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}{C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)})^2}.$$

Die obige Integralconstante ist also

$$2Z\frac{b}{c}\sqrt{\frac{R}{s}}\cos\alpha=Z^2\frac{\frac{(A^2-C^2Z'^2)}{DZ'^2-1}\sqrt{\frac{A^2D-C^2}{DZ'^2-1}}}{(A-C)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{A^2-C^2Z'^2}{DZ'^2-1}\right)^2}$$

$$=Z^2\sqrt{\frac{A^2D-C^2}{(Z'^2D-1)((A-C)^2+(1-B+D)^2)}},$$

$$=Z^2\sqrt{\frac{C^2+2D(1-B+D\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}.$$

Also haben wir folgenden Satz:

Liegt vor die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi^4-A\operatorname{tg}\varphi^3+B\operatorname{tg}\varphi^2-C\operatorname{tg}\varphi+D=0,$$

so besteht mit ihr die Integralfunction 2. Art

$$10)\quad \int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1{}^2}d\varphi+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2{}^2}d\varphi_2+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3{}^2}d\varphi_3$$
$$+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4{}^2}d\varphi_4$$
$$=2E+Z^2\sqrt{\frac{C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}{(A-C)^2+(1-B+D)^2}},$$

worin Z vermittelst 9) bekannt und E das vollständige elliptische Integral 2. Art ist. In geometrischen Anwendungen gaben diese

Integralfunctionen neue Sätze über diejenigen Verhältnisse, welche die Rectification der Ellipse berühren, wie wir dies gleich nachweisen werden.

Wir führen hier noch an, dass die obigen Ableitungen sich sehr vereinfachen, wenn für die biquadratischen Gleichungen die Reducente $A^2D - C^2 = 0$ besteht. Es ist dann $Z^2 = 1 - \frac{A^2}{C^2}$ oder $Z' = \frac{A}{C}$.

Die Bedingung wird für die Wurzeln durch

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi_3 \operatorname{tg}\varphi_4 = \sqrt{D} = \frac{1}{\sqrt{Z'}}$$

ausgedrückt und das Additionstheorem gibt

$$E\varphi_1 + E\varphi_2 = E + Z^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2,$$
$$E\varphi_3 + E\varphi_4 = E + Z^2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4,$$

also ist auch

$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_4$$
$$= \sqrt{\frac{C^2 + 2D(1 - B + D + \sqrt{(A-C)^2 + (1-B+D)^2})}{(A-C)^2 + (1-B+D)^2}}$$

u. s w.

Für die Integralfunctionen 3. Art sind bezüglich der Gleichung 151) leicht analoge Formeln aufzustellen, und man findet, wenn speciell $R + s = b$ gesetzt wird für die entsprechende Integralfunction

$$\Sigma \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2 \sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi^2}} = C,$$

die Bedingung

$$\frac{2(A-C)^2}{A^2} = 1 - B + D + \sqrt{(A-C)^2 + (1-B+D)^2}.$$

Wie wir schon früher nachgewiesen, existiren zugleich mit den abgeleiteten Integralfunctionen zahlreiche Formeln symmetrischen Charakters zwischen den Wurzeln der Gleichungen, unter welchen manche, wie

$$\frac{\varDelta\varphi_1 \pm \varDelta\varphi_2}{\varDelta\varphi_3 \pm \varDelta\varphi_4} = \frac{\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 \pm \varphi_4)} \text{ etc.}$$

eine geometrische Erklärung zulassen.

Eine Erweiterung der Functionen lässt sich noch auf folgendem Wege anbahnen.

Mit der in § 1. gegebenen Gleichung

$$\left(\frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x}}\right)^4 + \frac{B}{D}\left(\frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x}}\right)^2 - \frac{A}{D}\left(\frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x}}\right) + \frac{1}{D} = 0$$

ist die daraus leicht abzuleitende kubische Resolvente

$$Z^3 + 8\frac{B}{D}Z^2 + 16\frac{(B^2 - 4D)}{D}Z - 64\frac{A^2}{D_2} = 0$$

verknüpft. Ihre Wurzeln stehen mit denen der Hauptgleichung in folgendem Zusammenhang

$$\frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_1}} + \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_2}} + \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_3}} + \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_4}} = 0,$$

$$\frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_1}} + \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{d x_2}} - \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_3}} - \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_4}} = \sqrt{Z_1}$$

$$\frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_1}} - \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_2}} + \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_3}} - \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_4}} = \sqrt{Z_3}$$

$$\frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_1}} - \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_2}} - \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_3}} + \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial x_4}} = \sqrt{Z_3}.$$

Mit der ersten treten demnach in Folge von $\frac{\partial \varDelta}{\partial x}\partial x + \frac{\partial \varDelta}{\partial y}dy = 0$ noch 3 andere Functionen

$$\Sigma\int\frac{dx}{f(x)} = \int z_1\,dy, \quad \Sigma\int\frac{dx}{f(x)} = \int z_2\,dy, \quad \Sigma\int\frac{dx}{f(x)} = \int z_3\,dy$$

auf. Gelingt es nun, z als Function von y zu bestimmen, so würde die noch zu erfolgende Integration dieser und der übrigen Ordnungen die allgemeine Auflösung des Problems zur Folge haben.

§ 22.

Wir geben hier eine Zusammenstellung der wichtigeren Resultate:

Liegt die Gleichung

$$11) \qquad \operatorname{tg}\varphi^4 - A\operatorname{tg}\varphi^3 + B\operatorname{tg}\varphi^2 - C\operatorname{tg}\varphi + D = 0$$

vor, so hat man

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1^2}}+\int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^2}}+\int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3^2}}$$

$$12) \qquad +\int \frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4^2}},$$

$$Z'^2 = \frac{A^2+2(1-B+D\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{C^2+2D(1-B+D\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}$$

Ferner ist mit der Gleichung

$$\cot\varphi^4 - A\cot\varphi^3 + B\cot\varphi^2 - B\cot\varphi + D = 0$$

die Function

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_1^2}}+\int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_2^2}}+\int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_3^2}}$$

$$+\int \frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_4^2}} = C$$

verknüpft, und es ist

$$13) \qquad \lambda'^2 = \frac{C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{A^2+2(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}$$

Aus den Moduli folgen die Relationen

$$Z'^2\lambda'^2 = 1,$$

$$\lambda^2 = 1 - \frac{1}{Z'^2} = \frac{Z^2}{Z^2-1}$$

Für die kubische Gleichung

$$14) \qquad \operatorname{tg}\varphi^3 - A\operatorname{tg}\varphi^2 + B\operatorname{tg}\varphi - C = 0$$

gelten die Formeln

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1^2}}+\int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^2}}+\int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3^2}} = 2K,$$

$$15) \qquad Z'^2 = \frac{A^2+2(1-B\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B)^2})}{C^2}.$$

Bemerkung. Wird in 14) $A = 0$ gesetzt, so besteht für die reducirte Gleichung $\operatorname{tg}\varphi^3 - B\operatorname{tg}\varphi - C = 0$ bei Benutzung von $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{C}{1+B}$ der Ausdruck $Z'^2 = \frac{2}{C}\cot\frac{1}{2}\varepsilon$.

Ferner ist

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin\varphi_1^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin\varphi_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin\varphi_3^2}} = K$$

$$16) \quad \lambda'^2 = \frac{1}{B^2 + 2C(C-A) \pm \sqrt{(A-C)^2 + (1-B)^2}}.$$

Legen wir endlich die Gleichung

$$\cot\varphi^3 - A\cot\varphi^2 + B\cot\varphi - C = 0$$

zu Grunde, so gilt zunächst die Function

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\mu^2 \sin\varphi_1^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-\mu^2 \sin\varphi_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-\mu^2 \sin\varphi_3^2}} = 2K$$

$$17) \qquad \mu'^2 = B^2 + 2C(C - A \pm \sqrt{(A-C)^2 + (1-B)^2})$$

und noch

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\nu^2 \sin\varphi_1^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-\nu^2 \sin\varphi_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-\nu^2 \sin\varphi_3^2}} = K$$

$$18) \quad \nu'^2 = \frac{C^2}{A^2 + 2(1 - B \pm \sqrt{(A-C)^2 + 1 - B)^2})}.$$

Man kann in den obigen Gleichungen $\operatorname{tg}\varphi = k\operatorname{tg}\psi$ setzen und in den Ausdrücken für Z^2 etc. für geeignete Werte von k die Moduli vereinfachen. Auf Gleichungen 2. Grades kommen wir nachher bei Betrachtung der Schliessungscurven zurück.

Man bemerke noch, dass die Aufgabe, für 4 gegebene Amplituden φ den Modulus derart zu bestimmen, dass die Integralfunction 12) hierfür erfüllt ist, durch das Vorstehende ihre Lösung gefunden hat.

§ 23.

Die gegebene Ableitung des Wertes für den Modulus Z aus den Constanten der Gleichungen können wir noch in anderer Hinsicht verwerten und damit die Bedeutung der Functionen erweitern. Wie das Beispiel der Kegelschnitte zeigt, steht mit den Amplituden $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ die vierte φ_4 durch die Function

$$F_1 + F_2 + F_3 = F_4$$

in Verbindung.

Man kann nun diese Function allgemeiner fassen und alle Werte von φ_4 zu bestimmen suchen, welche den folgenden Relationen entsprechen:

$$F_1 + F_2 + F_3 = F\psi,$$
$$F_1 + F_2 - F_3 = F\psi_2,$$
$$F_1 - F_2 + F_3 = F\psi_3,$$
$$-F_1 + F_2 + F_3 = F\psi_4.$$

Die Aufgabe würde sich also zu einem Additionstheorem gestalten mit der Forderung, zu drei gegebenen Amplituden φ der elliptischen Integrale 1. Art die ψ Amplituden ihrer algebraischen Summe anzugeben.

Die Constanten in der Formel

$$Z'^2 = \frac{A^2 + 2(1 - B + D + \sqrt{(A-C)^2 + (1-B+D)^2})}{C^2 + 2D(1 - B + D + \sqrt{(A-C)^2 + (1-B+D)^2})},$$

haben die folgende Bedeutung, wenn $\operatorname{tg}\varphi_4 = \operatorname{tg}\psi = Z$ gesetzt wird,

$$A = \operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_3 + Z,$$
$$B = \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 + \operatorname{tg}\varphi_3 \operatorname{tg}\varphi_1 + Z(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_3),$$
$$C = \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 + Z(\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 + \operatorname{tg}\varphi_3 \operatorname{tg}\varphi_1),$$
$$D = \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 Z.$$

Da $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ bekannt sind, so schreiben wir

$$\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_3 = a,$$
$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 + \operatorname{tg}\varphi_3 \operatorname{tg}\varphi_1 = b,$$
$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 = c$$

und daher ist

$$A = a + z,$$
$$B = b + az,$$
$$C = c + bz,$$
$$D = cz.$$

Substituiren wir diese Werte in Z'^2 und schaffen durch Quadriren die auftretenden Wurzeln fort, so resultirt nach einigen Entwickelungen die folgende für ψ biquadratische Bedingungsgleichung

$$19)\quad \mathrm{tg}\psi^4((\tfrac{1}{2}(1-b^2Z'^2)+(a-c)(cZ'^2)^2-Z'^4c^2((a-c)^2(1-b)^2))$$

$$+\mathrm{tg}\psi^3\times$$

$$\left(\begin{matrix}(a-bcZ'^2)(1-b^2Z'^2)-2(a-c)(1-b)Z'^4\gamma^2+2(1-b)^2Z'^2\gamma\\ -(1-\beta)(1-\beta^2Z'^2)Z'^2\gamma+2(a-c)Z'^2\gamma(a-bcZ'^2)-(a-c)(1-b^2Z'^2)\end{matrix}\right)$$

$$+\mathrm{tg}\psi^2\times$$

$$\left(\begin{matrix}(a-bcZ'^2)^2+\tfrac{1}{2}(a^2-c^2Z'^2)(1-b^2Z'^2)-(a-c)^2Z'^4\gamma^2-(1-b)^2\\ +4(a-c)(1-b)Z'^2c-2(1-b)Z'^2c(a-bcZ'^2)+(1-b)(1-b^2Z'^2)\\ +(a-c)Z'^2c(a^2-Z^{2\prime}c^2)-2(a-c)(a-bcZ'^2)\end{matrix}\right)$$

$$+\mathrm{tg}\psi\times$$

$$\left(\begin{matrix}(a-bcZ'^2)(a^2-c^2Z'^2)+2(a-c)^2Z'^2c-2(a-c)(1-b)\\ -(1-b)Z'^2c(a^2-Z'^2c^2)+2(1-b)(a-bcZ'^2)-(a-c)(a^2-c^2Z'^2)\end{matrix}\right)$$

$$+(\tfrac{1}{2}(a^2-c^2Z'^2)+1-\beta)^2-((a-c)^2+(1-b)^2)=0.$$

Um diese Formel auf das bekannte Additionstheorem 1. Art mit 2 Amplituden anzuwenden, haben wir $\varphi_3=0$, also $c=0$ zu setzen und die Gleichung 19) wird zu

$$\mathrm{tg}\psi^4(1-b^2Z'^2)^2-2\mathrm{tg}\psi^2(a^2(1+b^2Z'^2)-2b(1-b)(1-bZ'^2))+a^2(a^2-4b)=0,$$

worin

$$a=\mathrm{tg}\,\varphi_1+\mathrm{tg}\,\varphi_2,\quad b=\mathrm{tg}\,\varphi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_2.$$

Aus dieser Gleichung oder

$$\mathrm{tg}\psi^4(1-Z'^2\mathrm{tg}\varphi_1{}^2\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)^2-2\mathrm{tg}\psi^2((\mathrm{tg}\varphi_1{}^2+\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)(1+Z'^2\mathrm{tg}\varphi_1{}^2\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)$$
$$+2(1+Z'^2)\mathrm{tg}\varphi_1{}^2\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)+(\mathrm{tg}\varphi_1{}^2-\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)^2=0$$

erhalten wir

$$\mathrm{tg}\psi_1{}^2+\mathrm{tg}\psi_2{}^2=2\left(\frac{(\mathrm{tg}\varphi_1{}^2+\mathrm{tg}\varphi_2)(1+Z'^2\mathrm{tg}\varphi_1{}^2\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)+2(1+Z'^2)\mathrm{tg}\varphi'^2\mathrm{tg}\varphi_2}{(1-Z'^2\mathrm{tg}\varphi^{12}\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)^2}\right)$$

$$\mathrm{tg}\,\psi_1\,\mathrm{tg}\,\psi_2=\frac{\mathrm{tg}\,\varphi_1{}^2-\mathrm{tg}\,\varphi_2{}^2}{1-Z'^2\,\mathrm{tg}\,\varphi_1{}^2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2{}^2},$$

woraus nach einigen Rechnungen und Umwandlungen

$$\mathrm{tg}\,\psi_1+\mathrm{tg}\,\psi_2=2\mathrm{tg}\,\varphi_1\frac{\sqrt{1+(1+Z'^2)\,\mathrm{tg}\,\varphi_2{}^2+Z'^2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2{}^4}}{1-Z'^2\,\mathrm{tg}\,\varphi'^2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2{}^2},$$

$$\mathrm{tg}\,\psi_1-\mathrm{tg}\,\psi_2=2\mathrm{tg}\,\varphi_2\frac{\sqrt{1+(1+Z'^2)\,\mathrm{tg}\,\varphi_1{}^2+Z'^2\,\mathrm{tg}\,\varphi_1{}^4}}{1-Z'^2\,\mathrm{tg}\,\varphi'^2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2{}^2},$$

welche auch so geschrieben werden können

$$\mathrm{tg}\,\psi_1+\mathrm{tg}\,\psi_2=\frac{\sin 2\varphi_1\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2{}^2}}{\cos\varphi_1{}^2\cos\varphi_2{}^2-Z'^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\operatorname{tg}\psi_1 - \operatorname{tg}\psi_2 = \frac{\sin 2\varphi_2 \sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi_1^2}}{\cos\varphi_1^2 \cos\varphi_2^2 - Z'^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2} + .$$

Hieraus lässt sich noch ableiten

$$\operatorname{tg}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{2 \operatorname{tg}\varphi_1 \Delta\varphi_2}{1 - \operatorname{tg}\varphi_1^2 (\Delta\varphi_2)^2}.$$

$$\operatorname{tg}(\psi_1 - \psi_2) = \frac{2 \operatorname{tg}\varphi_2 \Delta\varphi_1}{1 - \operatorname{tg}\varphi_2^2 (\Delta\varphi_1)^2}.$$

Führen wir ein

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \Delta\varphi_2 = \operatorname{tg}\sigma_1,$$
$$\operatorname{tg}\varphi_2 \Delta\varphi_1 = \operatorname{tg}\sigma_2,$$

so folgt aus

$$\psi_1 + \psi_2 = 2\sigma_1,$$
$$\psi_1 - \psi_2 = 2\sigma_2,$$

schliesslich

$$\psi_1 = \sigma_1 + \sigma_2,$$
$$\psi_2 = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Auf diesem Wege sind wir also zu bekannten Resultaten gelangt.

§ 24.

Ableitung einer 2. Integralfunction.

Wir werden uns jetzt mit der Frage beschäftigen, ob es ausser den vorhin gefundenen noch andere Integralfunctionen gibt, welche den elliptischen Integralen 1. und 2. Art entsprechen.

Wie man im vorigen § gesehen hat, hängt die Existenz derselben davon ab, durch eine analytische Betrachtung einer geeigneten biquadratischen Gleichung von geometrischer Bedeutung zunächst eine elliptische Integralfunction zu erhalten und ferner den aus den Parametern der Gleichung zusammen gesetzten Modulus durch die Constanten der für sie substituirten Gleichung 4. Grades zu bestimmen. Von den wichtigeren Gleichungssystemen dieser Art wählen wir hier noch die folgende Function aus, welche sich den vorigen ungezwungen anschliesst.

Wir greifen nochmals auf die Gleichung 143) zurück, um dieselbe für unsern Zweck einer Transformation zu unterwerfen.

In der Function

$$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{4Rs}{a^2 - (R-s)^2} \sin\frac{1}{2}\vartheta^2}}$$

führen wir folgende Substitutionen ein

$$Z^2 = \frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}, \quad Z^2 \sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2 = \sin\varphi^2,$$

$$\cos\varphi = \frac{c.y}{b\sqrt{a^2-(R-s)^2}} = \frac{cZy}{b\sqrt{4Rs}}.$$

In Folge dieser Relationen geht die Gleichung 107) in die folgende über:

$$\cos\varphi^4 + 2\frac{b}{c}\sqrt{\frac{R}{s}}Z\sin\alpha.\cos\varphi^3 + Z^2\frac{R}{s}\left(\frac{b^2}{c^2}\sin\alpha^2 - \frac{(R^2+a^2-s^2)}{2R^2} + \frac{a^2}{c^2}\cos\alpha^2\right)\cos\varphi^2$$

20)

$$-\frac{a^2+R^2-s^2}{2Rs}\frac{b}{c}Z^3\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha.\cos\varphi + \frac{(a^2+R^2-s^2)^2-4R^2a^2\cos\alpha^2}{16R^2s^2}Z^4 = 0,$$

und auch hier ist zu entscheiden, ob durch Vergleich dieser mit der ihr identischen Gleichung

$$\cos\varphi^4 - A\cos\varphi^3 + B\cos\varphi^2 - C\cos\varphi + D = 0$$

sich die Relationen $\frac{R}{s}$, $\sin\alpha$ etc. der ersten Gleichung durch die Constanten der zweiten und damit der Modulus der Function

$$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{a^2-(R-s)^2}{4Rs}\sin\varphi^2}} = \Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi^2}}$$

bestimmen lassen.

Zu diesem Ende setzen wir

$$A = -2Z\frac{b}{c}\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha,$$

$$B = Z^2\frac{R}{s}\left(\frac{a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2}{c^2} - \frac{(R^2+a^2-s^2)}{2R^2}\right)$$

$$C = \frac{a^2+R^2-s^2}{2Rs}\frac{b}{c}Z^3\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha,$$

$$D = \frac{(a^2+R^2-s^2)^2-4R^2a^2\cos\alpha^2}{16R^2s^2}Z^4.$$

Die Division von $\frac{C}{A}$ ergibt zunächst

$$21)\qquad \frac{4C}{A} = -\frac{(a^2+R^2-s^2)Z^2}{Rs}.$$

Ferner ist

$$22)\qquad \frac{A^3-4AB+8C}{A} = +\frac{4a^2}{c^2}\frac{R}{s}\cos\alpha^2 . Z^2 \text{ und } A^2 = \frac{4b^2}{c^2}\frac{R}{s}\sin\alpha^2 Z^2,$$

$$23)\qquad \frac{C^2-A^2D}{A^2} = \frac{1}{4}\frac{a^2}{s^2}\cos\alpha^2 Z^4.$$

Aus

$$a^2+R^2-s^2 = a^2-(R-s)^2+2R^2-2Rs \qquad \text{folgt}$$

$$24)\qquad \frac{a^2+R^2-s^2}{4Rs} = \frac{1}{Z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{s}-1\right).$$

also ist auch

$$-\frac{C}{A} = 1+\frac{Z^2}{2}\left(\frac{R}{s}-1\right),$$

woraus

$$\frac{2}{Z^2} = 2\lambda^2 = \frac{1-\frac{R}{s}}{1+\frac{C}{A}}$$

Aus 21) folgt

$$-\frac{4R}{Z^2 s}\cdot\frac{C}{A} = \frac{a^2}{s^2}+\frac{R^2}{s^2}-1,$$

wir setzen hierin aus 23) den Ausdruck für $\frac{a^2}{s^2}$ ein, man erhält

$$26)\qquad \frac{4(A^2D-C^2)}{Z^4A^2} = \left(\frac{R^2}{s^2}+\frac{4}{Z^2}\frac{C}{A}\frac{R}{s}-1\right)\cos\alpha^2.$$

Aus der letzten Formel in Verbindung mit 25) resultirt

$$27)\qquad \cos\alpha^2 = -\frac{AD-C^2}{(A+C)^2}\,\frac{1-\frac{R}{s}}{1+\frac{R}{s}\frac{A-C}{A+C}}$$

Dividirt man die erste der Gleichungen 22) durch $\cos\alpha^2$, die zweite durch $\sin\alpha^2$ und subtrahirt, so resultirt bei Benutzung von 25)

$$28)\qquad -8\frac{R}{s}\frac{(A+C)}{1-\frac{R}{s}} = \frac{A^3-4AB+8C}{\cos\alpha^2}-\frac{A^3}{\sin\alpha^2}$$

Es sei

$$\frac{R}{s} = 1-\frac{2}{Z^2}\frac{A+C}{A} = 1-x \qquad 29)$$

$$x = \frac{2}{Z^2}\frac{A+C}{A}$$

Aus 27) folgt aber

$$\cos\alpha^2 = \frac{A^2D-C^2}{A^2Z'^2-C^2},\quad \sin\alpha^2 = \frac{A^2(Z'^2-D)}{A^2Z'^2-C^2},\quad \cot\alpha^2 = \frac{A^2D-C^2}{A^2(Z'^2-D)}.$$

In Folge dieser Werte geht die Gleichung 28) nach einigen Reductionen über in

$$8(1-z) = \frac{A^3-4AB+8C}{A^2D-C^2}(2A-(A-C)z) - \frac{A^2z(2A-(A-C)z)}{2(A+C)-A(1-D)z}.$$

Entwickelt man nach Potenzen von z, so erhält man die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned}
&A^2\left(8(1-D)-A(A-C)-(1-D)(A-C)\frac{A^3-4AB+8C}{A^2D-C^2}\right)\\
&+2z\left(-4A(1-D)-8(A+C)+A^3+(2A^2-C^2-A^2D)\frac{A^3-4AB+8C}{A^2D-C^2}\right)\\
29)\quad&\\
&+4(A+C)\left(4-\frac{A(A^3-4AB+8C)}{A^2D-C^2}\right)=0.
\end{aligned}$$

Da $z = \frac{2}{Z^2}\,\frac{A+C}{A}$ und $\frac{1}{Z^2} = \lambda^2$ ist, so ergibt die Auflösung folgendes Resultat.

$$30)\qquad \lambda^2 = \frac{1}{Z^2} =$$

$$\frac{-A(A^3-4AB+8C)+A(AC^2-4ABD+8CD) +2(A^2D-C^2)(3+B-D\pm(\sqrt{(1+B+D)^2-(A+C)^2})}{(A+C)(-(A^3-4AB+8C)+8AD+A^2C-4BC +8CD+AC^2-4ABD+4BCD-8AD^2-C^3)}$$

Demgemäss haben wir den Satz:

Mit jeder biquadratischen Gleichung von der Form

$$31)\qquad \cos\varphi^4 - A\cos\varphi^3 + B\cos\varphi^2 - C\cos\varphi + D = 0$$

ist die Integralfunction

$$32)\quad \int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_1^2}} + \int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_2^2}} + \int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_3^2}} + \int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_4^2}} = 2K$$

verknüpft, deren Amplituden durch die Wurzeln der Gleichung, und deren Modulus durch den Ausdruck in 30) bestimmt sind.

Letzterer kann auch aus der Formel für $Z'^2 = 1 - Z^2$, nämlich aus

$$\frac{A(A^3 - 4AB + 8C)}{A^2D - C^2}\left(Z'^2 - \frac{C^2}{A^2}\right) + \frac{A^2Z'^2 - C^2}{Z'^2 - D} = 4\left(1 + Z'^2 + \frac{2C}{A}\right)$$

berechnet werden.

Ferner steht mit

$$\sin\varphi^4 - A\sin\varphi^3 + B\sin\varphi^2 - C\sin\varphi + D = 0$$

die Integralfunction

$$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - u^2\sin\varphi_1^2}} + \int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - u^2\sin\varphi_2^2}} + \int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1 - u^2\sin\varphi_3^2}} + \int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{1 - u^2\sin\varphi_4^2}} = 2K$$

in Verbindung, deren Modulus u aus dem für λ gegebenen Ausdruck vermittelst $u'^2\lambda'^2 = 1$, worin $u'^2 = 1 - u^2$ und $\lambda'^2 = 1 - \lambda^2$ berechnet werden kann.

Für Gleichungen dritten Grades ist zu beachten, dass aus $\cos\varphi_4 = 0$, $\varphi_4 = 90^0$ folgt, das entsprechende Integral also zum vollständigen Integral K wird.

Um die elliptischen Integralfunctionen 2. Art aufzustellen, haben wir die Constante der Function

$$\Sigma\int\sqrt{1 - \lambda^2\sin\varphi^2} = 2\frac{b}{c}\sqrt{\frac{R}{s}}\cos\alpha$$

zu transformiren.

Dieselbe wird vermöge $A = -2Z\frac{b}{c}\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha$ durch $-\frac{A}{Z}\cot\alpha$ ausgedrückt, und wenn wir noch $\cot\alpha$ einführen, so erhält man schliesslich

$$33)\int\sqrt{1 - \lambda^2\sin\varphi_1^2}\,d\varphi_1{}^2 + \int\sqrt{1 - \lambda^2\sin\varphi_2^2}\,d\varphi_2 + \int\sqrt{1 - \lambda^2\sin\varphi_3^2}\,d\varphi_3 + \int\sqrt{1 - \lambda^2\sin\varphi_4^2}\,d\varphi_4 = \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{A^2D - C^2}{Z'^2 - D}}.$$

Vermittelst der Kegelschnitte sind wir also durch das Vorstehende in den Besitz zweier Integralfunctionen gelangt, welche auf

einzelne Teile der Geometrie neues Licht zu werfen im Stande sind. In den folgenden §§ geben wir eine Anwendung derselben in geometrischer und dynamischer Betrachtung, um die entwickelten Functionen so viel als möglich zu verwerten. Ob noch andere als die gegebenen möglich sind, werden wir später entscheiden.

§. 25.

Geometrische Anwendungen.

Ein Kreis vom Halbmester s schneide eine Ellipse in 4 Punkten. Wir ziehen senkrecht zur X-Achse durch dieselben Gerade bis zu dem die Ellipse umschliessenden Kreis und bezeichnen die Winkel zwischen den entsprechenden Radien a und der kleinen Achse mit φ. Dieselben werden durch die Wurzeln der folgenden Gleichung, in welcher $R(\alpha)$ die Polarcoordinaten des Kreismittelpunktes darstellen, gefunden:

$$34)\quad \begin{aligned} &\operatorname{tg}\varphi^4((R^2-s^2+a^2)^2-4R^2a^2\cos\alpha^2)-4abR^2\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi^3\\ &+(2(R^2-s^2+a^2)(R^2-s^2+b^2)-4R^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2))\operatorname{tg}\varphi^2\\ &-4abR^2\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi+(R^2-s^2+b^2)^2-4R^2b^2\sin\alpha^2=0. \end{aligned}$$

Wenden wir hierauf die erste Integralfunction an, so erhält man als Modulus

$$35)\quad Z'^2=\frac{4a^2b^2R^4\sin 2\alpha^2+c^4((R^2-s^2+a^2)^2-4R^2a^2\cos\alpha^2)}{4a^2b^2R^4\sin 2\alpha^2+c^4((R^2-s^2+b^2)^2-4R^2b^2\sin\alpha^2)}$$

und die Function ist

$$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi^1}}=2K.$$

Bemerkenswerter ist die Integralfunction der 2. Art, wenn dieselbe auf die vorliegende Ellipse bezogen wird. Man hat nur $Z'=\frac{b}{a}$ zu setzen, und die Bedingungsgleichung hierfür ist

$$36)\quad \frac{4a^2b^2}{c^4}R^4\sin 2\alpha^2-4\frac{R^2}{c^2}(a^4\cos\alpha^2-b^4\sin\alpha^2)+(R^2-s^2+a^2+b^2)^2=a^2b^2$$

weshalb nach 33) resultirt

$$37)\quad \begin{aligned} &E\varphi_1+E\varphi_2+E\varphi_3+E\varphi_4\\ &=2E+\frac{2}{a}\sqrt{\frac{4R^2}{c^2}(a^2\cos\alpha^2-b^2\sin\alpha^2)-2(R^2-s^2)-a^2-b^2}, \end{aligned}$$

oder wenn wir die Ellipsenbogen $aE\varphi_n = S_n$ einführen und die Constante durch Elimination von s transformiren

$$38)\quad S_1+S_2+S_3+S_4 = 2S+2\sqrt{a^2-\frac{4b^2}{c^2}R^2\sin\alpha^2}-2\sqrt{b^2+\frac{4a^2}{c^2}R^2\cos\alpha^2}$$

Setzt man

$$39)\quad \sqrt{a^2-\frac{4b^2}{c^2}R^2\sin\alpha^2}-\sqrt{b^2+\frac{4a^2}{c^2}R^2\cos\alpha^2} = d,$$

so erhält man die Curvengleichung 4. Grades:

$$40)\quad \begin{aligned}&(a^2x^2+b^2y^2)^2-a^2c^2(c^2+d^2)x^2-\frac{b^2c^2}{2}(c^2-d^2)y^2\\ &= +\frac{c^4}{16}(a+b+d)(a+b-d)(a-b+d)(-a+b+d)\end{aligned}$$

Die algebraische Summe der Ellipsenbogen bleibt für den Fall, dass $R(\alpha)$ auf dieser Curve bleibt und s durch 36) bestimmt wird, constant.

Für Gleichungen 3. Grades wählen wir den Fall der Normalen einer Parabel. Der Schnittpunkt der Normalen habe die Coordinaten $R(\alpha)$ in Bezug auf den Brennpunkt. Der Polarwinkel eines Normalenfusspunktes sei ϑ, vom Scheitel an gerechnet. Die bezügliche Gleichung ist dann

$$41)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3+\left(1+\frac{R}{q}\cos\alpha\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta-\frac{R}{q}\sin\alpha = 0.$$

Der Modulus der entsprechenden Integralfunction

$$\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1{}^2}}+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2{}^2}}+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3{}^2}} = 2K$$

ist sehr einfach, da $Z'^2 = \frac{r}{R}$ ist, also ist $Z^2 = \frac{R-r}{R}$, $s = \frac{q}{\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2}$.

Führen wir $\vartheta' = 180^0-\vartheta$ ein, so erhält man

$$42)\quad \cot\vartheta'^3+\left(1+\frac{R}{q}\cos\alpha\right)\cot\tfrac{1}{2}\vartheta'-\frac{R}{q}\sin\alpha = 0.$$

Der Modulus wird wegen $\nu'^2 = \frac{R}{r}$, $\nu^2 = \frac{r-R}{r}$, und die Function ist

$$\int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_1'}{\sqrt{1-\frac{r-R}{r}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1'^2}} + \int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_2'}{\sqrt{1-\frac{r-R}{r}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'_2{}^2}} + \int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_3'}{\sqrt{1-\frac{r-R}{r}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3'^2}} = K$$

Will man diese Gleichungen auf die Pendelbewegung anwenden, so ist für die vorliegende Function $\frac{r-R}{r} = \frac{2s}{h}$ einzuführen, wo h die Geschwindigkeitshöhe im tiefsten Punkt des Kreises vom Halbmesser s ist. Für $r = h$ ist $s-R = 2s$ und es ist $t_1+t_2+t_3 = t$. Man sieht, dass das Verhältniss $\frac{s}{h}$ nur von $\frac{R}{r}$ abhängt.

Setzen wir demnach in $\frac{2s}{h} = 1-\frac{R}{r}$ das Verhältniss $\frac{R}{r} = f$ fest, so erhalten wir wegen $r = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}\alpha^2}$ auch $f = \frac{R}{q}\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{R}{p}(1+\cos\alpha)$.

Aus dieser Gleichung erhalten wir, wenn die x-Achse nach der positiven Richtung der Parabel genommen wird, als Gleichung für den geometrischen Ort constanten Verhältnisses $\frac{s}{h}$ die Parabel

$$y^2 = 2pf\left(x+\frac{pf}{2}\right),$$

welche mit der gegebenen confocal ist. Hierbei kann der Kreis und die Geschwindigkeitshöhe des in ihm sich bewegenden Punktes beliebig gewählt werden, ihr Verhältniss muss aber constant bleiben.

Dieser innern Parabel entspricht eine polare äussere confocale Parabel

$$y^2 = \frac{2p}{f}\left(x+\frac{pf}{2}\right)$$

als geometrischer Ort der Schnittpunkte dreier entsprechenden Normalen der gegebenen Parabel, deren bezügliche Zeiten t der Bewegung durch die Relation $t_1+t_2+t_3 = 2t$ verknüpft sind. Da f und damit der Modulus $Z < 1$ ist, so entspricht bekanntlich die Bewegung dem Falle der vollen Umkreisung. Die derselben Amplitude ϑ entsprechenden 3 Parabelradien $R\,r\,R'$ haben wir schon erwähnt, die Relation $r^2 = RR'$.

§ 26.

Die Gleichung 34) im vorigen § nimmt für die Unbekannte $\cos\varphi$ folgende Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
&\cos\varphi^4+\frac{4Rb}{c^2}\sin\alpha.\cos\varphi^3+\left(\frac{4R^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)}{c^4}-\frac{(a^2+R^2-s^2)}{c^2}\right)\cos\varphi^2\\
42)\quad&-\frac{4Rb}{c^2}\sin\alpha.\frac{a^2+R^2-s^2}{c^2}\cos\varphi+\frac{(a^2+R^2-s^2)^2}{c^4}-\frac{4R^2a^2}{c^4}\cos\alpha^2=0.
\end{aligned}
$$

Auf diese Gleichung lässt sich die in § 24. entwickelte Cosinusfunction anwenden, deren Modulus $\lambda^2=\frac{1}{Z^2}=\frac{1}{1-Z'^2}$ aus der dort entwickelten Form oder auch aus

$$\frac{A^3-4AB+8C}{A(A^2D-C^2)}+\frac{1}{Z'^2-D}=\frac{4\left(1+Z'^2+\frac{2C}{A}\right)}{A^2Z'^2-C^2}$$

berechnet werden kann.

Es ist

$$A^3-4AB+8C=64\frac{R^3a^2b}{c^6}\sin\alpha\cos\alpha^2,$$

$$A^2D-C^2=-64\frac{R^4a^2b^2}{c^8}\sin\alpha^2\cos\alpha^2.$$

Wir setzen auch hier $\lambda^2=\frac{c^2}{a^2}$ also $Z'^2=-\frac{b^2}{c^2}$ fest, bezeichnen

$$\frac{a^2+R^2-s^2}{c^2}=y$$

und erhalten schliesslich

$$(1-y)^2=\frac{\left(\frac{b^2}{c^2}+y^2\right)\frac{4R^2b^2}{c^4}\sin\alpha^2}{\frac{b^2}{c^2}+y^2-\frac{4R^2a^2}{c^4}\cos\alpha^2},$$

und y wird bestimmt durch eine Gleichung 4. Grades

$$
\begin{aligned}
43)\quad & y^4-2y^3+\left(\frac{a^2}{c^2}-\frac{4R^2}{c^4}(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)\right)y^2-2\left(\frac{b^2}{c^2}-\frac{4R^2a^2}{c^4}\cos\alpha^2\right)y\\
&+\frac{b^2}{c^2}-\frac{4R^2a^2}{c^4}\cos\alpha^2-\frac{4R^2b^2}{c^6}\sin\alpha^2=0.
\end{aligned}
$$

Die Bedeutung derselben ist die, dass zu jedem Punkte $R(\alpha)$ in der Ebene einer Ellipse 4 durch die Wurzeln dieser Gleichung bestimmte, und aus $s^2 = a^2 + R^2 - c^2 y$ vier Radien berechnet werden können, deren entsprechende Kreise auf der Ellipse Bogen begrenzen, welche durch die Formel

$$44)\qquad \Sigma a \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin\varphi^2} = \frac{4R}{c}\cos\alpha \frac{1-y}{\sqrt{\frac{b^2}{c^2} + y^2}}$$

in Verbindung stehen.

Als 2. Beispiel wählen wir die Gleichung der Normalen der Ellipse und zwar in der leicht abzuleitenden Form

$$\cos\varphi^4 + \frac{2bR}{c^2}\sin\alpha.\cos\varphi^3 + \frac{R^2}{c^4}\left(a^2 - \frac{c^4}{R^2} - c^2\sin\alpha^2\right)\cos\varphi^2 \;.$$
$$- \frac{2bR}{c^2}\sin\alpha.\cos\varphi - \frac{b^2R^2}{c^4}\sin\alpha^2 = 0.$$

Die Anwendung der bezüglichen Integralfunction auf diese Gleichung würde demnach eine Relation zwischen den 4 durch die Normalenfusspunkte bestimmten Ellipsenbogen ergeben, wenn wir wieder $\lambda^2 = \frac{c^2}{a^2}$ setzen.

Die aus dieser Annahme hervorgehende Bedingungsgleichung wird sehr einfach

$$46)\qquad \frac{R^2}{c^2} = \frac{1}{\sin\alpha^2} - \frac{1}{\cos\alpha^2},$$

oder in Cartesischen Coordinaten

$$47)\qquad x^2 y^2 = c^2(x^2 - y^2),$$

und hierfür ist zunächst

$$\Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin\varphi^2}} = 2K,$$

und ferner

$$48)\qquad \Sigma \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin\varphi^2}\, d\varphi = \frac{2R}{a}\sin\alpha \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2R^2}{c^4}\sin\alpha^2}{1 - \frac{R^2}{c^2}\sin\alpha^2}} + 2E,$$

§ 26.

Die Gleichung 34) im vorigen § nimmt für die Unbekannte $\cos\varphi$ folgende Gestalt an:

$$\cos\varphi^4+\frac{4Rb}{c^2}\sin\alpha.\cos\varphi^3+\left(\frac{4R^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)}{c^4}-\frac{(a^2+R^2-s^2)}{c^2}\right)\cos\varphi^2$$

42)

$$-\frac{4Rb}{c^2}\sin\alpha.\frac{a^2+R^2-s^2}{c^2}\cos\varphi+\frac{(a^2+R^2-s^2)^2}{c^4}-\frac{4R^2a^2}{c^4}\cos\alpha^2=0.$$

Auf diese Gleichung lässt sich die in § 24. entwickelte Cosinusfunction anwenden, deren Modulus $\lambda^2=\frac{1}{Z^2}=\frac{1}{1-Z'^2}$ aus der dort entwickelten Form oder auch aus

$$\frac{A^3-4AB+8C}{A(A^2D-C^2)}+\frac{1}{Z'^2-D}=\frac{4\left(1+Z'^2+\frac{2C}{A}\right)}{A^2Z'^2-C^2}$$

berechnet werden kann.

Es ist

$$A^3-4AB+8C=64\frac{R^3a^2b}{c^6}\sin\alpha\cos\alpha^2,$$

$$A^2D-C^2=-64\frac{R^4a^2b^2}{c^8}\sin\alpha^2\cos\alpha^2.$$

Wir setzen auch hier $\lambda^2=\frac{c^2}{a^2}$ also $Z'^2=-\frac{b^2}{c^2}$ fest, bezeichnen

$$\frac{a^2+R^2-s^2}{c^2}=y$$

und erhalten schliesslich

$$(1-y)^2=\frac{\left(\frac{b^2}{c^2}+y^2\right)\frac{4R^2b^2}{c^4}\sin\alpha^2}{\frac{b^2}{c^2}+y^2-\frac{4R^2a^2}{c^4}\cos\alpha^2},$$

und y wird bestimmt durch eine Gleichung 4. Grades

$$43)\quad y^4-2y^3+\left(\frac{a^2}{c^2}-\frac{4R^2}{c^4}(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)\right)y^2-2\left(\frac{b^2}{c^2}-\frac{4R^2a^2}{c^4}\cos\alpha^2\right)y$$
$$+\frac{b^2}{c^2}-\frac{4R^2a^2}{c^4}\cos\alpha^2-\frac{4R^2b^2}{c^6}\sin\alpha^2=0.$$

Die Bedeutung derselben ist die, dass zu jedem Punkte $R(\alpha)$ in der Ebene einer Ellipse 4 durch die Wurzeln dieser Gleichung bestimmte, und aus $s^2 = a^2 + R^2 - c^2 y$ vier Radien berechnet werden können, deren entsprechende Kreise auf der Ellipse Bogen begrenzen, welche durch die Formel

$$44)\qquad \Sigma a \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin\varphi^2} = \frac{4R}{c}\cos\alpha \frac{1-y}{\sqrt{\frac{b^2}{c^2} + y^2}}$$

in Verbindung stehen.

Als 2. Beispiel wählen wir die Gleichung der Normalen der Ellipse und zwar in der leicht abzuleitenden Form

$$\cos\varphi^4 + \frac{2bR}{c^2}\sin\alpha . \cos\varphi^3 + \frac{R^2}{c^4}\left(a^2 - \frac{c^4}{R^2} - c^2\sin\alpha^2\right)\cos\varphi^2 \; .$$
$$- \frac{2bR}{c^2}\sin\alpha . \cos\varphi - \frac{b^2R^2}{c^4}\sin\alpha^2 = 0.$$

Die Anwendung der bezüglichen Integralfunction auf diese Gleichung würde demnach eine Relation zwischen den 4 durch die Normalenfusspunkte bestimmten Ellipsenbogen ergeben, wenn wir wieder $k^2 = \frac{c^2}{a^2}$ setzen.

Die aus dieser Annahme hervorgehende Bedingungsgleichung wird sehr einfach

$$46)\qquad \frac{R^2}{c^2} = \frac{1}{\sin\alpha^2} - \frac{1}{\cos\alpha^2},$$

oder in Cartesischen Coordinaten

$$47)\qquad x^2y^2 = c^2(x^2 - y^2),$$

und hierfür ist zunächst

$$\Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin\varphi^2}} = 2K,$$

und ferner

$$48)\qquad \Sigma \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin\varphi^2}\, d\varphi = \frac{2R}{a}\sin\alpha \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2R^2}{c^4}\sin\alpha^2}{1 - \frac{R^2}{c^2}\sin\alpha^2}} + 2E,$$

oder die algebraische Summe der Ellipsenbogen ist, im Fall $R(\alpha)$ auf der obigen Curve liegt, durch

$$49)\qquad \Sigma S = \frac{2R}{c}\sqrt{a^2\cos\alpha^2 - b^2\sin\alpha^2} + 2S$$

ausgedrückt.

Bemerkt man aber, dass diese Curve $x^2y^2 = c^2(x^2 - y^2)$ als einzigen Parameter die Excentricität der Ellipse besitzt, so gewinnt man das allgemeinere Resultat:

Mit sämmtlichen confocalen Ellipsen von der Excentricität c ist eine eigentümliche durch die Gleichung

$$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{c^2}$$

charakterisirte Curve verknüpft, welche die Eigenschaft besitzt, dass die von jedem ihrer Punkte $R(\alpha)$ zu jeder Ellipse gezogenen 4 Normalen entsprechende Ellipsenbogen bestimmen, deren Summe

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2S + \frac{2R}{c}\sqrt{a^2\cos\alpha^2 - b^2\sin\alpha^2}$$

in Bezug auf den entsprechenden doppelten Ellipsenquadranten $2S$ um eine algebraische Grösse differirt.

Wir wollen noch an dieser Stelle erwähnen, dass die in I § 1. benutzte Curve 4. Grades $y = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$, aus welcher die Resultante $\operatorname{tg}\tau^4 - A\operatorname{tg}\tau^3 + B\operatorname{tg}\tau^2 + D$ hervorging in Folge der letztern auf die Integralfunction

$$\int\frac{d\tau}{\sqrt{1 - Z^2\sin\tau^2}} = 2K$$

führt, worin Z vermittelst 9) bestimmt werden kann. Da in den Constanten B und D die Grösse d durch $d - y$ ersetzt werden muss, so erhält man für alle der X-Achse parallele die Curve in 4 Punkten schneidenden Geraden die entsprechenden obigen Functionen, in welchen die Amplituden τ die Winkel sind, welche die Tangenten der bezüglichen Punkte mit der X-Achse einschliessen. Da ferner die Resultante von $x^3 - ax^2 + bx - c - y = 0$ und $3x^2 - 2ax + b - \operatorname{tg}\tau = 0$

$$\operatorname{tg}\tau^3 - (a^2 - 3b)\operatorname{tg}\tau^2 - (4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2)$$
$$- 2(2a^3 - 9ab + 27c)y - 27y^2 = 0$$

ist, so folgt hieraus nach I 14) die Function

$$\Sigma \int \frac{d \operatorname{tg} \tau}{(3 \operatorname{tg} \tau - 2(a^2 - 3b)) \sqrt{3 \operatorname{tg} \tau + a^2 - 3b}} \quad \text{und}$$

$$\int \frac{d \operatorname{tg} \tau}{\sqrt{\operatorname{tg} \tau + \frac{1}{3}(a^2 - 3b)}} = 0.$$

§ 27.

Die angeführten Beispiele lassen erkennen, dass man mittelst der entwickelten Integralfunctionen zu neuen Eigenschaften der Curven gelangen kann. Auch die folgenden auf die Kegelschnitte sich beziehenden Erörterungen werden noch einige bemerkenswerte Resultate und Sätze zu Tage fördern, die wir in dynamischem und geometrischem Sinn verwerten können.

Lassen wir die Bezeichnungen wie früher und führen als Unbekannte die Brennstrahlen von einem Brennpunkt nach den Schnittpunkten von Kreis und Kegelschnitt ein, so ist die betreffende Gleichung

$$50) \quad r^4 + 4a\left(\frac{R}{c}\cos\alpha - 1\right)r^3$$
$$+\left(6a^2 - 12a^2\frac{R}{c}\cos\alpha + \frac{4R^2}{e^2}\cos\alpha^2 + 4\frac{b^2}{c^2}R^2\sin\alpha^2 + 2y\right)r^2$$
$$+\left(-4a^3 + 12\frac{a^3}{c}R\cos\alpha - \frac{2a}{e^2}\left(4R^2\cos\alpha^2 + 4b^2\frac{R^2}{a^2}\sin\alpha^2 + 2\frac{c^2}{a^2}y\right) + \frac{4R}{e}y\cos\alpha\right)r$$
$$+a^4 - 4a^4\frac{R}{c}\cos\alpha + \frac{a^2}{c^2}\left(4R^2\cos\alpha^2 + 4b^2\frac{R^2}{a^2}\sin\alpha^2 + \frac{2c^2}{a^2}\cdot y\right)$$
$$-4R\frac{a}{e}y\cos\alpha + y^2 - 4b^2R^2\sin\alpha^2 = 0,$$

worin $y = R^2 + b^2 - s^2$ variabel angenommen ist.

Nach einigen Rechnungen und Transformationen erhalten wir durch Anwendung der Formeln I 13) auf obige Gleichung den Ausdruck

$$51) \qquad \Sigma \int \frac{dr}{\frac{4bR}{c}\sin\alpha\sqrt{r^2 + 2ar - (1 - e^2)a^2}} = 1$$

in welchem Integral die Constante $= 1$ sein muss.

Dasselbe steht mit einem andern in der Centralbewegung vorkommenden Integral in eigentümlichem Zusammenhang, was wir zeigen wollen.

Die Theorie der Planetenbewegung hat bekanntlich die Bewegungsgleichungen

$$52)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{xu}{r^3}=0,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{yu}{r^3}=0,$$

$$u=k^2(1+m),\quad r^2=x^2+y^2,\quad r\,dr=x\,dx+y\,dy.$$

Aus den ersten beiden erhalten wir durch Multiplication mit $2x$, bez. $2y$

$$\frac{d(dx^2+dy^2)}{dt^2}=-\frac{2u}{r^2}dr$$

woraus

$$53)\qquad \frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-\frac{2u}{r}+h=0.$$

Das 2. Kepler'sche Gesetz gibt

$$x\,dy-y\,dx=c\,dt,$$

woraus durch Quadriren und Transformiren der Ausdruck

$$(x^2+y^2)\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-\frac{(x\,dx+y\,dy)^2}{dt^2}=c^2,\qquad\text{oder}$$

$$r^2\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=c^2$$

und hieraus erhalten wir das bekannte Zeitintegral

$$54)\qquad t=\int\frac{r\,dr}{\sqrt{h}\sqrt{-r^2+2\frac{u}{h}r-\frac{c^2}{h}}}$$

der planetarischen Bewegung, in welchem

$$\frac{u}{h}=a,\quad \frac{c^2}{h}=a^2(1-e^2)$$

ist. Der Vergleich dieses mit dem noch mit r multiplicirten Integral 51) lässt die Identität beider erkennen.

Aus der Integralfunction geht also zunächst die Relation

$$\Sigma\int\frac{r\,dr}{\sqrt{h}\sqrt{-r^2+2\frac{u}{h}r-\frac{c_s^2}{h}}}=4\frac{bR}{ck}\frac{\sqrt{a}\sin\alpha}{\sqrt{1+m}}+2t$$

d. i. die Formel

$$55)\qquad t_1+t_2+t_3+t_4=2t+4\sqrt{\frac{p}{1+m}}\,\frac{R\sin\alpha}{ke}$$

hervor, in welcher t die Umlaufszeit in der Ellipse bedeutet.

In der Centralbewegung nach dem Newton'schen Gesetz $\frac{k^2}{r^2}$ ist die Summe der 4 vom Perihel an gerechneten Zeiten bis zu den 4 Durchschnitten des Kreises und der Ellipse für alle concentrischen Kreise eine constante Grösse, welche auch dann noch unverändert bleibt, wenn die Centra der Kreise auf einer mit der grossen Achse parallelen Geraden fortrücken. Hiernach ist bei 2 concentrischen Kreisen, welche 4 Ellipsenbogen begrenzen, die Summe der Zeiten für die Zurücklegung dieser Strecken im 1. und 3. Quadranten gleich der im 2. und 4.

Dies gilt allgemein für Parabel und Hyperbel.

Führt man $\tau_1=t-t_3$ und $\tau_2=t-t_4$ ein, so ist $(t_1+t_2)-(\tau_3+\tau_4)=C$, wonach die τ ebenfalls vom Perihel an genommen sind.

In diesem Sinne bildet der Ausdruck t_1+t_2 als Summe der Zeiten vom Perihel bis zu den entsprechenden beiden Schnittpunkten von Kreis und Kegelschnitt mit dem analogen $\tau_1+\tau_2$ von demselben Anfangspunkt an gerechnet zu den andern Schnittpunkten beider Curven eine constante Differenz, wenn der geometrische Ort der concentrischen Kreise eine zur X-Achse parallele Gerade ist.

Diese Relationen können auch noch auf anderm Wege gefunden werden, und zwar für die Ellipse des Kepler'schen Problems.

§ 28.

Die folgende Untersuchung basirt auf der Untersuchung der Gleichung I 107) oder

$$y^4+4\frac{b^2}{c^2}R\sin\alpha.y^3+\frac{b^4}{c^4}\left(\frac{4R^2a^2}{b^2}-\frac{2c^2}{b^2}(a^2+R^2-s^2)-\frac{4c^2}{b^2}R^2\sin\alpha^2\right)y^2$$

$$56)$$

$$-4\frac{b^4}{c^4}R\sin\alpha(a^2+R^2-s^2)y+\frac{b^4}{c^4}((a^2+R^2-s^2)^2-4R^2a^2+4R^2a^2\sin\alpha^2)=0$$

in welcher wir s^2 oder auch $a^2+R^2-s^2$ variabel betrachten.

Die bekannten Methoden führen auf das einfache Integral

$$\Sigma \int \frac{dy}{x} = C$$

sowie auf

$$\Sigma \int \frac{y\,dy}{x} = C, \quad \Sigma \int \frac{y^2\,dy}{x} = C \text{ etc.}$$

Führen wir den excentrischen Winkel

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi$$

ein, so erhalten wir vermöge $y\,dy + x\,dx = 0$ aus dem letzten Integral, welches wir hier nur betrachten wollen, das Flächenintegral

57) $$\Sigma \int y\,dx = C$$ oder

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = C.$$

Hieraus gewinnen wir das Resultat:

Die durch die letzte Formel charakterisirte algebraische Summe der vier von den Durchschnitten eines Kreises und eines Kegelschnitts bestimmten Flächenstücke des Letztern ist für alle concentrischen Kreise constant.

Um diese Constante zu bestimmen, bemerke man die folgende Darstellung:

$$\Sigma \int y\,dx = ab\Sigma \int \cos\varphi^2 d\varphi = \frac{ab}{4}\Sigma \int (1 + \cos 2\varphi)\, d\,2\varphi$$

$$= \frac{ab}{4}(\Sigma\, 2\varphi + \Sigma \sin 2\varphi).$$

Da aber $\Sigma\varphi = 0$ und $\Sigma \sin^2\varphi = 16\frac{ab\,R^2}{c^4}\sin^2\alpha$ ist, so erhält man für die Ellipse bei Benutzung von $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{b}{a}$

58) $$y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = \frac{a^2b^2}{c^4}R^2 \sin 2\alpha \,.\, \operatorname{tg} 2\varepsilon^2$$

für die Hyperbel dagegen

59) $$y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = \frac{a^2b^2}{c^4}R^2 \sin 2\alpha = R^2 \sin 2\alpha \,.\, \sin 2\varepsilon^2.$$

Hieraus folgt also allgemein:

Schneidet ein Kreis einen Kegelschnitt in 4 Punkten, und werden die durch diese Schnittpunkte bestimmten Flächenstücke $\int y\,dx$ des Kegelschnitts mit y bezeichnet, so is' die Summe $y_1 - y_2 + y_3 - y_4$

für alle concentrischen Kreise und überhaupt constant, wenn der geometrische Ort der Centra derselben eine gleichseitige Hyperbel $R^2 \sin 2\alpha = 2xy = A^2$ ist.

Da dieser Satz alle Kegelschnitte umfasst, so gilt er auch noch für die Asymptoten der Hyperbel, woraus der neue Satz sich ergibt:

Werden 2 den Winkel 2ε einschliessende Geraden von einem Kreise geschnitten, dessen Centrum vom Schnittpunkte der Geraden die Entfernung R hat, und ist der Winkel, welchen R mit der den Winkel 2ε halbirenden Geraden als X-Achse einschliesst, $= \alpha$, werden ferner die 4 Schnittpunkte auf diese Achse projicirt, so ist die Summe der Dreiecke

60) $$J_1 - J_2 + J_3 - J_4 = R^2 \sin 2\alpha \sin 2\varepsilon^2$$

für alle concentrischen Kreise und überhaupt eine constante Grösse, wenn dies mit

$$R^2 \sin 2\alpha \sin 2\varepsilon^2$$

der Fall ist.

Wir führen noch beiläufig an, dass aus

$$\sum_x \frac{1}{\frac{\partial \varDelta}{\partial y}} + \frac{1}{d} = 0$$

die Beziehungen

$$\int \frac{dy}{xy} = \frac{1}{a} \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

also auch nach Feststellung der Constanten

61) $$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi_1}{2}\right) \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi_2}{2}\right) \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi_3}{2}\right) \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi_4}{2}\right) \\ = \frac{2Ra\cos\alpha + a^2 + R^2 - s^2}{2Ra\cos\alpha - a^2 - R^2 + s^2}$$

erhalten werden können. Die Constante kann durch Transformation auf einen sehr einfachen Ausdruck von Tangenten gebracht werden.

Bemerkung.

Die 4 Radien des Kreises nach den Schnittpunkten des Kegelschnitts mögen mit den Tangenten dieser Punkte die Winkel δ etc. bilden, ebenso schliessen diese Radien mit $R(\alpha)$ die bekannten Winkel ϑ ein, für einen dem ersten unendlich nahen concentrischen Kreis vom Radius $s + ds$ haben wir

$$s\, d\vartheta = ds \operatorname{tg} \delta.$$

Summiren wir und beachten, dass $\Sigma d\vartheta = 0$ ist, so folgt

$$\Sigma \operatorname{tg} \delta = 0.$$

Führen wir ferner in 45) als Unbekannte die Tangente desselben excentrischen Winkels, also $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ein, so wird man für die Ellipse die folgende Gleichung

$$\begin{aligned}62)\quad & \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^4(s^2-R^2-b^2-2Rb\sin\alpha)+4Ra\cos\alpha.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^3+(2(s^2-R^2)\\ & -4a^2+2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^2+4Ra\cos\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi+(s^2-R^2-b^2+2Rb\sin\alpha)=0\end{aligned}$$

aufstellen können. Der Modulus der Integralfunction

$$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{\varphi^2}{2}}}=2K$$

folgt aus

$$63)\quad Z'^2=\frac{R^2a^2\cos\alpha^2+c^2(s^2-R^2-b^2-2Rb\sin\alpha)}{R^2a^2\cos\alpha^2+c^2(s^2-R^2-b^2+2Rb\sin\alpha)}.$$

Für die Function 2. Art setzen wir, um die Integrale durch Ellipsenbogen auszudrücken $Z'=\frac{b}{a}$ und das Resultat ist

$$\Sigma a\int\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}\,d\tfrac{1}{2}\varphi=2Ea+2\sqrt{Rb\sin\alpha}$$

Jedes Integral dieser Function drückt den zur halben excentrischen Anomalie gehörigen Ellipsenbogen aus. Bezeichnet man diese Bogen durch S_1 etc., den Ellipsenquadranten durch S, so ist

$$64)\qquad S_1+S_2+S_3+S_4=2S+2\sqrt{Rb\sin\alpha}$$

in welchem Ausdruck die Constante wie in einem früheren Beispiel von $R\sin\alpha$ abhängig ist. Die Winkel φ gehen von 0 bis π.

Die Bedingungsgleichung, welche den geometrischen Ort der Kreiscentra für die Existenz der letzten Function bestimmt, führt auf die Hyperbel

$$65)\qquad \frac{\left(y+\frac{a^2+b^2}{c^2}b\right)^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}=\frac{4a^2b^2}{c^4}+\frac{s^2}{b^2}.$$

Ableitung der 8. Integralfunction.

§ 29.

Anstatt der biquadratischen Gleichung für $\operatorname{tg}\varphi$ kann man auch die schon früher eingeführte Form

$$a + b\sin\varphi + c\cos\varphi + d\sin 2\varphi + e\cos 2\varphi = 0 \tag{66}$$

benutzen. Der entsprechende Modulus derselben ist hiernach

$$Z'^2 = \frac{(b-2d)^2 + 4(a-c+e)(e \pm \sqrt{d^2+e^2})}{(b+2d)^2 + 4(a+c+e)(e \pm \sqrt{d^2+e^2})} \tag{67}$$

und also

$$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{1}{2}\varphi^2}} = 2K.$$

Es sei der Mittelpunkt eines Kreises vom Radius s um die Strecke R von einem Brennpunkt eines Kegelschnittes entfernt. Der Winkel, den dieselbe mit der X-Achse einschliesst, sei α. Die Schnittpunkte der beiden Curven verbinde man mit dem Mittelpunkt des Kreises durch Kreisradien, welche mit der verlängerten Strecke R die Winkel ϑ_1 etc. einschliessen mögen. (Fig. 15).

Die Elimination von φ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} R\sin\alpha + s\sin(\vartheta + \alpha) &= \frac{p\sin\varphi}{1 - e\cos\varphi} \\ R\cos\alpha + s\cos(\vartheta + \alpha) &= \frac{p\cos\varphi}{1 - e\cos\varphi} \end{aligned} \tag{68}$$

führt auf die obige Form, in welcher

$$\begin{aligned} a &= R^2 + s^2 - p^2 - e^2R^2\cos\alpha^2 - 2peR\cos\alpha - \frac{e^2s^2}{2}, \\ b &= 2Rse^2\sin\alpha\cos\alpha + 2pse\sin\alpha, \\ c &= -2Rse^2\cos\alpha^2 - 2pse\cos\alpha + 2Rs, \\ d &= \frac{e^2s^2}{2}\sin 2\alpha, \\ e &= -\frac{e^2s^2}{2}\cos 2\alpha. \end{aligned} \tag{69}$$

Die Berechnung des Modulus vermittelst dieser Bestimmungen führt auf einen sehr einfachen Ausdruck, und zwar ist der eine Wurzelwert

70)
$$Z' = \frac{R-s}{R+s} \qquad \text{also}$$
$$Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2}$$

und die Integralfunctionen sind demnach

$$\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_1}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2}}+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2^2}}$$
$$+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_3}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3^2}}+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_4}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4^3}}=2K$$

17)
$$\int\sqrt{1-\frac{4Es}{(R+s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_1+\int\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_2$$
$$+\int\sqrt{1-\frac{4Qs}{(R+s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_3+\int\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s^2)}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_4$$
$$=\frac{4R}{e(R+s)}\sin\alpha.$$

Eigentümlich ist, dass in unserm jetzigen Falle der Modulus von keinem Parameter des Kegelschnittes abhängt. Allen Gattungen derselben, also Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln, sofern sie nur in einem Brennpunkt confocal sind, genügt die 1. Integralfunction. Hat demnach der feste Kreis constanten Abstand von diesem Brennpunkt so können die Kegelschnitte alle möglichen Lagen in der Kreisebene und alle möglichen Grössenverhältnisse annehmen. Sie müssen nur in einem ihrer Brennpunkte zusammenfallen.

Man wird bemerken, dass die Landen'sche Substitution eine gute Anwendung auf diesen Fall gibt. Danach ist

$$\sin(\vartheta-\tau)=p\sin\tau, \quad \text{wo} \quad p=\frac{R}{s}$$

und die Function geht über in

$$\int\frac{d\tau_1}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_1^2}}+\int\frac{d\tau_2}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_2^2}}+\int\frac{d\tau_3}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_3^2}}$$
$$+\int\frac{d\tau_4}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_4^2}}=2K$$

in welcher die neuen Amplituden τ_1 etc. die Winkel sind, welche die Strecke R mit den nach den 4 Schnittpunkten gezogenen Brennstrahlen des Kegelschnitts bezüglich einschliessen.

Will man dagegen die Winkel σ einführen, welche die Brennstrahlen mit den Radien s bilden, so ist

$$\sin(\vartheta - \sigma) = p \sin\sigma, \quad \text{wo } p = \frac{s}{R},$$

und man erhält die analoge Function.

Der andere Wert des Modulus ist, wie nach einigen Rechnungen erhellt,

$$Z^2 = \frac{4(R\cos\alpha - c)s\cos\alpha}{((R+s)\cos\alpha - c)^2 - a^2}, \tag{72}$$

wobei man eine Untersuchung über die Verhältnisse anstellen kann, welche aus der Gleichsetzung der beiden Moduln hervorgehen.

Interessant werden die Verhältnisse in dem Fall, dass der Kreis durch den genannten Brennpunkt hindurchgeht. Die Function 2. Art geht dann in einen geometrisch leicht definirbaren Ausdruck über, wenn wir für $\sin\frac{1}{2}\vartheta$ den entsprechenden Wert $\frac{s_1}{2z}$, worin $s_1 s_2 s_3 s_4$ die bezüglichen Sehnen von dem, dem Brennpunkt gegenüberliegenden Kreispunkte nach den Schnittpunkten von Kreis und Kegelschnitt einführen. Nach Feststellung der Vorzeichen finden wir bei der Ellipse und Parabel

$$s_1 + s_2 + s_3 - s_4 = \frac{4s}{e}\sin\alpha, \tag{73}$$

und bei der Hyperbel einen analogen Ausdruck.

Von den mannigfachen Formen, welche die elliptischen Integrale zur Verfügung stellen, wählen wir

$$\frac{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_1 + \Delta\frac{1}{2}\vartheta_2}{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_3 + \Delta\frac{1}{2}\vartheta_4} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3 + \vartheta_4)}$$

und bemerken, dass in dieser und den ihr analogen andern Formen $\Delta\frac{1}{2}\vartheta$ durch Brennstrahlen ersetzt werden kann. Demnach hat man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_3 + \varrho_4} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3 + \vartheta_4)} \\ \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_4} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3 - \vartheta_4)}. \end{aligned}\right. \tag{74}$$

Die Formeln lassen beim Uebergang der Hyperbel in ihre Asymptoten eine Anwendung auf die Geometrie des Kreises zu.

Wir setzen demnach $a = b = c = 0$ und führen ausserdem die

in der Figur 16.) angegebenen Winkel ε ein. Man wird leicht die folgenden Relationen bewahrheiten können

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\cos\varepsilon_3}{\cos\varepsilon_4}, \quad \frac{\varrho_2}{\varrho_3} = \frac{\cos\varepsilon_1}{\cos\varepsilon_2}$$

$$75) \qquad \frac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_4 - \varrho_2} = \frac{\cos\varepsilon_5}{\cos\varepsilon_6}$$

$$\frac{\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_3 - \cos\varepsilon_2\cos\varepsilon_4}{\cos\varepsilon_3\cos\varepsilon_4 - \cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2} = \frac{\cos\varepsilon_5}{\cos\varepsilon_6}.$$

Diesen schliessen sich, wie man leicht finden wird, noch eine zahlreiche Menge anderer an.

Will man noch die Bewegung eines schweren Punktes im Kreise mit den gegebenen Entwickelungen vergleichsweise in Betracht ziehen, so geben dieselben den Fall der vollständigen Umkreisung, da $Z<1$ ist. Die Geschwindigkeitshöhe im tiefsten Punkte des Kreises sei h dann ist $\frac{4Rs}{(R+s)^2} = \frac{2s}{h}$, woraus bei gegebenem s und h R sich berechnen lässt. Die erste Integralfunction kann also durch die zu den Amplituden ϑ etc. gehörigen Zeiten t etc. ersetzt werden und man hat

$$76) \qquad t_1 + t_1 + t_3 + t_4 = 2t,$$

worin t die volle Umlaufszeit bezeichnet.

Es schneidet aber der Brennstrahl ϱ_1 vom Kreise zwei durch die Amplituden ϑ_1 und ϑ_1' bestimmte Bogen ab, für welche nach früherem

$$t_1 + t_1' = t$$

ist. Dasselbe gilt vom Brennstrahl ϱ_2, den bezüglichen Amplituden ϑ_2 und ϑ_2' entspricht die Relation

$$t_2 + t_2' = t$$

Ziehen wir nun die Summe beider oder

$$t_1 + t_2 + t_1' + t_2' = 2t$$

von der obigen 76) ab, so resultirt

$$77) \qquad t_2' - t_3 = t_4 - t_1'.$$

Wie man sofort aus der Figur sieht, entspricht die Zeit $\tau = t_2' - t_3$ einem Bogen, der Kreis zwischen ϑ_3 und ϑ_2' und die Zeit $\tau' = t_4 - t_1'$ entspricht dem Bogen zwischen ϑ_1' und ϑ_4. Sie sind also Bogen gleicher Zeitdauer. Analoge Bogen lassen sich bei weiterer Betrachtung leicht auffinden.

Lässt man die Ellipse und Hyperbel bezüglich in eine Gerade oder 2 sich schneidende Geraden übergehen, so erhält man die bekannten Integralfunctionen des Kreises, deren Sätze durch das Vorstehende wiederum eine Verallgemeinerung erfahren haben.

§. 30.

Die im vorigen § angestellte biquadratische Gleichung gibt in Folge des einfachen Ausdrucks des Modulus ihrer Integralfunction Veranlassung zur Aufstellung einer neuen Function, die wie folgt, gebildet werden kann.

Der genannte Modulus $Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2}$ hängt einzig vom Verhältniss $\frac{R}{s} = x$ ab. Gelingt es demnach, aus den Formeln 69) oder

78)
$$\begin{aligned}
\frac{a}{s^2} &= x^2 + 1 - \frac{p^2}{s^2} - e^2 . x^2 \cos\alpha^2 - \frac{2pe}{s} x \cos\alpha - \frac{e^2}{s^2} \\
\frac{b}{s^2} &= 2xe^2 \sin\alpha\cos\alpha + \frac{2pe}{s} \sin\alpha \\
\frac{c}{s^2} &= -2xe^2 \cos\alpha^2 - \frac{2pe}{s} \cos\alpha + 2x \\
d &= \frac{e^2 s^2}{2} \sin 2\alpha, \quad e = -\frac{e^2 s^2}{2} \cos 2\alpha
\end{aligned}$$

dies Verhältniss x aus den Constanten der Gleichung

79) $$a + b\sin\vartheta + b\cos\vartheta + d\sin 2\vartheta + e\cos 2\vartheta = 0$$

zu entwickeln, so erhalten wir die gesuchte neue Integralfunction.

Man findet leicht

$$b\cos\alpha + c\sin\alpha = 2x\sin\alpha . s^2$$
$$e^2(b\cos\alpha + c\sin\alpha) = 4x\sin\alpha . \sqrt{d^2 + e^2}$$

worin
$$\sqrt{d^2 + e^2} = \frac{e^2 s^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{d}{e}.$$

Die erste Relation für a geht nun über in

$$\frac{a}{s^2} = x^2 + 1 - \frac{\left(\frac{b}{s^2} - xe^2\sin 2\alpha\right)^2}{4e^2\sin\alpha^2} - e^2x^2\cos\alpha^2 - 2ex\cos\alpha \frac{\left(\frac{b^2}{s^2} - xe^2\sin 2\alpha\right)}{2e\sin\alpha} - \frac{e^2}{2}$$

Dieselbe geht bei Benutzung von

$$\cot\alpha = \cot 2\alpha + \sqrt{1+\cot 2\alpha^2}$$

$$\cot\alpha = -\frac{e+\sqrt{d^2+e^2}}{d}$$

$$\sin\alpha^2 = \frac{d^2}{2(d^2+e^2-2e\sqrt{d^2+e^2})}$$

schliesslich über in die Gleichung

$$x^2 - 2d\frac{\left(a\sqrt{d^2+e^2}+\frac{b^2}{4}\frac{(d^2+e^2-2e\sqrt{d^2+e^2})}{d^2}+d^2+e^2\right)}{\sqrt{d^2+e^2}(cd-be+b\sqrt{d^2+e^2})}x+1=0$$

wofür wir setzen

$$x^2-2nx+1=0 \qquad \text{woraus}$$

$$x = n+\sqrt{n^2-1} = \frac{R}{s}.$$

Da aber

$$Z' = \frac{\frac{R}{s}-1}{\frac{R}{s}+1}$$

ist, so folgt auch

$$Z' = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \qquad \text{oder}$$

$$Z'^2 = \frac{n-1}{n+1}.$$

Demnach geht der letzte Ausdruck bei Einführung des Wertes für n nach einigen Transformationen über in

$$80)\quad Z'^2 = \frac{(4a-c)d^2-2be(b-2d)+(b-2d)^2\sqrt{d^2+e^2}}{4(a+c)d^2-2be(b+2d)+(b+2d)^2\sqrt{c^2+e^2}}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Zieht man indessen vor, den Modulus $Z^2 = 1 - Z'^2$ durch die Constanten der aus 79) hervorgehenden Gleichung

$$81)\quad (a-c+e)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4+2(b-2d)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3+2(a-3e)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2 \\ +2(b+2d)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta+a+c+e=0$$

oder aus

$$82)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4 - A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3+B\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2-C\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta+D=0$$

zu bestimmen, so findet man

$$83)\quad Z'^2 = \frac{(A-C)^2(7+B-D)-4A(A+C)(1-B+D) + 4A^2\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}{(A-C)^2(-1+B+7D)-4C(A+C)(1-B+D) + 4C^2\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}$$

und es ist hierfür

$$\int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2}} + \int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2^2}} + \text{etc.} = 2K \quad \text{oder} \quad K.$$

Zur Entwickelung der Integralfunction 2. Art gehen wir auf

$$\Sigma \int \sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}\, d\tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{4R}{e(R+\varepsilon)} \sin\alpha$$

zurück, worin noch die Constante zu bestimmen ist. Man findet bei Benutzung der obigen Relationen

$$84)\quad \int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_1 + \int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_2 + \text{etc.}$$
$$= Z\sqrt{\frac{d}{2\sqrt{d^2+e^2}}\cdot\frac{cd-be+b\sqrt{d^2+e^2}}{d^2+e^2-2e\sqrt{d^2+e^2}}}.$$

Man erhält z. B. für

$$\operatorname{tg}\varphi^4 - 25\operatorname{tg}\varphi^2 + 60\operatorname{tg}\varphi - 36 = 0$$
$$Z'^2 = \frac{9}{20\sqrt{46}-119}$$

und es ist

$$F_1 + F_2 + F_3 - F_4 = K.$$

Auch die neue Integralfunctionen kann erfolgreich auf Beispiele wie in den früheren §§ angewandt werden. Man wird manches Uebereinstimmende finden.

§ 31.

Anwendung der Integralfunctionen auf die Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen.

Wir bemerken vorab, dass die Formeln in § 21. und analog die im letzten Abschnitt aufgestellten eine Auflösung dieser Gleichungen durch geometrische Construction enthalten, da ja die Ausdrücke $\frac{R}{\varepsilon}$, $\frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}2\alpha$ etc. durch die Constanten der Gleichungen bestimmbar sind, wodurch die Unbekannten durch die Winkel ϑ ihre geometrische Deutung und durch Construction eines Kegelschnitts und Kreises ihre definitive Lösung erhalten.

Man kann dabei einige Modificationen der Curven eintreten lassen, um die Formeln zu vereinfachen. In der Abhandlung: Geometrische Untersuchungen etc. haben wir eine geometrische Auflösung der reducirten Gleichungen dieser Art gegeben, welche in bestimmten leicht angebbaren Fällen beispielsweise auf eine gleichseitige Hyperbel führt, welche besonders für die kubische Gleichung $x^3+3x+29=0$ eine elegante Anwendung gestattet.

Eine Untersuchung, ob diese Curve überhaupt für den 3. und 4. Grad einer Gleichung brauchbar ist, würde sich demnach mit der Gleichung

$$\frac{c^2}{b^2}=(A+C)\frac{(A-C)^2+(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})^2}{Z^2(A-C)(C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}))}$$

zu beschäftigen haben.

Die Substitution $\operatorname{tg}\varphi=y\operatorname{tg}\psi$ führt bei der Annahme einer gleichseitigen Hyperbel, worin $\frac{c^2}{b^2}=-2$ ist, auf die Bedingungsgleichung

$$(A+C)(1-B+D)+2(A-C)(D-1)=0,$$

das ist auch

$$Ay^6+(AB-3C)y^4+(BC-3AD)y^2+CD=0,$$

deren Betrachtung hier indes zuweit führen würde.

In analoger Art kann, wie schon früher erwähnt, die Gleichung $\operatorname{tg}\varphi^4-A\operatorname{tg}\varphi^3$ etc, deren Modulus aus

$$Z'^2=\frac{A^2+2(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}$$

bekannt ist, durch Einführung von $\operatorname{tg}\varphi=y\operatorname{tg}\varphi$ so modificirt werden, dass hierfür ein bestimmtes Z hervorgeht.

Man erhält dann aus der letzten Formel

$$\begin{aligned}&A(A^3-4AB+8C)y^8+4(1+Z'^2)(A^2D-C^2)y^6\\&+2Z'^2(2A^2BD-A^2C^2+2BC^2-8ACD)y^4\\&-4Z'^2(1+Z'^2)(A^2D-C^2)D.y^2+Z'^4C(C^3-4BCD+AD^2)=0,\end{aligned}$$

woraus man ersieht, dass y durch eine Gleichung 4. Grades bestimmt werden muss.

Setzt man z. B. $Z'^2=\frac{1}{2}$ und eine reducirte Gleichung 4. Grades voraus, so würde die Bedingungsgleichung

$$y^6 - \tfrac{1}{2}By^4 - \frac{D}{2}y^2 + \frac{4BD - C^2}{24} = 0$$

auf die Lemniskatenbogen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2K$$

führen.

Die Annahme $Z = 0$ oder $Z = 1$ führt auf analoge Gleichungen.

Die Integralfunctionen lassen sich nun in folgender Art zur Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen verwenden.

Wir wollen indes hier reducirte mit reellen Wurzeln voraussetzen, um auf dieselben die genannten Functionen und ihre Reihenentwickelungen mit grösserer Einfachheit anwenden zu können.

Wie wir nachgewiesen, ist für die vollständige kubische Gleichung

$$\text{85)} \qquad \operatorname{tg}\varphi^3 - A\operatorname{tg}\varphi^2 + B\operatorname{tg}\varphi - C = 0$$

der Modulus der hierauf bezüglichen Integralfunction

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - Z^2 \sin^2\varphi_1{}^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi_2{}^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi_3{}^2}} = K$$

durch

$$Z'^2 = \frac{1}{B^2 + 2C(-A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + (1-B)^2})} = 1 - Z^2$$

ausgedrückt.

So ist z. B. für $\operatorname{tg}\varphi^3 - \frac{3}{2}\operatorname{tg}\varphi^2 + \frac{1}{2} = 0$. $Z^2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$, für $\operatorname{tg}\varphi^3 - 3\operatorname{tg}\varphi + 2 = 0$, $Z^2 = \dfrac{16 + 8\sqrt{5}}{17 + 8\sqrt{4}}$.

Aus 85) folgt aber

$$\text{86)} \quad ((A-C)^2 + (1-B)^2)\sin 2\varphi^3 - (2A(1+B) + 2C(-3+B))\sin 2\varphi^2 + 4(AC+B)\sin 2\varphi + 8c = 0$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nun die bekannten Ausdrücke der symmetrischen Formeln für die Wurzelpotenzen d. i.

$$\Sigma \sin 2\varphi = a, \quad \Sigma \sin 2\varphi^3 = a^3 - 3ab + 3c \quad \text{etc.}$$

leicht finden.

Beachtet man nun, dass in der Reihenentwicklung des unvollständigen elliptischen Integrals 1. Art

$$\text{87)} \quad F(Z, \varphi) = a_0\varphi - \tfrac{1}{2}a_2 \sin 2\varphi + \tfrac{1}{4}a_4 \sin 4\varphi - \tfrac{1}{6}a_6 \sin 6\varphi \ldots$$

der Wert von $\sin 2n\varphi$ durch eine nach ungeraden Potenzen von $\sin 2\varphi$ fortschreitende Reihe dargestellt werden kann, so geht die obige Relation über in

$$88)\quad F\varphi = a_0\varphi + \tfrac{1}{2}(-a_2 + a_4 - a_6 \dots)\sin 2\varphi + \left(-\frac{a_4}{4} + \tfrac{2}{3}a_6 - \tfrac{5}{4}a_8 \dots\right)\sin 2\varphi^3 +$$

Da für die 3 Wurzeln drei solcher Formeln existiren, so gibt die Summation derselben bei Berücksichtigung der Relation der Winkelsumme, d. i. von

$$\Sigma\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A - C}{1 - B}$$

die Gleichung

$$89)\quad F\varphi_1 + F\varphi_2 - F\varphi_3 = a_0 \operatorname{arctg}\frac{A-C}{1-B} - \tfrac{1}{2}(a_2 - a_4 + a_6)\,\Sigma \sin 2\varphi$$
$$- \left(\frac{a_4}{4} - \tfrac{2}{3}a_6 + \tfrac{5}{4}a_8 \dots\right)\Sigma \sin 2\varphi^3 \dots$$

worin wir der Unterscheidung wegen bei der Annahme von 2 positiven und einer negativen Wurzel der reducirten Gleichung die Integrale dementsprechend absolut gewählt haben.

Nun ist aber auch

$$F\varphi_1 + F\varphi_2 + F\varphi_3 = K.$$

Die Subtraction beider Ausdrücke führt demnach auf das folgende Resultat

$$90)\quad u = F(\varphi_3) = \tfrac{1}{2}K - \tfrac{1}{2}a_2 \operatorname{arctg}\frac{A-C}{1-B} + \tfrac{1}{4}(a_2 - a_4 + a_6)P_1$$
$$+ \left(\frac{a_4}{4} - \tfrac{2}{3}a_6 + \tfrac{5}{4}a_8 \dots\right)P_3 \dots$$

in Folge dessen das elliptische Integral linker Hand durch bekannte Relationen desselben und durch die Constanten der Gleichung berechnet werden kann.

Die Amplitude folgt dann auf bekannte Weise aus einer Formel der elliptischen Functionen, d. i. aus

$$91)\quad \sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi_3^2} = \sqrt{Z'}\,\frac{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + \dots}{1 - 2q\cos\frac{\pi\pi}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - \dots}.$$

Aus der Amplitude folgt dann von selbst der Wert der entsprechenden Wurzel. Damit ist wenigstens theoretisch die Möglichkeit der Bestimmung derselben vermittelst der Integralfunctionen nach-

gewiesen, wenn auch praktisch in Folge gewisser Convergenzbedingungen die Methode keine Anwendung finden sollte.

Es ist nicht gerade notwendig, dass die Gleichungen zuerst reducirt werden müssen, es genügt, durch eine Transformation eine negative und zwei positive Wurzeln zu erhalten. In Bezug auf den oben angegebenen Ausdruck für den Modulus kann derselbe auch nötigenfalls durch einen andern ersetzt werden.

So besitzt z. B. die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi^3 - 2\operatorname{tg}\varphi^2 - 5\operatorname{tg}\varphi + 6 = 0$$

2 positive und 1 negative Wurzel.

Legt man die Formel

$$Z'^2 = \frac{A^2 + 2(1-B \pm \sqrt{(A-C)^2 + (1-B)^2})}{C^2}, \quad \Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi^2}} = 2K$$

zu Grunde, so resultirt

$$Z' = 1 \quad \text{also} \quad Z = 0.$$

Benutzt man dagegen die Formel

$$\nu'^2 = \frac{1}{B^2 + 2C(-A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + (1-B)^2})}, \quad \Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi^2}} = K$$

so kommt

$$\nu'^2 = \frac{1}{241} \quad \text{also} \quad \nu^2 = \frac{240}{241}.$$

Für den ersten als einfachern Fall besteht demnach die Relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 180^0$$

und da

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = \operatorname{arc\,tg} \frac{A-C}{1-B} = \operatorname{arc\,tg} \tfrac{4}{3} \quad (\varphi \text{ absolut})$$

so erhält man sofort eine Wurzel aus

$$2\varphi_3 = 180^0 - \operatorname{arc\,tg} \tfrac{4}{3}$$

nämlich

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \tfrac{4}{3} = 2, \quad \text{d. i.} \; = -2,$$

wie man leicht findet.

Um nach der entwickelten Methode die biquadratische Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi^4 - A\operatorname{tg}\varphi^3 + B\operatorname{tg}\varphi^2 - C\operatorname{tg}\varphi + D = 0 \tag{92}$$

aufzulösen, transformire man dieselbe mittelst einer linearen Variation

in eine andere, in welcher 2 positive und 2 negative Wurzeln vorkommen. Aus der Formel

$$93)\quad Z'^2 = \frac{A^2+2(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})},$$

erhält man dann den Modulus der Integralfunctionen

$$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1^2}}+\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^2}}+\int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3^2}}$$
$$+\int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4^2}} = 2K$$

$$94)\quad \int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1^2}d\varphi_1+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^2}d\varphi_2+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3^2}d\varphi_3$$
$$+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4^2}d\varphi_4$$
$$= 2E+Z^2\sqrt{\frac{C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{(A+C)^2+(1-B+D)^2}}$$

Nach den gegebenen Formeln hat man nun zunächst

$$95)\quad F\varphi_1 = a_0\varphi_1+\tfrac{1}{2}(-a_2+a_4\ldots)\sin 2\varphi_1+\left(-\frac{a_4}{4}+\tfrac{1}{3}a_6\ldots\right)\sin 2\varphi_1^3$$

addirt man zu dieser die ihr entsprechenden 3 andern, so resultirt wenn F und φ absolut genommen wird

$$96)\quad F\varphi_1+F\varphi_2-F\varphi_3-F\varphi_4 = a_0\Sigma\varphi+\tfrac{1}{2}(-a\ldots)\Sigma\sin 2\varphi_1$$
$$+\left(-\frac{a_4}{4}\ldots\right)\Sigma\sin 2\varphi_3^3 = 2L$$

und da

$$F\varphi_1+F\varphi_2+F\varphi_3+F\varphi_4 = 2K,$$

so erhält man durch Addition oder Subtraction die Beziehungen

$$97)\quad \begin{aligned} F\varphi_1+F\varphi_2 &= K+L \\ F\varphi_3+F\varphi_4 &= K-L \end{aligned}$$

und da $K\pm L$ bekannt ist, indem $\Sigma\sin 2\varphi$ etc. $\Sigma\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A-C}{1-B+D}$ aus der Gleichung 92) berechnet werden können, so ist in

$$F\varphi_1+F\varphi_2 = F\sigma = u$$

die Amplitude σ gemäss 91) bekannt, welche bekanntlich mit der Fundamentalformel

$$98)\quad \cos\sigma = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\sigma)$$

zusammenhängt.

Wegen

$$E(\varphi) = b_0\varphi + \tfrac{1}{2} b_2 \sin 2\varphi - \tfrac{1}{4}\varphi b_4 \sin 4\varphi \ldots \tag{99}$$

ist demnach auch

$$E\varphi_1 + E\varphi_2 - E\varphi_3 - E\varphi_4 = b_0 \Sigma\varphi + \tfrac{1}{2}(b_2 - b_4 \ldots) \Sigma \sin 2\varphi_1$$
$$+ \tfrac{1}{12}(3b_4 - b_8 b_6 \ldots) \Sigma \sin 2\varphi^3 \ldots = 2M$$

100)

$$E\varphi_1 + E\varphi_2 + E\varphi_3 + E\varphi_4 = 2E + \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{AD - C^2}{Z'^2 - D}}$$

woraus

$$v = E\varphi_1 + E\varphi_2 = E + M + \frac{1}{2Z}\sqrt{\frac{A^2D - C^2}{Z'^2 - D}} = E\sigma + Z^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\sigma$$

101)

$$E\varphi_3 + E\varphi_4 = E - M + \frac{1}{2Z}\sqrt{\frac{A^2D - C^2}{Z'^2 - D}},$$

Hieraus folgt

$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \frac{v - E\sigma}{Z^2 \sin\sigma},$$

und demnach aus 98)

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \cos\sigma + \frac{v - E\sigma}{Z^2 \sin\sigma} \Delta(\sigma).$$

Die Wurzeln $\varphi_1 \varphi_2$ gehen daher aus den beiden folgenden Gleichungen

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\sigma + \frac{v - E\sigma}{Z^2 \sin\sigma}(\Delta\sigma + 1),$$

102)

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\sigma + \frac{v - E\sigma}{Z^2 \sin\sigma}(\Delta\sigma - 1),$$

hervor, und analog finden sich $\varphi_3 \varphi_4$.

Auch die in § 30) angegebenen Integralfunctionen geben gute Hülfsmittel zur Bestimmung der Wurzeln.

Will man die Potenzreihe

$$\sin\varphi \cos\varphi = u - \frac{4 + Z^2}{1.2.3} u^3 + \frac{16 + 44Z^2 + Z^4}{1.2.3.4.5} u^5 \ldots \tag{103}$$

für kubische Gleichungen benutzen, so folgt durch Umkehrung

$$u = \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{4 + Z^2}{48} \sin 2\varphi^3 + \frac{144 + 36Z^2 + 9k^4}{3840} \sin 2\varphi^5 \ldots \tag{104}$$

Aus

$$\operatorname{tg}\varphi^3 - a\operatorname{tg}\varphi^2 + b\operatorname{tg}\varphi - c = 0$$

folgt aber

$$\sin 2\varphi^3((a-c)^2+(1-b)^2) - \sin 2\varphi^2(2ab+2a-6c+2bc)$$
$$+\sin 2\varphi(4b+4ac) - 8c = 0.$$

Unter Voraussetzung der Convergenz der obigen Reihe hat man

$$105)\quad u_1+u_2-u_3 = \tfrac{1}{2}\Sigma\sin 2\varphi + \frac{4+Z^2}{48}\Sigma\sin 2\varphi^3$$
$$+\frac{144+36Z^2+9Z^4}{3840}\Sigma\sin 2\varphi^5 \ldots$$

worin die $\Sigma\sin 2\varphi^n$ aus der Sinusgleichung bestimmt werden können.

In Verbindung mit der Relation $u_1+u_2+u_3 = K$ erhält man also u_3 und damit die Amplitude φ. Diese Ableitung ist aber wegen der schwachen Convergenz dieser Reihen nur formell interessant, gleichwol besitzt sie und die vorhin gegebene immer noch einen theoretischen Wert. Wenn die Reihenentwickelungen der elliptischen Integrale eine stärkere Convergenz besässen, so würde dies auch mit den oben abgeleiteten der Fall sein.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 4.

I. C. Ba

Lösung

ti

Fig. 11.

Fig. 14.

Fig. 15.

J. Bartl.

Teil: I.

Taf. III.

Fig

VIII. Greiner: Eigenschaften der Punkte mit reciproken Dreieckscoordinaten.

Fig. 4.

VII. Laue

Fig. 3.

5.'

2'

5°

3.

4°

Fig. 6.

1.

3.

1'.

1.

1."

2.

VI. Pira

Fig. 11.

Taf. VII.

x

A_3 P_3 x_3

tegral

ig.1

ig.

Taf. IX.

Fig. 12.

Fig. 14.

s_4 s_1 α_1 s_2 R' s_3 b

Fig. 16.

ε_3 ϱ_4 ϱ_1 ε_6 ε_5 ϱ_2 ϱ_3 ε_4 ε_1 ε_2

Litterarischer Bericht.

I.

Methode und Principien.

Unsere Naturerkenntniss, Beiträge zu einer Theorie der Mathematik und Physik. Von Dr. K. Kroman, Docenten der Philosophie a. d. Universität zu Kopenhagen. Von der Kön. Dän. Akademie der Wissenschaften mit der goldnen Medaille gekrönte Preisschrift. Ins Deutsche übersetzt unter Mitwirkung des Verfassers von Dr. R. von Fischer-Benzon. Kopenhagen 1883. Andr. Fred. Höst u. Sohn. 458 S.

Das Buch zeigt zwei wertvolle Eigenschaften: es gibt Zeugniss von der vortrefflichen Gabe des Verfassers zu exemplificiren und von dem ernsten Willen unparteiliche Kritik zu üben. Es ist seine mit Glück und Geschick angewandte Methode, an einem Beispiel die Entstehung des Triebes, die Forderungen und Elemente der Erkenntniss aufzuweisen und zu entfalten und demgemäss auch immer ein Beispiel zu wählen, in dem sich alles repräsentirt findet, welche ihm soviel Beistimmung und das Lob erworben hat, dass man bei ihm stets deutlich sehe, was er wolle. Und die Kritik betreffend ist anzuerkennen, dass sie seine höchste Autorität, Kant, nicht schont, seine Lehren in Zweifel zieht und sich nie auf solche beruft. Doch ist er weit entfernt unabhängig von seiner Autorität zu beobachten und zu denken: Kant's Schwächen sind auch die seinen, und ein Fortschritt in der Auffassung wird nicht gewonnen. Wir sind daher in dem Falle, indem wir gegen den Verfasser sprechen, im Grunde nur Kant zu treffen.

Wir beginnen mit den Worten auf dem Titel: „Theorie der Mathematik und Physik“. Was kann damit gemeint sein? Bedarf die Mathematik, die selbst Theorie ist, und die Physik, die sich ihre Theorie ausbildet, noch einer Theorie ausser sich? Das hiesse doch, ein Futteral um ein Futteral, ein Gehäuse um ein Schneckenhaus. Wir würden es niemandem verdenken, wenn er dabei an eine bequeme Handhabe für Unkundige dächte, wodurch man auch ohne Studium der Gegenstände über die Wissenschaften urteilen könnte. Doch lässt sich auch eine mehr auf Wahrheit gerichtete Bestimmung denken, wenn man annimmt, dass nur die Bezeichnung verfehlt ist. Was die Theorie zu untersuchen übrig lässt, ist die psychische Genesis des Erkennens, welches zur Theorie führt. Beide Auslegungen sind auch in Anbetracht der Ausführung nicht ganz ohne Grund.

Als Resultat einer einleitenden Betrachtung wird der, auch im Folgenden beibehaltene, nie verbesserte Satz aufgestellt, das Ziel des Erkenntnisstriebes sei, ein alles umfassendes System von einleuchtend richtigen und allgemeinen Behauptungen oder Urteilen zu bilden. In der Tat mögen Manche, insbesondere Nichtmathematiker bei oberflächlicher Beobachtung dessen, was die Mathematiker treiben, auf die Chimäre fallen, wie sie hier dem Verfasser als Ziel des Erkennens erscheint. Doch könnten wir wol durch den Gang der Wissenschaften hinreichend belehrt sein, dass das Urteil den Erkenntnisstrieb nie zu befriedigen vermag, vielmehr nur eine Stufe auf dem Wege der Erkenntniss ist, die sich der Geist befestigt, sowol um auf derselben momentan zu erkennen, als auch um von ihr aus weiter zu forschen. Schon im gemeinen Leben begegnet man häufig Urteilen, die vollkommen einleuchtend und allgemein, und doch trivial und ohne belehrenden Inhalt sind. Im grossen aber bietet uns die synthetische Geometrie Gelegenheit das Analoge zu beobachten. Sie eröffnet uns ein nach unendlich vielen Richtungen ins unendliche ausgedehntes Feld, auf dem wir beliebig viele exacte, evidente und allgemeine Urteile bilden und in ein System bringen können, ohne in der Erkenntniss einen wesentlichen Schritt weiter zu kommen. Wäre dann ein solches System über alle Gegenstände der Erfahrung und des Denkens ausgedehnt, so würden wir schliesslich so unwissend sein wie zuvor. Die Geometrie zeigt dies mehr als irgend eine andre Wissenschaft, weil wir hier in gleich exacter Form die von den Zielen der Naturwissenschaft geleitete Forschung neben der ziellosen Production an Sätzen zur Vergleichung haben. Welche notwendige Bestimmung der obigen Definition, die augenscheinlich nicht zutrifft, fehlt, hätte der Verfasser an seinem eigenen höchst instructiven Beispiele, aus welchem er die Erkenntnisselemente entwickelt, entdecken müssen, wenn nicht das Kant'sche Gedankengleis seinen Blick be-

schränkt hätte. Er sieht am Wiederbau eines herabgestürzten Altans arbeiten und fragt nach der Sicherheit anderer und zukünftiger Altane gegen das Herabstürzen, nach den Bedingungen der Erscheinung und geht die zu ihrer Untersuchung erforderlichen und aus dieser sich ergebenden Begriffe durch, mit Verweilen beim Causalbegriff. Alle diese Acte weisen, nach eigener Darstellung des Verfassers, auf das gemeinsame Ziel hin, Herr der Tatsache zu werden, die er anfangs leidend erlebte. Er brauchte nur seinem Gedankengang treu zu bleiben, um zu definiren: Das Ziel des Erkenntnisstriebes ist, über die passiv erlebten Tatsachen der Sinnesempfindung Herr zu werden. Das Urteil ist dann das Mittel, welches trotzdem, dass es einleuchtend richtig, allgemein und (wenn wir der Verwirklichung vorauseilen) allumfassend ist, das Ziel verfehlen kann, wo letzteres nicht im Auge behalten wird. Hiervon ist das Folgende ein sehr sprechendes Zeugniss. Der Mangel in der Definition ist nämlich kein bloss formeller, sondern er drückt wirklich den Mangel in der Auffassung des Problems der Philosophie aus, er ist der dauernde Mangel des ganzen Werkes, ein beständiges Hinderniss für den Fortschritt der einzelnen so vortrefflich begonnenen Untersuchungen.

Gehen wir die Einleitung durch, deren 3 Abschnitte sind: das Ziel, die Mittel, die Grundbedingung und Wege des Erkennens — so ist der Hauptgedanke des ersten bereits genannt und sein Resultat für unrichtig erklärt. Von den Mitteln werden aufgewiesen: Wahrnehmung, Gedächtniss, Phantasie und Vernunft. Sie werden für angeborene Vermögen erklärt, wenn sie gleich bei der Geburt in sehr primitiver Form vorhanden sein möchten, auch ihre Scheidung keine definitiv massgebende sei. Der Verfasser würde aber wol weiter einräumen, dass die Aussage: die Vermögen sind angeboren — für die Untersuchung gleichbedeutend ist mit der: ich weiss nicht, wie sie entstanden sind — so dass, wenn jemand zeigte, wie sie entstanden sein können, erstere Behauptung seiner Ansicht n i c h t s entgegen stellt. Nun hätte es aber den Zweck der gegenwärtigen Arbeit bedeutend gefördert, wenn der Verfasser aus jenem Nichtwissen herausgetreten wäre und versucht hätte der Bildung des Vermögens der Wahrnehmung, obwol bloss rational, wo die Beobachtung fehlte, nachzuspüren. Es genügt ihm zu sagen, die Keime der Wahrnehmung müssten im Neugeborenen vorhanden sein, denn es würde durch Licht u. s. w. verschieden erregt. Dies ist an sich ein unberechtigter Analogieschluss. Der Blumenstengel, der sich nach der Sonne kehrt, das Wachs, das in der Wärme erweicht, zeigen auch unterschiedliche Erregung, ohne dass wir ihnen darum auch nur Sinnesempfindung zuschreiben. Doch abgesehen von der Ungewissheit, ob letztere von Anfang existirt, so ist Sinnesempfindung noch kein Vermögen, sondern

ein seelischer Zustand. Erst durch Fixirung der Sinne geht aus dem unterschiedlich erlebten ein eigenes Unterscheiden hervor. Dann wieder ist die Unterscheidung von Sinnesempfindungen noch keine Wahrnehmung. Dazwischen liegt eine Reihe von Transformationen der Vorstellung, die nötig sind um Wahrnehmung von Objecten zu erzeugen, und mit welchen die Entstehung von Ideen — Identität, Raum u. s. w. — verbunden ist, die als Bedingung aller Wahrnehmung vorausgehen. Diese unentbehrlichen Elemente der Logik werden hier unerklärt, ihr Inhalt im Dunkeln gelassen, bloss weil der Verfasser die Frage, ob das Wahrnehmungsvermögen angeboren sei, recht bald mit einem Urteil abschliessen will und dies Urteil für die ganze Leistung hält. Anders verfährt er mit der Causalitätsidee. Obgleich auch hier die ganze Leistung in ein Urteil, den Causalitätssatz: Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen — gelegt wird, so wird im 3. Abschnitt die Entstehung der Idee ausführlich behandelt. Die Gültigkeit des Satzes ist Grundbedingung des Erkennens, muss daher vom Menschen ohne Garantie für die Zukunft angenommen werden. Hier ist einmal die Naturnotwendigkeit richtig aufgefasst, als eine, die dem erkennenden Menschen, nicht der Sache auferlegt ist. Dürfte man nun die ganze Einleitung für eine Orientirungsarbeit ohne den Zweck eines definitiven Urteils ansehen, so würde sie in allen den Punkten, auf welche sich die Orientirung erstreckt, eine vortreffliche Angriffs- und Lehrmethode darbieten; nur würde die notwendige Orientirung noch lange nicht beendet sein. Gerade diese Unvollständigkeit zeigt aber, dass die genetische Betrachtung nur zur Erhärtung einiger Sätze dienen sollte.

Nach der Einleitung beginnt die Schrift unter dem Titel: „Die apriorische Erkenntniss: Die formalen Wissenschaften" — mit einer Kritik der Begriffe Apriori, analytische und synthetische Urteile; ersteres ist vorher erwähnt im Gegensatz von apriorischer und empirischer Wissenschaft, fast nur kenntlich gemacht durch Hinweis auf Mathematik und Physik und wird auch hier nicht näher untersucht, sondern bei Verbindung mit den beiden andern als gültiger Begriff vorausgesetzt. Diese Kritik zeigt durch die unnötigen Schwierigkeiten, mit denen sie sich zu tun macht, den Mangel an Orientirung in ihrer Aufgabe, indem sie sogleich einen definitiven Satz anstrebt. Die erste Frage musste sein: Wo und in welchem Sinne kommen jene Begriffe in Wissenschaften mit Zweck und Erfolg in Anwendung? Was dann nicht zum Zweck gehörte, war so gleichgültig als die Krümmungen der Linien, welche zu einem Beweise ein Dreieck vorstellen sollen. Apriori heisst in exacten Wissenschaften stets, was im Erkennen e i n e r Erfahrung vorhergeht, relativ zu dieser, die es bestätigt. Der Verfasser aber meint ein absolutes Apriori, welches

in jenen nicht vorkommt, und dessen Behauptung nichts bedeutet als Unkenntniss der Erfahrungen, aus denen die Wissenschaft hervorgegangen ist. Diese Discrepanz überspringt er, indem er sich auf die Mathematik beruft. Die Kritik wendet sich gleich anfangs auf die Definition des Gegensatzes zwischen analytischen und synthetischen Urteilen, mit dem Resultate dass jedes Urteil beides ist, und dass jedes Vernunft und Anschauung zugleich bedarf. Hätte sie zuerst nach Zweck und Erfolg dieser Scheidung gefragt, so würde ohne die lange Untersuchung klar geworden sein, dass dieselbe an dieser Stelle überflüssig ist; denn sie hat bei Kant nur zur Formulirung bestreitbarer Urteile, dem Fortschritt der Mathematik überhaupt zu nichts gedient. Glücklicherweise war der Umweg keine Verleitung zum Abweg; denn nun stellt der Verfasser die näher liegende Frage: Wie wird die Mathematik, wie sie factisch vorliegt (statt synthetische Erkenntniss apriori) möglich? Zuerst zeigt er, dass sie weit entfernt ist durch reinen „Syllogismus" zustande zu kommen. Sofern hiermit nur eine verbreitete Meinung widerlegt werden soll, kann man gegen die unfruchtbare Vorführung der syllogistischen Formen nichts einwenden. Nur möchte man doch den gelegentlich in specieller Beziehung getanen Ausspruch: Der Naturforscher wird in dieser Form kaum seinen Gedankengang wiedererkennen; denn das Selbstverständliche wird breit hervorgehoben, und die eigentliche Operation beinahe wie etwas selbstverständliches übergangen — von der ganzen Syllogismenlehre gesagt sein lassen. Indes geht der Verfasser auch im folgenden Abschnitt, der von den Axiomen der Geometrie handelt, nicht über die Satzungen der formellen Logik, die er nun einmal für die einzigen Wege des Erkennens hält, hinaus. „Unmittelbare Beurteilungen" und „Inductionsschlüsse" sind das Einzige, was er zur Erklärung der Axiome aufbringt, worüber er sich aber mit vielen Worten ohne klares Ergebniss und mit vielen Abschweifen auslässt. Dass erstere nichts sind als Behauptungen ohne Bewusstsein des Grundes, daher auch ohne Controle, wird nicht an den Tag gelegt. In letztern wird der Induction eine unrechte Bestimmung zuerteilt. Der Verfasser hat keine Ahnung davon, dass die Gewissheit durch das theoretische Gelingen bedingt ist, mit der Ausdehnung der Theorie wächst und unumstösslich wird, sobald die vollendete Tatsache geistiger und materieller Früchte, welche den Aufwand an Anstrengungen tausendfach überstiegen haben, so wie andrerseits die Aussichtslosigkeit ein gleich brauchbares System zu schaffen, dem Zweifel allen Boden entzogen haben. Daher hat auch der Begriff der Hypothese bei ihm keine Stelle und wird bei Erklärung der Axiome gar nicht genannt. Er kennt nur die Sicherung durch den Unterbau, die natürlich immer precärer wird, je höher man baut, da immer mehr fehlbare Elemente hinzukommen.

Mit so ungenügender Auffassung des Zieles und der Mittel der empirischen Erkenntniss wird nun der folgende Abschnitt unter dem Titel der letztern angegriffen und in der Tat bei Besprechung der zwei ersten Themata, welche ziemlich im alten Gleise verläuft, nichts nennenswertes zutage gefördert. Das dritte Thema, Gebiet des Causalgesetzes, erregt gute Erwartungen. Es handelt sich um die Frage, ob das Causalgesetz Beschränkungen habe. Ohne vorher sich darum zu kümmern, welche Beschränkungen der wissenschaftliche Gebrauch des Causalbegriffs schon an sich enthält, dass z. B. nicht der Ortsänderung, sondern der Geschwindigkeitsänderung Ursache zugeschrieben wird, bespricht der Verfasser zwei Punkte, in welchen er fremde Ansichten zu widerlegen sucht, nämlich erstens die, dass die Causalität keine „objective" Gültigkeit habe, zweitens die, dass sie auf die anorganische Natur beschränkt sei. Er tritt Kant und Mill entgegen, aber nur mit neu erdachten Auskünften, während er die Befangenheit in der Auffassung mit ihnen teilt. Die Objectivität bleibt für ihn immer ein Jenseit; nur meint er dem Glauben an ein solches dadurch zu entgehen, dass er es als Hypothese einführt, die zur Erklärung der Idee notwendig wäre. Zur Erklärung der ideellen Causalität also will er eine problematische gleiche Idee anwenden. Das heisst doch, den Spuk eines mythischen Kobolds durch Fiction eines wirklichen Kobolds erklären! In solche Confusion und Verwirrung kann ein aufrichtig forschender Geist geraten, wenn er es verschmäht, die Dinge, über die er urteilen will, speciell anzusehen, und sich damit begnügt, sie unter die Kritik vorgefasster, uncontrolirter Begriffe (sogen. reiner Vernunft) zu bringen. Hätte der Verfasser, ehe er an eine Frage über Objectivität gieng, sich die Bedingungen der Idee der Objectivität klar gemacht, so würde sich der fatale Dualismus des Gedachten und Seienden in den blossen Unterschied des zeitweilig Unvollkommenen und des angestrebten Vollkommenen aufgelöst haben. Gleich unvorbereitet tritt er an die zweite Frage, ob der Mensch freien Willen, d. h. die Fähigkeit neue Causalketten anzufangen habe. Die entgegengesetzte Ansicht, dass nämlich alle Vorgänge, einschliesslich menschliche Handlungen determinirt seien, betrachtet er ohne alle Untersuchung und Charakterisirung als eine einheitliche. Er fragt nicht danach, w a s die Causalität eigentlich verbindet, und was sie undeterminirt lässt. Es entgeht ihm also, dass die Causalverbindung allein das Succedirende berührt, mithin die gesamte gleichzeitige Welt, bei aller Zurückführung auf vorausgehende Zustände, nicht verbinden kann, und dass es gerade dieses grosse Bereich ihr gegenüber zufällig neben einander gehender Teile ist, in welchem der Mensch frei combinirend eine Zweckverbindung herstellt, die mit der Causalität nicht concurrirt, sondern stets ihrer Hülfe bedarf, sofern der Zweck auf die Zukunft

gerichtet ist. Das stärkste Argument für die Willensfreiheit scheint dem Verfasser die Verantwortlichkeit zu sein. Er glaubt auch dieses entkräftet zu haben, mit wie vielfacher intellectueller Einbusse lassen wir dahingestellt. Es gibt stärkere und der exacten Betrachtung näher liegende Argumente. Wie will der Verfasser die Entstehung eines Artefacts, z. B. einer Uhr, durch blosse Kräfte ohne freie Combination erklären? wie den Widerspruch heben, den eine Wette darbietet, in der bei vollkommener Determination die Parteien sich gegenseitig besiegen müssten? Allgemein gefasst liegt das Hauptargument für die Willensfreiheit in der Ueberlegenheit, die das Wissen dem Subject über das Object verleiht; diese kann logischerweise nicht gegenseitig, also der Wissende nicht determinirt sein. Hierbei tritt es recht deutlich hervor, wie unzureichend die umfängliche Definition des Erkenntnisszieles ist; über einander urteilen können Gegner ohne logischen Widerspruch. Daher konnte der Verfasser bei seiner Auffassung die in Rede stehende Frage nicht zur Entscheidung bringen. Was in der gesamten Betrachtung des vorliegenden Abschnitts noch am meisten auf das Wesen der Sache gerichtet ist, ist die Auseinandersetzung, welche zeigt, wie das Gebiet möglicher Willensacte sich mehr und mehr beschränken lässt; nur hätte sie weiter geführt werden müssen, um die Erklärungen zu erreichen, die bereits von andern Autoren gegeben worden sind.

Es folgen noch die Abschnitte: der Causalzusammenhang, die physischen Grundsätze, die physischen Lehrsätze, die physischen Grungbegriffe, Zeit und Raum. Sie würden nur zur Wiederholung des Gesagten veranlassen. Hoppe.

Logik. Eine Untersuchung der Principien der Erkenntniss und der Methoden wissenschaftlicher Forschung. Von Wilhelm Wundt. Zwei Bände. Zweiter Band. Methodenlehre. Stuttgart 1883. Ferdinand Enke. 620 S.

Diese Methodenlehre hat es nur mit vorgefundenem Stoff zu tun. Die Behandlungsweise ist fast ausschliesslich beschreibend; die einzigen dabei geübten logischen Tätigkeiten sind Scheidung und Ordnung. Der Name „Untersuchung“ für das Werk ist gänzlich unzutreffend. Es wird weder die psychische Genesis der Methoden untersucht, noch von irgend einem Standpunkte die Notwendigkeit der Fortentwickelung in ihrer actuellen Gestalt ans Licht gestellt. Ein gewisses Eingehen auf Gegenstand und Inhalt der einzelnen Wissenschaften war unvermeidlich um über den Sinn der Methoden Rechenschaft zu geben. Ein tieferes Eingehen würde erforderlich gewesen sein, wenn die vorkommenden Urteile hinreichend motivirt erscheinen

sollten. Der Grund, warum der Verfasser, dem augenscheinlich nicht der Sinn für reifere und mehr einheitliche Auffassung abgieng, es bei dieser indifferenten Behandlungsweise bewenden liess, liegt wol in der überwältigenden Arbeit, welche die hier zum Abschluss gebrachten Vorstudien für künftige definitive Gestaltung ihm auferlegten. Es ist anerkennenswert, dass hier der Logik die Beobachtung der actuellen Geisteswerke zugrunde gelegt wird, während meistens eine aprioristische, d. h. auf eingewurzelten, nie controlirten Grundsätzen beruhende Kritik ohne genaue Kenntniss des Wesens der Methoden über dieselben abspricht. Die Abschnitte des Buches sind: Allgemeine Methodenlehre, insbesondere die Methoden der Untersuchung, die Formen der systematischen Darstellung; von der Logik der Mathematik, die arithmetischen, die geometrischen Methoden, der Functionsbegriff und die Infinitesinalmethode; von der Logik der Naturwissenschaften, insbesondere die allgemeinen Grundlagen der Naturforschung, die Logik der Physik, der Chemie, der Biologie; von der Logik der Geisteswissenschaften, insbesondere die allgemeinen Grundlagen der Geisteswissenschaften, die Logik der Geschichtswissenschaften, die Logik der Gesellschaftswissenschaften, die Methoden der Philosophie. Hoppe.

Kritische Bemerkungen zur Einführung in die Anfangsgründe der géométrie descriptive. Von Franz Tilšer, Professor an der k. k. böhm. technischen Hochschule in Prag, Reichsraths-Abgeordneter etc. Erstes Heft. Mit einer lithographirten Tafel. Wien 1883. Alfred Hölder. 96 S.

Aus einem 44 Seiten langem Vorwort, welches sich in lauter Allgemeinheiten ohne Charakterisirung mit beständigen Wiederholungen ergeht, ist, abgesehen von einigen Angaben über österreichische Schulen, wenig mehr zu entnehmen, als dass der Unterricht in der „géométrie descriptive“ sehr wichtig sei. Das Vorwort betrachtet Monge's géométrie descriptive und die darstellende Geometrie als zwei verschiedene Doctrinen und preist erstere als Grundlage aller menschlichen Cultur an. Was den Unterschied machen soll, erfährt der Leser nicht. Auch die Schrift selbst verweilt erst lange bei selbstverständlichen Dingen, bis sie endlich bei Einteilung der Doctrin sich etwas näher auf Besprechung des Inhalts einlässt. Die géom. descr. hat zuerst die Aufgabe die Kenntniss der darzustellenden Gegenstände, welche der Darstellung vorausgehen muss, ohne Bezugnahme auf die Darstellung zuwege zu bringen, dann deren Darstellung, dann ihre Erkennung aus der Darstellung zu lehren; und zwar teilt sich die zweite Aufgabe wieder in die zwei, wirkliche und projectirte Gebilde darzustellen. Von den 3 Aufgaben wird hinsichtlich der De-

sideraten nur die erste, die Morphologie, besprochen. Diese allein ist es also, welche nach Ansicht des Verfassers im heutigen Schulunterricht vernachlässigt wird. Vom actuellen Lehrverfahren ist indes nirgends die Rede, daher der Ausdruck, kritische Bemerkungen, auf dem Titel ganz gegenstandslos. Auch scheint die Voraussetzung obzuwalten, als ob die Schüler der descriptiven Geometrie dieselbe ohne alle Kenntniss der Elementargeometrie begönnen. Denn diese gibt doch ziemlich alles Nötige über die einfachern Raumgebilde. Darüber fehlt indes jede Aeusserung, indem sie einzeln durchgegangen und Zeichen dafür gesetzt werden. Von der ganzen Schrift gilt nur: Parturiunt montes etc. Hoppe.

Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik. Von Dr. Hermann Cohen, ordentlichem Professor der Philosophie an der Universität Marburg. Berlin 1883. Ferd. Dümmler. 162 S.

Der Verfasser spricht über 111 philosophische, insbesondere Logik und Mathematik, sowie Geschichte derselben betreffende Themata, indem er über jedes, ohne Bezugnahme auf die übrigen, sein unmotivirtes Urteil abgibt. Die grossenteils sehr bestreitbaren Urteile sind, da aller Nachweis fehlt, gegen Angriff allein geschützt durch Dunkelheit des Ausdrucks, welche es nicht als lohnend erscheinen lässt, auf eine Wiederlegung einzugehen. Letzteres möchte eher der Fall sein, wenn irgendwo gesagt wäre, was unter dem auf dem Titel genannten „Princip" verstanden werden soll; denn aus den Urteilen über die Methoden lässt sich dies nicht entnehmen. Da nirgends ein Fortschritt oder systematische Ordnung zu entdecken ist, so möchte auch ein Verzeichniss der Themata zwecklos sein. Hoppe.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Untersuchungen im Gebiete linearer Differential-Gleichungen. Von Simon Spitzer. Erstes Heft., Wien 1884. Carl Gerold's S. 60 S.

Das Heft besteht aus 4 Abschnitten. Im ersten wird die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung hergeleitet, deren Speciallösungen die Wurzeln einer gegebenen kubischen Gleichung sind. Die Methode wird an einem Specialfalle gezeigt, dann auf die allgemeine reducirte Gleichung in Anwendung gebracht und die Bedingung aufgestellt, unter der die Differentialgleichung 1. Ordnung ist. Nach

Hermite kann man aus dem Integral einer homogenen linearen Gleichung 2. Ordnung diejenige Gleichung 2. Ordnung finden, deren Speciallösungen Potenzen der Speciallösungen der Urgleichung sind. Hieraus ergibt sich eine Erweiterung der obigen Resultate. Der 2. Abschnitt enthält Bemerkungen über lineare Differentialgleichungen mit linearen Coefficienten, namentlich wenn homogene durch Differentiation und Elimination aus nicht homogenen hervorgehen; der dritte ähnliche Bemerkungen bei gewissen nicht linearen Coefficienten. Im 4. Abschnitt sind die Speciallösungen Differentialquotienten der Speciallösungen gegebener Differentiallösungen. H.

Technik.

Skizze einer Theorie der Elektromotoren und Elektromaschinen. Von Joh. A. Lissner, geprüfter Lehramtscandidat. Wien 1883. Selbstverlag. 58 S.

Diese Skizze soll einer vollständigeren und umfassenderen Bearbeitung der Theorie der Elektromotoren und Elektromaschinen vorausgehen, welche aus den hier angedeuteten Principien die sich ergebenden Schlüsse ziehen und zeigen wird, ob und wieweit die Resultate der Versuche mit denen der Rechnung übereinstimmen. Die Rechnung wird für den Fall durchgeführt, wo die Maschine in permanentem gleichem Gange ist, und zwar wird die vom Strome in der Gesammtschliessung erzeugte und die zur Erzeugung des Stromes aufgewandte Arbeit analytisch dargestellt. Aus der Formel ergibt sich, dass erstere kleiner ist als letztere und zwar um den Betrag, welcher durch die Veränderung des Potentials der Elemente des zweiten Productorteiles aus sich selbst infolge der Steuerungseingriffe repräsentirt wird, nämlich um die Arbeit des Stromes in der Leitung und um die in der Leitung bemerkbare Arbeit. Es wird dann weiter untersucht, nach welchen Principien die Constanten durch Versuche zu bestimmen sind. H.

Zeitschrift des elektrotechnischen Vereines in Wien. Redigirt von Josef Kareis, k. k. österr. Telegraphen-Official. Erster Jahrgang 1883. Wien 1883. R. Spies u. Co.

Jedes der 12 Hefte des Jahrgangs enthält zuerst Vereinsnachrichten, dann Abhandlungen, denen in einigen Vorträge vorhergehen, dann die 9 ersten Ausstellungszeitung. Die Vorträge und Abhandlungen haben grösstenteils Vorrichtungen und Maschinen, teils Pro-

ject, teils local, sowie die Anfertigung zum Gegenstand. Theoretische Vorträge und Aufsätze sind: Stefan: elektrische Kraftübertragung; Dischner: Gegensprechmethode; Waltenhofen: Wirkungsgrad von Motoren; Hissink: telephonische Uebertragung auf grosse Entfernungen; Dvořák: Unhaltbarkeit der Theorie der Spitzenwirkung der Flammen; Granfeld: Erdmagnetismus, Erdströmungen; Reinisch: Beweis des Joule'schen Gesetzes; Jueptner: Einfluss des Magnetismus auf das elektrolytische Verhalten der Metalle; Popper: physikalische Grundlagen der elektrischen Kraftübertragung; Mach: Grundbegriffe der Elektrostatik. Ueber elektrotechnischen Unterricht handelt ein Aufsatz von C. G. S. H.

Kalender für Elektrotechniker. Unter Mitwirkung der Herren Dr. W. A. Nippoldt und Postrath C. Grawinkel herausgegeben von F. Uppenborn, Ingenieur, Redakteur des Centralblattes für Elektrotechnik. Erster Jahrgang 1884. Mit 173 Abbildungen. München und Leipzig 1884. R. Oldenbourg.

Der Kalender enthält zuerst rein mathematische Tabellen und Formeln, dann Formeln nebst Tabellen für Mechanik, Akustik, Optik, Wärmelehre, Magnetismus und Elektricität und für Maschinen, dann für Elektrotechnik, dann gesetzliche Bestimmungen. Dann folgt der Kalender mit Raum für Notizen, zum Schluss Anzeigen. Die Redaction fordert zu Mitteilungen aus eigener Praxis auf.

Vermischte Schriften.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel X. Amsterdam 1884. J. F. Sikken.

Der Inhalt des Bandes ist folgender.

C. L. Landré: Der mittelbare Fehler bei Beobachtungen zur Bestimmung von mehr als einer Unbekannten. — Formeln zur Bestimmung der Verbindung zwischen der Genauigkeit der Sterblichkeitstabellen und der Zahlen für Lebensversicherung. — Ein besonderer Umstand zu beachten bei Zusammenstellung gegebener Zahlen zur Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeit.

L. Janse Bz: Fortsetzung der Beantwortung der Preisfrage (s. litt. B. 276. S. 46).

P. H. Schoute: Ueber eine specielle Raumcurve 7. Grades.

J. De Vries: Ueber lineare partielle Differentialgleicsungen 3. Ordnung mit 3 Variabeln.

A. Benthem Gz: Die Schneckenlinie, Cochleoide.

C. Stolp: Entwickelung von Functionen durch teilweise Integration.

J. Cardinaal: Einige Eigenschaften eines speciellen Systems von Flächen 2. Ordnung. — Einige Eigenschaften von Flächen 2. Grades, die 4 gegebene Linien berühren.

H. J. Krantz: Ueber die Bestimmung der Abwickelung von ebenen Curven.

L. Van Zanten Jzn: Aufgabe (über Hauptträgsaxen eines Vierecks).

N. L. W. A. Gravelaar: Anwendung der Determinanten bei der Methode der kleinsten Quadrate.

F. W. Fischer: Ableitung einer Formel zur Construction der Schattenlinie eines Sonnenzeigers.

W. Kapteyn: Einiges über Integration rationaler Functionen. — Ueber einige Sätze aus der Determinatenlehre.

F. J. van den Berg: Ueber die näherungsweise Rectification des Kreisbogens (Fortsetzung). — Ueber eine unrichtige Ansicht in G. J. Verdam's Handbuch der sphärischen Trigonometrie. — Ueber eine arithmetische Aufgabe.

Es folgt ein nach Gegenständen geordnetes Register über einige mathematische Zeitschriften. H.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXX. 1882—83. Serie terza. Transunti. Volume VII. Roma 1882.

Mathematische Artikel sind folgende im 7. Bande enthalten.

C. Henry: Ueber einige noch nicht herausgegebene Sätze von Fermat.

L. Bianchi: Ueber eine Classe dreifach orthogonaler Flächensysteme.

G. Govi: Ueber die Einwirkung der Temperatur auf die Schallgeschwindigkeit in der Luft und über den Wert dieser Geschwindigkeiten nach Versuchen von G. L. Bianconi, gemacht 1740 in Bologna.

Jung: Neue Sätze zur Ergänzung der Guldin'schen Regel und eine Eigenschaft der Spirale $r = \frac{a}{\vartheta}\sin\vartheta$.

Brioschi: Die algebraischen Relationen zwischen den hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung.

Spottiswoode: Ueber die Invarianten und Covarianten einer durch quadratische Substitution transformirten Function.

Glaser: Verteilung der Masse auf der Oberfläche eines Ellipsoids, derart dass man im Innern des Körpers eine nach Grösse und Richtung gegebene constante Wirkung erhält.

Maisano: Einige Sätze über binäre Formen beliebigen Grades und deren Anwendung auf Untersuchung der mehrfachen Wurzeln der Gleichung 6. Grades.

Besso: Ueber eine hypergeometrische Differentialgleichung.

G. Morera: Ueber das Gleichgewicht der biegsamen und nicht dehnbaren Flächen.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

I.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, d. Physik im J. 1880. Dargest. v. d. physikal. Gesellsch. zu Berlin. 36. J. 2. Abth., enth.: Optik, Wärmelehre, Electricitätslehre. Red. v. Neesen. Berlin, G. Reimer. 17 Mk.

— dass. 3. Abth., enth.: Physik d. Erde. Red. v. B. Schwalbe. Ebd. 10 Mk.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann. 13. Bd. J. 1881. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. 5 Mk.

Sartorius, M., die Entwicklg. d. Astronomie bei den Griechen bis Anaxagoras u. Empedokles, in bes. Anschluss an Theophrast dargestellt. Breslau, Koebner. 1 Mk. 20 Pf.

Weissenborn, H., die irration. Quadratwurzeln bei Archimedes u. Heron. Berlin, Calvary & Co. 3 Mk. 60 Pf.

Methode und Principien.

Cohen, H., das Princip der Infinitesimal-Methode u. seine Geschichte. Berlin, Dümmler. 3 Mk. 60 Pf.

Simony, O., üb. e. Reihe neuer mathemat. Erfahrungssätze. III. (Schluss.) Wien, Gerold's S. 2 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bardey, C., methodisch geordn. Aufgabensammlg., mehr als 8000 Aufgaben enth. über alle Theile der Elementar-Mathematik. 11. Afl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Gauss, F. G., 5stell. logarithm. u. trigonometr. Tafeln. Kleine Ausg. Halle, Strien. 1 Mk. 25 Pf.

Heilermann, H., Sammlg. geometr. Aufgaben. 3. Afl. Essen, Bädeker. 80 Pf.

Kleyer, A., vollst. gelöste Auf.-Sammlg. a. allen Zweigen der Rechenkunst etc. 89—100. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Litterarischer Bericht.

II.

Lehrbücher.

Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. Von Prof. H. Köstler, Oberlehrer am Domgymnasium zu Naumburg a. S. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 1. Heft. Kongruenz. Zweite, teilweise umgearbeitete Auflage. Halle a. S. 1883. Louis Nebert. 64. S.

Von der 1. Auflage des „Leitfadens für den Unterricht in der Geometrie an höheren Lehranstalten", dessen Identität mit dem gegenwärtigen Buche wegen abweichenden Titels fraglich erscheint, ist im 251. litt. Ber. S. 29 nur das 3. Heft besprochen, jedenfalls also der Gegenstand ein anderer. Das 1. Heft hat nun dadurch eine besondere Wichtigkeit, dass es die Grundlegung der geometrischen Begriffe bei Anfängern enthält. Berücksichtigt man, dass der Verfasser sich die grösstmögliche Kürze auferlegt hat, so muss man anerkennen, dass diese mit ausserordentlicher Präcision und in vollkommen genügendem Umfange ausgeführt ist: kein Wort das den Standpunkt der Anfänger überschreitet und keins das auf höherem Standpunkte einer Correction oder Ergänzung bedürfte, kein Umstand ausser Acht gelassen, der zur Bildung richtiger Vorstellungen und Begriffe Erklärung nötig macht. In Anbetracht der tadellosen Genauigkeit und Sorgfalt, die im allgemeinen hier waltet, ist es an seiner Stelle dessen zu erwähnen, was im einzelnen gefehlt ist. Der 1. Grundsatz S. 2 besteht aus 2 Sätzen, die nicht durch „oder", sondern durch „und" zu verbinden waren. Der Satz 39. war vor 38. zu stellen; denn er

erklärt erst die Addition der Winkel. Satz 38. ist, wie er hier steht, eine Tautologie; dass Summe das Ergebniss der Addition ist, soll doch kein Satz über Winkel sein; was aber nicht hätte fehlen sollen, war die geometrische Darstellung der Winkelsumme. Dass der Begriff der Richtung ohne besondere Erklärung aus der gemeinen Vorstellung entlehnt wird, ist zulässig; dass seine Exactstellung durch den Winkel, der den Unterschied der Richtung misst, und der seinerseits durch das Gesetz der Addition zu einem exacten Begriff wird, nicht besonders ausgesprochen ist, mag durch die Kürze der Abfassung des Leitfadens, der vieles dem mündlichen Unterricht überlässt, gerechtfertigt sein. Auf eins nur kommt es unter allen Umständen an: dass der Gebrauch des Begriffes stets exact richtig ist und weder zu falschen Vorstellungen noch zu falschen Consequenzen verleitet. Hiergegen fehlt der dem Parallelensatz 48. beigefügte falsche Beweis. Dessen Unrichtigkeit würde, wie allbekannt, sogleich zutage treten, wenn der Begriff der Richtung definirt wäre, was bei Ausgang von verschiedenen Punkten erst auf Grund des Parallelensatzes möglich ist. Der Begriff der Richtung ist also nur zur Verhüllung eines Betrugs im dunkeln gelassen. Die Berichtigung der Stelle ist leicht. Wo „Beweis" steht, ist statt dessen zu sagen: Der Satz behauptet, dass mit einer Geraden von einem Punkte aus nur eine Gerade in gleicher Richtung gehen kann, was selbstverständlich und keines Beweises fähig ist. Nach Erklärung 3. ist daher der Satz ein Grundsatz. Obgleich diese Erklärung nicht haltbar ist, so kann es genügen, dass nach dieser Correction weder intuitiv noch logisch ein Irrtum herbeigeführt wird. Die Anordnung des Lehrstoffes ist: Linie, Winkel, Dreieck, Viereck, Vieleck, Kreis, Kreis und Polygon, zwei Kreise. Jeder Abschnitt ist mit Uebungen reichlich versehen. Die Zusätze sind von den zur Theorie notwendigen Sätzen getrennt. Die Beweise sind kurz angedeutet, am Schlusse ein ausführlicher Beweis als Muster aufgestellt. Die 2. Auflage unterscheidet sich von der ersten durch Verbesserungen im einzelnen und erhebliche Vermehrungen, ausserdem dadurch, dass die Propädeutik weggefallen und besonders herausgegeben ist. H.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Von Dr. E. Glinzer, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Dritter Theil: Trigonometrie. Mit 118 Figuren und vielen Aufgaben. Hamburg 1883. F. H. Nestler u. Melle. 148 S.

Der 1. Teil, Planimetrie, und der 2. Teil, Stereometrie, sind im 258. und 266. litterarischen Bericht besprochen. Der Lehrgang im 3. Teil ist folgender. In der Einleitung wird die Bedeutung und Auf-

gabe der Trigonometrie, insbesondere hinsichtlich praktischer Zwecke, dargelegt; im 1. Buch die trigonometrischen Functionen spitzer Winkel erklärt, ihre Relationen und die Berechnung einiger Specialwerte gelehrt und für Anwendung von Tafeln ohne Logarithmen, deren Gebrauch hier und im 2. Buch vorausgesetzt wird, Beispiele gegeben; im 2. Buch die theoretischen Aufgaben für das rechtwinklige Dreieck, das Rechteck und Rhombus, das gleichschenklige Dreieck und regelmässige Vieleck gelöst mit Begleitung numerischer Aufgaben; im 3. Buch die Ausdehnung der Functionen auf grössere und negative Winkel gelehrt, und die Logarithmen der Functionen in Anwendung gebracht. Das 4. Buch behandelt die Relationen und Aufgaben am beliebigen Dreieck mit Anwendung auf Viereck und Vieleck; das 5. Buch die goniometrischen Relationen; das 6 Buch ist eine Sammlung technischer Aufgaben, es setzt die Kenntniss technischer Ausdrucksweise, mithin auch die der betreffenden Gegenstände voraus. Das 7. und 8. Buch behandeln das rechtwinklige und das beliebige sphärische Dreieck. Das Princip der Anordnung ist von selbst deutlich und bedarf keiner Motivirung. Die Bestimmung des Buchs für Techniker hat der theoretischen Vollständigkeit keinen Abbruch getan. H.

Lehrbuch der Physik nebst Anleitung zum Experimentiren. Für Präparandenanstalten, höhere Knaben- und Mädchenschulen, sowie für Stadtschulen und mehrklassige Volksschulen bearbeitet von A. P. L. Claussen, Königlichem Seminarlehrer in Bütow. Mit 140 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Potsdam 1883. Aug. Stein. 122 S.

Der Verfasser legt das Hauptgewicht beim physikalischen Unterricht auf das Experimentiren und macht Fertigkeit und Gewandtheit darin zur ersten Forderung für den Lehrer. Zweck des Experimentirens ist ihm die Anschaulichkeit, die Erläuterung der Naturerscheinungen und die Begründung der Naturgesetze. Er befürwortet die Einfachheit, beschränkt das Experimentiren nicht auf den Gebrauch von Apparaten, sondern gibt auch viele Versuche aus freier Hand an. Jede Andeutung derart würde man gern als einen wertvollen Beitrag anerkennen, wenn nur das Bestreben sichtlich wäre die Versuche ausreichend zur Begründung der ganz elementaren Lehren zu machen, die hier vorgetragen werden. Dieser Gesichtspunkt scheint ganz zu fehlen: die Erscheinung muss dartun, was der Lehrer hineinlegen will; eine Frage, was im Gegenfalle erfolgen müsste, wird nie gestellt. Es zeigt sich somit, dass eine weit notwendigere Fähigkeit als die genannte, ohne welche alles Experimentiren nutzlos ist, nicht darum, weil der Verfasser sie für selbstverständlich hielt, son-

dern weil sie ihm selbst so sehr mangelt, unter den Anforderungen an den Lehrer verschwiegen worden ist: nämlich die Fähigkeit sich klar und bestimmt auszudrücken und die Beziehung zwischen Theorie und Erscheinung zu beurteilen. Ein auffallendes Beispiel ist die, ohne Zweifel einer Publication des Breslauer physikalischen Vereins, den der Verfasser seltsamerweise für einen wissenschaftlichen gehalten haben muss, während er nur für Umsturz der wissenschaftlichen Grundlagen agitirt — entlehnte Aufstellung, die Schwerkraft sei keine Eigenschaft des Stoffes, beruhe nicht auf Anziehung der Erde, sei vielmehr „ein Massendruck aus der Ferne“, ausgeübt vom Weltall. Diese Lehre, welche den gesamten Principien der Naturwissenschaft widerstreitet, indem sie Kräfte statuirt, die nicht ihren Sitz in bestimmten materiellen Objecten haben, ist keine blosse beiläufige Notiz, denn sie wird durch angeblich überzeugenden Versuch, den gefühlten Druck eines Steines auf die Hand, unterstützt, und es wird ihr insofern wesentlich Folge gegeben, als ein wichtiger Teil der Theorie der Schwere, die Proportionalität mit der Masse, die Abhängigkeit von der Entfernung, die Erklärung der Schwere durch allgemeine kosmische Attraction u. s. w. den Schülern vorenthalten bleibt, während der übrige Teil in gar keiner verständlichen Gedankenverbindung damit steht; denn bald soll die Schwere Ursache des Drucks, bald nichts weiter als der Druck selbst oder der Druck Ursache der Schwere sein. Solange ein solcher Beweis mangelnder Logik sich vorfindet, möchte es überflüssig sein von verfehltem Ausdruck, der sonst vorkommt, zu reden. Die meisten Sätze sind recht exact aufgestellt, gerade in Punkten wo es häufig nicht geschieht, auch sind die Experimente zur Erläuterung grossenteils passend gewählt; nur lernt man daraus nicht erkennen, was jede beobachtete Erscheinung dartut, und was sie nicht dartun kann: es bleibt stets der Eindruck eigenmächtiger Deutung. Die behandelten Gegenstände sind der Reihe nach: Mechanische Erscheinungen fester, tropfbar flüssiger, luftförmiger Körper; magnetische, elektrische Erscheinungen, Reibungs- und Berührungselektricität; Erscheinungen des Schalles, der Wärme, des Lichtes, Ausbreitung, Zurückwerfung, Brechung, Farbenzerstreuung; die neuesten Erfindungen. H.

Lehrbuch der Geometrie mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Von Dr. Th. Spieker, Professor am Realgymnasium zu Potsdam. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Sechzehnte, verbesserte Auflage. Potsdam 1884. Aug. Stein. 326 S.

Die 6., 8., 13, 14. und 15. Auflage sind im 217., 222., 251., 265. und 268. litt. Bericht besprochen. Die wesentlichsten, verbessernden

Aenderungen sind in der vorigen Auflage vollzogen. Von der gegenwärtigen Auflage erwähnt das Vorwort ausser einer Anzahl Verbesserungen im einzelnen, dass die Quadratur und Rectification des Kreises auf die Grenzmethode gestützt sei. Auf die hiermit gegebene Anregung hin sei darüber bemerkt, dass der keine Schwierigkeit bietende Nachweis des Grenzwerts der eingeschriebenen Polygonfläche bei Verdoppelung der Seitenzahl recht ausführlich dargelegt ist, während über den höchst subtilen entsprechenden Nachweis für den Umfang sehr kurz hinweggegangen wird. Der angebliche „Beweis" deutet im Grunde nur einen, in der Tat sinnreichen Weg an, sich dem Ziele so weit zu nähern, um überblicken zu können, was eigentlich bewiesen werden müsste. Dass der beständig wachsende Umfang einen Grenzwert haben muss, und warum: nämlich weil er kleiner bleibt als der constante Kreis, und warum dieses; dass auch dieser Grenzwert nur gleich oder kleiner sein kann als der Kreis, wird nicht ausgesprochen und würde noch manche Erklärung erfordern. Dass aber der Grenzwert durch eine Linie repräsentirt wird, die im letztern Falle innerhalb des Kreises liegt, wird als selbstverständlich vorausgesetzt und es ist doch, was zu beweisen bleibt. Noch kürzer wird die Annäherung von aussen abgefertigt, überhaupt also desto weniger Erklärung gegeben, je mehr sie von der Sache gefordert wird. Wäre es nicht instructiver, vor aller Kreismessungstheorie den unterscheidenden Umstand zu erörtern, dass die Flächen als Teile von einander dargestellt werden können, die Linien im allgemeinen nicht, so dass die Länge einer krummen Linie nur dadurch bestimmbar ist, dass sie von der Sehnensumme unendlich wenig differirt? H.

Repetitions-Compendium über alle Zweige der Elementar-Mathematik. Für Schüler der obersten Klasse der Gymnasien und Realgymnasien, sowie für Abiturienten, Studirende und Lehrer der Mathematik bearbeitet von F. J. Brockmann, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium in Cleve. Stuttgart 1884. Ferdinand Enke. 180 S.

Das Repetitionscompendium verfolgt, verschieden von dem continuirlich methodischen Fortschritt eines Lehrbuchs, den Zweck, das gesamte auf den Gymnasien zu erwerbende Wissen als ein Fertiges zusammenzustellen. Es umfasst in 5 Capiteln die Algebra und Arithmetik (d. i. Gleichungen und Combinatorik), die Planimetrie, ebene Trigonometrie, Stereometrie und einiges aus der mathematischen Physik, in der Ordnung dass die bedeutenderen Teile, die von grösster Anwendung, vorausgehen, die sporadischen Zweige nachfolgen. Die Anfänge werden teils übergangen, teils, wie in der Trigonometrie, durch Aufstellung der Formeln erledigt. Der Vortrag tritt stets so-

gleich mitten in die Theorie ein. Nach Massgabe ihrer Bedeutung für die Theorie werden alle Lehrgegenstände, Methoden und der Erörterung bedürfende Punkte recht eingehend vom Standpunkte des Lehrers oder reifen Schülers besprochen, dabei jedoch weniger die Bekanntschaft mit herkömmlichen Einführungen als vielmehr die freie Geistesentwickelung vorausgesetzt. Die Darstellungsweise ist einfach und leichtverständlich. Der Stoff ist in keine umfassende, erschöpfende Systematik eingepasst, die Bearbeitung beruht vielmehr auf Auswahl, die gut und ausreichend scheint, wiewol wir darin den Urteilen der Leser nicht vorgreifen dürfen. H.

Elemente der reinen Mechanik als Vorstudium für die analytische und angewandte Mechanik und für die mathematische Physik an Universitäten und technischen Hochschulen sowie zum Selbstunterricht. Von Dr. Jos. Finger, Professor an der k. k. technischen Hochschule und Docent an der k. k. Universität zu Wien. I. Lieferung. Wien 1884. Alfred Hölder. 128 S.

Das Werk soll in 5 oder 6 Lieferungen erscheinen. Es ist charakteristisch für die Bearbeitung, dass der empirische Ursprung der Begriffe, um welche es sich in den Principien der Mechanik handelt, enthüllt und zur Geltung gebracht wird. Die Wichtigkeit der Kenntniss desselben für die Logik der Forschung und der Didaktik ist nicht zu bestreiten. Dass dieser Ursprung in allen Punkten richtig erfasst und ans Licht gestellt ist, und dass sich darin keine blosse Wiedergabe fremder Ideen, sondern der eigene klare Blick des Verfassers kund gibt, ist anzuerkennen. Damit ist freilich der folgende Satz in der Vorrede, der im Gegenteil eine irrige Auffassung ausdrückt und einen Misgriff in der Darstellung erwarten lässt, nicht wol zu vereinen. „Der auf keine Erfahrung gestützte, undefinirbare und ganz und gar unfruchtbare Begriff der absoluten Ruhe und Bewegung wurde vom Verfasser ganz fallen gelassen, und es wird — den Tatsachen entsprechend — eine jede Bewegung stets nur als eine relative Bewegung betrachtet.“ Obgleich diesem nicht miszuverstehenden Grundsatz in der Bearbeitung keine Folge gegeben wird, so verdient er doch an sich eine eingehende Kritik. Undefinirbar ist die absolute Ruhe überhaupt, die absolute Bewegung zunächst rücksichtlich der Zeit- oder Geschwindigkeitseinheit, die völlig willkürlich bleibt. Von dieser Abhängigkeit ist offenbar hier nicht die Rede, und der willkürliche Factor in Linien- und Zeitmass ist wegen Homogeneität aller Gleichungen in Bezug auf dieselben von keinem Einfluss. Hiervon abgesehen ist die absolute Bewegung undefinirbar vom rein geometrischen, nur teilweise vom dynamischen Gesichtspunkt. Die empirischen Gesetze bestimmen die Bewegung bis auf 9 undefinirbare

Constanten, deren 6 die anfängliche Lage, 3 die anfängliche Translation der Körperwelt ausdrücken, vollständig. Hieraus ergibt sich zwar eine Relativität der Bewegung, nämlich zum Anfangszustand: doch pflegt man unter relativer Bewegung nur eine Bewegung des Teils relativ zum Ganzen, nie aber des Ganzen relativ zu einem Anfang zu verstehen, und ersteres kann auch hier nur gemeint sein. Die Bewegung bestimmt sich also empirisch absolut nicht nur unter Voraussetzung einer gegebenen Epoche, sondern auch teilweise unabhängig davon für jeden Zeitpunkt, nämlich nach Unterscheidung von Translation und Rotation, bezüglich auf letztere, die gar keiner Willkür unterliegt. Es würde z. B. den eclatantesten Widerspruch gegen die Wirklichkeit ergeben, wollte man eine als ruhend betrachtete Fundamentalaxe durch Sonnen- und Erdmittelpunkt legen; denn die Erde müsste dann nach der Sonne fallen. Da hiernach die absolute Bewegung ihrem Hauptteile nach massgebend für die Theorie ist, so kann man sie auch nicht schlechthin „fallen lassen"; damit würde eine wesentliche Lücke in der Theorie verbunden sein. Für jede consequente Theorie, nicht etwa bloss für bequemen Ausdruck, ist es notwendig, von der tatsächlich gegebenen relativen zur absoluten Bewegung überzugehen, und um deutlich zu sein, diesen Uebergang ausdrücklich auszusprechen. Dabei ist zu bemerken, dass in den Principien der Mechanik kein Anlass vorkommt das vorausgesetzte ruhende Axensystem zu bestimmen; die Bestimmung bleibt der angewandten Mechanik vorbehalten, welche erst die dazu nötigen Beobachtungsdata dazu bringt.

In dem citirten Satze der Vorrede ist demnach irrig, dass der Begriff absoluter Bewegung „auf keine Erfahrung gestützt", und dass er „unfruchtbar" sei; es ist aber auch ferner ganz unzutreffend, dass der Verfasser ihn habe „fallen lassen". Im Gegenteil vollzieht er schon auf 2. Seite erklärtermassen den Uebergang von der relativen zur absoluten Bewegung durch die Bestimmung, dass das Fundmental-Axensystem beständig dasselbe bleiben, und nur von Ruhe und Bewegung schlechthin die Rede sein soll, wo nicht ausdrücklich eine Relativität zu irgend einer Bewegung angegeben ist. Hiermit wird er in der Tat innerhalb der Grenzen des Buchs, die ja nur die reine Mechanik enthalten, also die Einführung von Datis aus der Wirklichkeit ausschliessen soll, der Forderung gerecht. Denn die Ruhe des Fundamental-Axensystems ist dadurch implicite zur Voraussetzung gemacht. Nun soll aber das Buch Vorstudium auch für die angewandte Mechanik sein, und, wenn dies nicht auf dem Titel stünde, selbstverständlich kann man von der reinen Theorie verlangen, dass sie sich nicht bei Anwendung auf die Wirklichkeit falsch erweist. Da zeigt sich denn doch die vom Verfasser getroffene Auskunft, das

Motiv der Anordnung, die Frage, ob dieselbe notwendig oder willkürlich sei, mit Stillschweigen zu übergehen, durchaus unzulässig. In der Tat ist die Voraussetzung absoluter Ruhe des Fundamental-Axensystems **notwendig**, und bei jeder Anwendung auf die Wirklichkeit muss gefragt werden, ob dasselbe wirklich ruht; denn dadurch ist die Gültigkeit der Resultate reiner Mechanik bedingt, wie z. B. der Fall des Foucault'schen Pendels zeigt. Spätere Bemerkungen scheinen das Versäumte im einzelnen nachholen zu sollen, doch ersetzen können sie es nicht, sie sind an unrechter Stelle angebracht undeutlich und lassen Begründung vermissen.

Die vorliegende Lieferung erstreckt sich auf Statik und Dynamik eines Punktes, woraus zu ersehen, dass zum obersten Einteilungsprincip die Unterscheidung des Kraftobjectes, Punkt und Körper oder Punktsystem, gewählt ist, während die nächste Untereinteilung in Statik und Dynamik wie sonst bestehen bleibt. Der Lehrgang unterscheidet sich nicht wesentlich von dem der gewöhnlichen analytischen Mechanik; wie dieser schreitet er in allgemeinster Form und Auffassung, wiewol mit Bevorzugung graphischer Darstellung fort — man müsste es denn als ein synthetisches Element ansehen, dass die Kräfte in der Ebene den Kräften im Raume vorhergehen. Hervortretend ist dagegen die ungemeine Ausführlichkeit und Gründlichkeit der Darstellung von Gegenständen, die sich nur wenig über die ersten Anfänge erheben. Was man sonst kurz zusammenzufassen pflegt, ist vielfach zerlegt und ausgebreitet. Der in der Dynamik unentbehrliche Grundsatz, dass die relative Wirkung jeder Kraft unabhängig von der Bewegung des Objects ist, ist zum Ausgangspunkt der Statik gemacht und wird beständig angewandt. Er enthält offenbar das Parallelogramm der Kräfte und die gesamte Theorie der Zusammensetzung und Zerlegung der auf einen Punkt wirkenden Kräfte in einen Gedanken zusammengefasst, und es war leicht dieselbe sofort im ganzen daraus herzuleiten. Obwol auch hier die Begründung ganz darauf beruht, so wird doch das Ziel erst nach vielen Betrachtungen erreicht. Einer Rechtfertigung bedarf dies Zuwerkegehen nicht: es richtet sich nach dem besondern Bedürfniss der Lernenden. H.

Sammlungen.

Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, für höhere Schulen. Von Dr. **Hermann Schubert**, Oberlehrer an der Gelehrtenschule des

Johanneums in Hamburg. Erstes Heft: Für mittlere Klassen. Zweites Heft: Für obere Klassen. Potsdam 1883. Aug. Stein. 448 S.

Diese Aufgabensammlung zeichnet sich besonders durch Vielseitigkeit aus. Der Umfang der Operationen, auf deren Einübung sie eingerichtet ist, entspricht den gesetzlichen Anforderungen der Schulexamina. Doch sind ausser den Operationen noch mancherlei Gegenstände in den Kreis der Uebungen gezogen, namentlich die Algorithmen einschliesslich aller die Form der Schreibung und geordneten Ausführung betreffenden Regeln. Auch ist die auf Arithmetik bezügliche alte Geschichte der Griechen, Römer und andrer Völker viel berücksichtigt. Alle nötigen Erklärungen, Sätze und Regeln sind derart aufgeführt, dass der Gebrauch eines besonderen Lehrbuchs bei den Uebungen entbehrlich wird. Die Auswahl der Beispiele, die teils in Formel, teils in Worten und Einkleidung, woraus der Formelansatz zu finden ist, gegeben sind, ist vortrefflich Sie beanspruchen im ganzen ziemlich viel Selbstdenken der Schüler. Die 7 Abschnitte sind: Einführung in die arithmetische Sprache; Operationen erster, zweiter Stufe, Anwendungen der Gesetze beider (Gleichungen 1. Grades), Quadratisches (Gleichungen 2. Grades), die 3 Operationen 3. Stufe, Combinatorik, Kettenbrüche, diophantische Gleichungen und einige Gegenstände höherer Arithmetik und Algebra. H.

Rechenbuch für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen, Realschulen, höhere Bürgerschulen, Seminare etc. Von Christ. Harms, Professor an der Realschule in Oldenburg, und Dr. Alb. Kallius, Oberlehrer am Königstädtischen Gymnasium in Berlin. Zehnte Auflage. Oldenburg 1883. Gerhard Stalling. 262 S.

Die 3. Auflage ist im 224. litt. Bericht S. 35, die 6te im 251. litt. B. S. 36 besprochen. Veränderungen haben nicht stattgefunden, nur in der 8ten betreffend die Orthographie. H.

Physikalische Aufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. Von Dr. Karl Jansen, Ordentlichem Lehrer am Realgymnasium zu Düsseldorf. Freiburg im Breisgau 1883. Herder. 150 S.

Diese Sammlung von 558 Aufgaben ist zum Gebrauche der Schüler bestimmt und schliesst sich dem physikalischen Unterricht in Prima an, wie er etwa dem Lehrbuch von Münch entspricht. Die Aufgaben verlangen, mit einzelnen Ausnahmen, Ausrechnung aus Datis, die, namentlich in der Mechanik, die analytische Ausdrucksform (in Coordinaten u. s. w.) anwenden. Sie setzen die idealisirte Auffassung aus

der Wirklichkeit entnommener Gegenstände und Vorgänge, mithin Isolirung der Kraftwirkungen voraus, d. h. mit Ausschluss aller Correctionen. Der erste Teil umfasst die Mechanik, in grösster Ausdehnung die der starren Körper, doch sind Stoss, Reibung, Fluida und Gase gleichfalls berücksichtigt. Der zweite Teil betrifft die Akustik, Optik, Wärme, Magnetismus und Elektricität. Dann folgen die Resultate aller Aufgaben, endlich eine Anzahl physikalischer Tabellen. H.

Zur Nachricht für Mathematiker, besonders Freunde meiner Aufgabensammlung. Von E. Bardey. Zeitschr. für math. u. naturw. Unterricht, Bd. XV. Heft 3. 8 S.

Der Artikel ist Entgegnung auf Sinram's „Erwiderung betreffend Bardey's Aufgabensammlung", im 279. litt. Bericht S. 28. Sinram's Schrift ist hervorgerufen durch die darin citirte Aeusserung Bardey's, in welcher letzterer sich den Anschein gibt, als wenn ausser 3 genannten Aufgaben keine Entlehnung aus fremden Sammlungen stattgefunden hätte, womit Sinram indirect der Unwahrheit beschuldigt war — und begegnet der Beschuldigung durch Aufweisung einer hinreichenden Anzahl übereinstimmender Aufgaben. In Bardey's gegenwärtiger Schrift wird die factische Uebereinstimmung bei keinem der von Sinram angeführten Beispiele bestritten, ausserdem unter IV. erst im allgemeinen die Aehnlichkeit bei sehr vielen, dann die Aufnahme von 6 bestimmten, und unter III. die Aufnahme anderer, nur mit Zurückführung der Autorschaft von Heis auf M. Hirsch, eingeräumt. Hiermit ist die Angelegenheit, soweit sie den Artikel im Archiv betrifft, erledigt. Die Frage, ob eine neue Verwendung schon früher publicirter Aufgaben verwerflich sei, beschäftigt uns nicht, und würde überhaupt kein Interesse haben, wofern der Verfasser nicht sagt oder andeutet, dass er auf Originalität Anspruch macht. Auch auf sonstige Angaben über das Verhältniss zwischen den Sammlungen von Bardey und Heis und Andern gehen wir nicht ein, verweisen dagegen auf die Würdigung, welche der Verfasser in der ausführlicheren Brochüre herausgeg. von den Schulinspectoren J. Klein und J. Hoffmann unter dem Titel: „Antwort auf die Auslassungen Dr. Bardey's in dem 2. Hefte der Zeitschr. für math. u. naturw. Unterricht von J. C. V. Hoffmann 1883 über das von den Unterzeichneten herausgegebene Rechenbuch für Seminaristen und Lehrer. Düsseldorf 1883" — erfahren hat. Hoppe.

Tabellen.

Tables de logarithmes à six décimales construites sur un plan nouveau par Adolphe Benoist. Docteur en droit, Membre de la Société Mathématique de France. Sechsstellige Logarithmen-Tafeln. Nach einem neuen Plane zusammengestellt von Adolph Benoist. Paris. Ch. Delagrave (W. Hinrichsen). 391 S.

Auf die neue Anordnung legt der Verfasser als eigne Erfindung Gewicht. Die Entrees sind im Hauptteil dieselben wie bei den siebenstelligen Tafeln von Bremiker; von den 6 Stellen der Logarithmen sind die 2 ersten der je 5ten Zeile vorgedruckt. In den trigonometrischen Tafeln sind die Complementarfunctionen nicht neben einander gestellt, sondern die Winkel von 0 bis 90^0 durchgeführt; nur die Logarithmen der Sinus und Tangenten stehen auf den 2 zugleich sichtbaren Seiten neben einander; die Sechstel der Minuten gehen durch eine Zeile. Neu berechnet und hinzugefügt ist links vom Entree der Differenzentafeln die antilogarithmische Differenzentafel, d. h. die Angabe der Differenzen der Zahlen für die Einheiten der Differenzen der Logarithmen. Die bei Bremiker unter der Zahlentafel befindliche Ergänzungstafel für kleine Kreisbogen ist beibehalten.

H.

Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln nebst einer grösseren Anzahl von Hilfstafeln, herausgegeben von Dr. Adolf Greve, Oberlehrer am Karls-Gymnasium zu Bernburg. Bielefeld und Leipzig 1884. Velhagen u. Klasing. 171 S.

Die Tafel ist für den Gebrauch in der Schule und im gemeinen Leben bestimmt. Sie zeichnet sich durch sehr deutlichen Druck bei mässig grossen Ziffern aus und unterscheidet sich durch Angabe der Secunden-Differenzen und sehr viele Zugaben teils an Formeln, teils an kleineren Tafeln. Unter letztern sind zu nennen die Tafeln zur Berechnung 12stelliger Logarithmen, 7stelliger Logarithmen und 8-stelliger Antilogarithmen, die 8stelligen brigg'schen und natürlichen Logarithmen der Primzahlen < 1000, und Vielfache des Modulus, eine Factorentafel bis 1000; mehrere zur Ergänzung und Gebrauchserleichterung dienende Tafeln für trigonometrische Tafeln, 7stellige trigonometrische Zahlen für alle Grade, Quadrate bis 1000, Kuben bis 100, 4. 5 ... 9te Potenzen bis 30, Potenzen von 2, 3, 5, Quadratwurzeln bis 100, Binominalcoefficienten, 7stellige Producte, physikalische Tafeln, die Werte vieler Ausdrücke in π, u. a. m.

H.

Fünfstellige Logarithmen-Tafeln. Von Friedrich Wilhelm Rex. Erstes Heft. Die Logarithmen der Zahlen und der goniometrischen Formeln. Zweites Heft. Die Additions- und Subtractionslogarithmen der Werthe $\frac{1+x}{1-x}$, Neper'sche Logarithmen, natürliche Zahlenwerthe der goniometrischen Functionen und Bogenlängen, Sehnen und Pfeilhöhen; Potenzen- und Kreistafel; Quadrattafel, Reciprokentafel; Anhang. Stereotyp-Druck. Stuttgart 1884. J. B. Metzler. 174 + VIII S.

Das höhere Format hat der ersten Tafel den Vorteil gebracht, dass je 1000 Zahlen auf 2 Nebenseiten stehen. Am Schluss derselben folgen die 7 stelligen Logithmen der ersten 1000 fünfziffrigen Zahlen, dann Werte einzelner Irrationalen, $\log n!$ etc., bernoullische Zahlen. Die trigonometrische Tafel geht in den 6 ersten Graden durch die Sechstel Minuten, mit Beifügung des Entrees in Secunden, dann von vorn beginnend durch die Minuten. Ihr folgt eine Tafel zum Uebergang von $\log \operatorname{tg} x$ auf $\log \cos x$, $\log \sin x$. Den Inhalt der übrigen Tafeln gibt der Titel. Ein Anhang enthält physikalische Tabellen.

H.

Vermischte Schriften.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 3. Stockholm 1884. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Herman.

Der Inhalt des 3. Bandes ist folgender.

L. Koenigsberger: Ueber die einer beliebigen Differentialgleichung 1. Ordnung angehörigen selbständigen Transcendenten.

H. Poincaré: Abhandlung über die Klein'schen Gruppen.

M. Krause: Ueber die Transformation der elliptischen Functionen. — Ueber die Transformation der hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung. — Ueber den Multiplicator der hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung.

L. Lindelöf: Eine Frage über lebenslängliche Renten.

Hj. Mellin: Eine Verallgemeinerung der Gleichung

$$\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

Ueber gewisse durch die Γ Function ausdrückbare unendliche Producte.

C. de Sparre: Ueber die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left[2\nu\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}+2\nu_1\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x}-2\nu_2\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}\right]\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$=\left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}(n_3-\nu_2)(n_3+\nu_2+1)+\frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}(n_2-\nu_1)(n_2+\nu_1+1)+\frac{k^2\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\cdot\right.$$

$$\left.(n_1-\nu)(n_1+\nu+1)+k^2\operatorname{sn}^2 x(n+\nu+\nu_1+\nu_2)(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1)+h\right].$$

E. Beltrami: Ueber die elektromagnetischen Niveauschichten.

C. Le Paige: Ueber Flächen 3. Ordnung.

F. Prym: Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel. — Ableitung einer allgemeinen Thetaformel.

A. Krazer und F. Prym: Ueber die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel.

A. Steen: Note über gewisse lineare Differentialgleichungen.

G. H. Halphen: Ueber die Invarianten der linearen Differentialgleichungen 4. Ordnung. H.

Bulletin de la Société Mathématique de France, publié par les secrétaires. Tome XI. Année 1882—83. Paris 1883. Au siège de la société.

Der 11. Band enthält folgende Abhandlungen.

E. Lemoine: Einige Wahrscheinlichkeitsaufgaben geometrisch gelöst.

E. Picard: Ueber die Reduction der Anzahl der Perioden der Abel'schen Integrale, insbesondere im Fall der Curven 2. Art.

Fouret: Ueber eine Eigentümlichkeit in Betreff zweier materieller Systeme aus gleichvielen Punkten von gleichen Massen.

Zeller: Doppeltes Fundamental-Kalender-Problem.

Perrin: Ueber den Fall der Lösbarkeit der Gleichung 5. Grades durch Wurzelausdrücke. — Note über die Residua der Invarianten und Covarianten der binären Formen.

Appell: Ueber gewisse Reihenentwickelungen von Potenzen.

E. Lucas: Beweis des Satzes von Clausen und Staudt über die Bernoulli'schen Zahlen.

David: Ueber 2 neue Reihenausdrücke für den sin und cos eines gegebenen Bogens.

N. Vaněček: Ueber die Ellipsen beschrieben durch die Punkte, welche unveränderlich an ein constantes Segment gebunden sind.

Poincaré: Ueber einen Satz aus der allgemeinen Theorie der Functionen. — Ueber die Functionen Θ. — Ueber die ganzen Functionen.

Bobek: Bemerkung über die Strictionslinie des einschaligen Hyperboloids.

D'Ocagno: Ueber den Krümmungsmittelpunkt der Verfolgungscurven.

Goursat: Ueber die Differentialgleichungen 4. Ordnung, deren Integrale eine homogenen Gleichung 2. Grades erfüllen.

Perrot: Ueber das Läufer-System.

Lucien Lévy: Ueber die abwickelbaren Flächen, welche durch Berechnung eines Büschels von parallel auf eine gegebene Curve fallenden Lichtstrahlen gebildet werden. H.

Litterarischer Bericht.

III.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Ueber Beta- und Gammafunctionen. Von Phil. Dr. J. Anton Schobloch. Halle 1884. Louis Nebert. 4⁰. 11 S.

Der Aufsatz enthält mannichfache Versuche in der Theorie der Euler'schen Functionen etwas neues zu finden. Die letzte Formel beweist, dass die Anstrengungen nicht ganz ohne Erfolg waren. Die Untersuchung beginnt mit dem ersten Euler'schen Integral, das gewöhnlich mit B bezeichnet wird, geht aber sehr bald unabänderlich auf den Fall über, wo das eine der 2 Argumente eine ganze Zahl ist. Hier ist B keine Transcendente mehr, sondern eine rationale Function des andern Arguments, die auch in Gl. (5) angegeben ist. Daher hat auch Gl. (7), die wol auch in der Theorie der bestimmten Integrale kein neues Resultat vorstellen soll, keine directe Beziehung zu jenen Transcendenten. Sie wird angeblich als Quelle neuer Sätze aufgestellt. Was daraus abgeleitet wird, ist die Gl. (11), mit welcher die Betrachtung der B überhaupt schliesst. Dieses Endergebniss ist nun eine reine Identität von Producten linearer Binome, deren Factoren alle einzeln auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen, bedurfte also nicht der Rechnung mit bestimmten Integralen. Dieselbe wird in der Form (15) mit Γ Functionen geschrieben, was eine unwesentliche Aenderung der Schreibart ist. Zu diesem Zwecke wollte der Verfasser an bekannte Beziehungen der B und Γ erinnern. Dass er aber die Gl. (13) und (14), deren erstere nicht einmal in Anwendung kommt, erst herleitet, überdies mit demselben ungerechtfertigten

Uebergang zur Grenze, den Gauss sich erlaubt, war jedenfalls sehr überflüssig und inconsequent, da er die eigentliche Relation der B und Γ unmittelbar als bekannt aufstellt. Nach Ausdruck der B in Γ erhält er die Gl. (20), welche nichts weiter ist als die Gauss'sche Relation der Γ nach Division zweier Werte beider Seiten der Gleichung, die jedoch, obwol sie allgemein gilt, hier nur für ganze Zahlen a und b bewiesen auftritt.. Bis dahin besteht also die ganze Leistung nur in Umschreibung selbstverständlicher oder bekannter Gleichungen. Solche Umschreibungen können sehr nützlich sein, wenn sie dem Zwecke einer Untersuchung durch veränderte Auffassungsform dienen. Hier ist es aber umgekehrt: ein längerer Transformationsweg führt nur zu einer Schreibweise, deren Anwendung schwerlich je vorkommt. Die folgende Untersuchung beginnt mit einer, absichtlich herbeigezogenen, gänzlich zwecklosen Umschreibung, mit der sie übrigens gar nichts zu tun hat. Der Verfasser nennt das Integral

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^n} \partial x$$

welches jedermann für eine Γ Function mit dem Factor $\frac{1}{n}$ ansehen wird, eine „Verallgemeinerung der Γ Function" und bezeichnet sie als Function zweier Variabeln, trotzdem er dessen Ausdruck in Γ bald findet, und der Factor $\frac{1}{n}$ in allen Formeln sichtlich ein unregelmässiges Element bildet. Von dieser capriciösen Schreibweise abgesehen ist der Untersuchungsgang derjenige, welchem die Herleitung der Gauss'schen Relation den Weg zeigt. Es wird $\log \Gamma(b)$ durch ein bestimmtes Integral dargestellt, für b eine arithmetische Reihe substituirt, und die Summation vollzogen. Nur ist bei jener das Intervall $= 1$, hier beliebig. Nach Subtraction zweier Ausdrücke derselben Form, aber beliebig verschiedener Gliederzahl gibt sich leicht ein Fall zu erkennen, in welchem das Integral in endlicher Form darstellbar ist, indem derjenige Teil der zu integrirenden Function, dessen Nenner 2 binomische Factoren hat, wegfällt. Die Specialisirung lässt die 2 ganzen Zahlen p, q unbeschränkt und reducirt nur die 2 Irrationalen auf eine. Um sichtbar zu machen, dass eine solche willkürlich bleibt, wollen wir im Schlussergebniss für n, k, m schreiben pv, qv, $pquv$; dann lautet die Gl. (31):

$$\prod_{h=0}^{h=p-1} \Gamma\left(qu + \frac{hq}{p}\right) : \prod_{h=0}^{h=q-1} \Gamma\left(pu + \frac{hp}{q}\right) = (2\pi)^{\frac{p-q}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{pqu + \frac{pq-p-q}{2}}$$

Hier ist zugleich ein Fehler berichtigt, der sich durch eine Reihe von Gleichungen hinzieht und dadurch entstanden ist, dass die Multiplication einer Gleichung bei einem Term vergessen worden ist;

statt des Exponenten $\frac{n-k}{2}$ muss stehen $p^{\frac{n-k}{2n}}$. Die gesamte Arbeit darf man wol für ein Specimen halten, durch welches der Verfasser seine Fertigkeit in der Behandlung bestimmter Integrale dartun wollte. In diesem Sinne wird freilich das Urteil von aller darin enthaltenen Mystification wenig berührt. H.

Graphisch-mechanische Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen. Von Dr. C. Reuschle, Professor an der technischen Hochschule in Stuttgart. Stuttgart 1884. J. B. Metzler. 64 S.

Das Princip in noch ziemlich specieller Gestalt, wie es jedoch nach Erfahrung des Verfassers für den Erfolg die günstigste ist, ist folgendes. Durch lineare Substitution kann man im voraus einen Coefficienten der Gleichung zu 0, zwei andre zu 1 machen. Sie laute alsdann:

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+c_1x^{n-3}+\ldots+c_{n-6}x^4+dx^3+x^2+1=0$$

dann lässt sie sich zerlegen in

$$y=ax^2+bx+c$$
$$x^{n-2}y+c_1x^{n-3}+\ldots c_{n-6}x^4+dx^3+x^2+1=0$$

Betrachtet man x, y als Coordinaten, so geht die erstere Gleichung aus der der Parabel

$$y=ax^2$$

durch Verschiebung in der x und y Richtung ohne Drehung hervor. Zeichnet man nun auf ein in Millimeterquadrate geteiltes Blatt die der zweiten Gleichung entsprechende Curve und auf Pauspapier die Parabelschar $y=ax^2$ nebst Axen, so geben nach gehöriger Verschiebung des letzterem auf ersterem die Abscissen der Schnitte der Parabel a mit jener Curve sämtliche reelle Wurzeln der Gleichung. Die besondere Zeichnung der Curve für jeden neuen Fall wird erspart, wenn $n \overline{\overline{<}} 6$ ist. Bei Gleichungen 6. Grades hängt sie nur von einem Parameter d ab; diese werden daher gelöst durch Verschiebung einer Parabelschar auf einer einfach unendlichen Curvenschar, welche ein für allemal zu zeichnen ist und dann für alle Fälle ausreicht. Bei Gleichungen 5. Grades fällt auch d weg, und es ist statt der Curvenschar nur eine Curve zu zeichnen. Man hat dann überdies die Wahl, ob man lieber eine Parabel $y=x^2$ auf einer Curvenschar verschieben will, indem man bei Reduction der Gleichung $a=1$ macht und den Coefficienten von x^2 stehen lässt. Beide Vorteile hat nun der Verfasser ausser Acht gelassen, es ist nicht zu verstehen

warum. Er reducirt nämlich anfangs nur einen Gleichungscoefficienten auf 1, den zweiten erst nachträglich bei der Gleichung 6. Grades, wo es als unentbehrliches Auskunftsmittel erscheint. Zur Auflösung der Gleichung 5. Grades, sagt er ausdrücklich, müsse eine Parabelschar auf einer „Hyperbelschar" verschoben werden. Bei den Gleichungen niederer Grade treten weitere Vereinfachungen ein, die leicht zu finden sind. Die praktischen Fragen sind reichlich erwogen und auseinandergesetzt, viele Figuren dazu in den Text eingelegt. Ferner werden vielerlei Modificationen des Verfahrens besprochen. Da nun für die gesamte Anwendung nur einige völlig individuelle Figuren erfordert werden, die nur in der Ausdehnung und Linieneinheit variiren können, und für letztere der Verfasser 2 Centimeter als die günstigste Grösse betrachtet, so ist der Gedanke an die Hand gegeben, wiewol nicht ausgesprochen, die erforderlichen Zeichnungen gedruckt herauszugeben, wodurch die Anwendung des Verfahrens für den Einzelnen bedeutend erleichtert und seiner Aufnahme eine weit grössere Verbreitung verschafft sein würde. In einer Note empfiehlt der Verfasser, statt des Pauspapiers Gelatine-Papier zu nehmen. H.

Théorie des approximations numériques. Notions de calcul approximatif. Par Ch. Galopin-Schaub, Docteur ès sciences mathématiques (de la Faculté de Paris). Genève 1884. H. Georg. 50 S.

Das Buch ist zur Belehrung von Studenten bestimmt, bei denen der Verfasser die Kenntniss und Beachtung der Regeln approximativer Rechnung sehr vermisst hat. Es macht nicht den Anspruch vollständiger oder wissenschaftlicher zu sein als seine Vorgänger, bestrebt sich aber klare und leicht anwendbare Regeln in logischer Ordnung zu geben, mit denen Beispiele zur Unterstützung verbunden sind, wo es förderlich schien. Dies sind die Gesichtspunkte laut der Vorrede. In der Tat kann es bei einem Gegenstande, der für einen entwickelten Verstand kaum etwas unbekanntes enthalten kann, nur die Klarheit des Ausdrucks sein, was man an der Bearbeitung sucht. In dieser Hinsicht leistet der Vortrag etwas zu viel in Verschweigung alles zum Verständniss notwendigen. Ohne glückliche Conjectur wird man nirgends erraten, wovon der Verfasser spricht. Um welche Aufgabe es sich handelt, ist nirgends gesagt. Vielleicht hat der Verfasser Gewöhnung an gewisse familiäre Redeweisen bei seinen Lesern vorausgesetzt. In weiterem Kreise möchte jedenfalls das Buch von keiner Anwendung sein. H.

Observations relatives à une note précédente de M. Menabrea, concernant la série de Lagrange. Par A. Genocchi. Comptes Rendus.

Das Vorliegende berichtigt einen Artikel in den Comptes Rendus von Menabrea, worin dieser zu beweisen versucht, dass die zwei Kriterien der Convergenz der Lagrange'schen Reihe für die Auflösung der Gleichung $x = u + f(x)$, aufgestellt von Lagrange und von Cauchy, identisch seien. Beide stimmen nur überein, solange die Terme der Reihe für $f(x)$ positiv sind. Sind sie es nicht, so würde man zur Anwendung der Lagrange'schen Formel ihre absoluten Werte nehmen und die so entstehende Function für $f(x)$ substituiren müssen, während die Cauchy'sche Formel allgemein gilt. Chiò hat zuerst gezeigt, dass die Formel von Lagrange nicht allgemein ist. Ferner erklärt Genocchi die Behauptung für unrichtig, dass Lagrange mit seiner Convergenzregel die notwendige Bedingung habe geben wollen, unter der die Reihe die kleinste Wurzel ausdrückt. Es liegen hier zwei Schriften von Lagrange vor: in der ersten von 1768 unterscheidet er die kleinste Wurzel nicht, während er von der Convergenz handelt, in der zweiten von 1798 sucht er die Reihenentwickelung für die kleinste Wurzel ohne die Frage nach der Convergenz zu berühren. Schliesslich erklärt Genocchi den von Menabrea gegebenen Beweis, dass die Lagrange'sche Reihe, wenn sie convergirt, die kleinste Wurzel darstellt, für unzureichend, doch könne man ihn ergänzen mittelst eines Theorems von Chiò. H.

Intorno alla funzione $\Gamma(x)$ e alla serie dello Stirling che ne esprime il logaritmo memoria di Angelo Genocchi. Napoli 1883. Tipogr. d. R. Acc. d. scienze. 4°. — 18 S.

Ancora la serie dello Stirling, nota del Prof. Angelo Genocchi. Append. a. prec. mem. 4°. — 6 S.

Die Schrift hat Arbeiten aus älterer Zeit vom Verfasser und von einer grössern Anzahl Autoren, welche die approximative Berechnung von $\log \Gamma(x)$ untersucht haben, Euler, Gudermann, Binet, Liouville, Schaar, Poisson, Abel, Plana, Gauss, Mascheroni, Bidone, De Gasparis, Bourgnet, zum Gegenstand und gibt ausführliche Herleitungen und Beweise, welche die Resultate derselben in neue Verbindung bringen. H.

Ueber die quadratischen und kubischen Gleichungen mit besonderer Berücksichtigung des irreducibeln Falles bei den letzteren. Von

Professor C. Hellwig, Oberlehrer am Realgymnasium in Erfurt. Erfurt 1884. Carl Villaret. 41 S.

Das Buch ist so bearbeitet, dass ein mässig befähigter Schüler der mittleren Classen ohne weitere Hülfe die Theorie daraus erlernen kann. Die Vollständigkeit dieser Theorie geht aus dem hier folgenden Inhalt hervor: Entstehung der Gleichungen 2. Grades, Wurzeln derselben; Rechnungsverfahren bei der Auflösung quadratischer Gleichungen; die Arten derselben, imaginäre und complexe Wurzeln (Discriminante), Determination der Wurzeln; Bestimmung der Wurzeln durch trigonometrische Functionen; Verwandlung von Ausdrücken quadratischer Form in Producte von linearen Factoren; die Wurzeln der Gleichungen 3. Grades, im besonderen der binomischen; die Auflösung vollständiger kubischer Gleichungen; Vereinfachung der Ausdrücke für irrational erscheinende rationale, sowie für complex erscheinende reelle Wurzeln einer kubischen Gleichung (irreducibler Fall); Berechnung der irrationalen Wurzeln für letztern; andre Methode zur Herleitung der Wurzelformen einer kubischen Gleichung; allgemeine Betrachtung über deren Wurzeln; Auflösung der kubischen Gleichungen mit Hülfe trigonometrischer Functionen. Eigentümlich in der Behandlung ist zunächst die Vermeidung der Nenner. Da sie auch beim praktischen Rechnen von Nutzen sein kann, so mag sie für gerechtfertigt gelten. Die dadurch veranlasste Scheidung von Fällen ist im Grunde überflüssig, der erste immer ausreichend; doch kann man die übrigen als förderliche Zugabe ansehen. Eine Beschränkung der mit Buchstaben bezeichneten Gegebenen auf ganze Zahlen ist nicht ausgesprochen, obwol sie gewiss im Sinne des Verfassers lag. Dagegen ist die Beschränkung des Gebrauchs der Buchstaben auf positive Werte stillschweigende Voraussetzung; denn $\sqrt{-c}$ wird als imaginär betrachtet. Dies ist entschieden zu missbilligen. Wenn der Schüler bis dahin in der Gewohnheit befangen war, den Buchstaben als Zeichen für eine positive Zahl anzusehen, so setzt jedenfalls die Lehre von den Gleichungen den äussersten Termin von dieser Gewohnheit, der Quelle unklarer Begriffe für spätere Zeit, abzulassen; denn das gesuchte x muss doch jeder Art Zahlen bezeichnen können. Günstig für das Verständniss ist die Breite der Entfaltung des Stoffes und die Vielseitigkeit der Betrachtung. Unrichtig ist die auf erster Seite stehende Behauptung, die Wurzel einer quadratischen Gleichung befriedige „gleichzeitig“ zwei lineare Gleichungen. H.

Geometrie.

Die Elemente der projectivischen Geometrie. Von Dr. Emil Weyr, o. ö. Professor an der k. k. Universität in Wien. Erstes Heft. Theorie der projectivischen Grundgebilde erster Stufe und der quadratischen Involutionen. Mit 58 Holzschnitten. Wien 1883. Wilhelm Braumüller. 231 S.

Das Vorliegende behandelt nach einer erklärenden Einleitung: die Bestimmung der Elemente der Grundgebilde 1. Stufe; das Doppelverhältniss; vollständige Figuren; die Sätze von Carnot und Ceva; die perspectivische Raumansicht; das Reciprocitätsgesetz und die Elementenbestimmung in den Grundgebilden höherer Stufe; perspectivische Gebilde; projectivische Gebilde; ähnliche und congruente Gebilde; conlocale projectivische Gebilde, Doppelelemente; den Kreis; die Involutionen; eine allgemeinere Auffassung der Projectivität; die cyklische Projectivität; harmonische Mittelpunkte einesTripels; Rechnungsoperationen mit Teilverhältnissen. Die folgenden Hefte sollen die Lehre von den Curven und Flächen 2. Grades und die von den Raumcurven 3. Grades, das letztere einen Litteraturausweis, soweit er bei der elementaren Natur des behandelten Stoffes als notwendig erscheinen sollte, enthalten. Das Ganze ist zunächst dazu bestimmt, als Leitfaden für die Vorlesungen des Verfassers über neuere Geometrie an der Wiener Universität zu dienen. Es ist indes mit einer so musterhaften Klarheit und Leichtfasslichkeit abgefasst, dass es zum Gebrauch als Leitfaden in weiterem Kreise und zum Selbstunterricht empfohlen werden kann. H.

Apolarität und rationale Curven. Eine systematische Voruntersuchung zu einer allgemeinen Theorie der linearen Räume. Von Dr. W. Franz Meyer, Privatdocent an der Universität Tübingen. Tübingen 1883. Franz Fues. 406 S.

Das Werk ist eine Fortbildung der Apolaritätstheorie von Theodor Reye. Den Gegenstand kann man ebensowol als Ausdehnung einer gewissen Seite der Geometrie auf beliebig viele Dimensionen wie als algebraische Theorie mit Unterstützung und Leitung durch geometrische Begriffe auffassen. Ein Unterschied wird dadurch so wenig herbeigeführt, dass vielmehr beide Betrachtungsweisen für einander unentbehrlich scheinen und erst vereinigt die Gesichtspunkte und die Abgrenzung der gesamten Theorie ergeben. Auf das Wesen der Theorie können wir hier nicht wol eingehen, weil zu viele Einführungen erklärt werden müssten. Die Abfassung des Buchs selbst, auf das wir nur verweisen können, ist nicht leicht verständlich: es

setzt nicht bloss allgemeine Kenntnisse, sondern auch die Bekanntschaft mit Reye's Geometrie voraus, gibt demnach über viele Punkte keine unmittelbare Erklärung, wenn gleich die Angaben im ganzen zureichend sind, um den Sinn ziemlich mühevoll herauszufinden. Die Abschnitte sind: Die rationalen Curven. Die Reye'sche Apolarität und die Normcurven, und zwar: die Normcurven (speciell der Ebene und des Raumes); die binäre biquadratische Form f und ihre Apolaritätsverhältnisse auf den Normcurven 2., 3. und 4. Ordnung; die binäre Form 6. Grades f und die biquadratische Involution und ihre Apolaritätsverhältnisse auf den Normcurven 2., 3. und 4. Ordnung; die biquadratische Involution auf der kubischen Raumcurve (2. Teil). Verallgemeinerungen. Als Vorgänger in der Bearbeitung werden nach Reye genannt: H. H. Sylvester, Smith, Gordan, Brill, Sturm, Em. Weyr, G. Veronese und Stéphanos, und zwar sind die Arbeiten von Brill und Stéphanos in der Zwischenzeit erschienen. H.

C. H. Kummell. Alignment curves on any surface, with special application to the ellipsoid. Bulletin of the Philosophical Society of Washington VI. 123—132.

Das Motiv der Untersuchung geht zwar aus der Landesvermessung hervor, doch sind die behandelten Fragen rein analytisch geometrische. Die Aufgabe ist anfänglich sehr unbestimmt aufgestellt, die spätere Bestimmung im einzelnen beruht auf blosser Auswahl. Dem Wortlaut nach soll auf einer krummen Fläche eine Reihe von Punkten angegeben werden, in denen die Normalen gegeben sind. Letzteres trifft nicht zu; es ist wol nur gemeint, dass überhaupt eine gewisse Lotrichtung vorausgesetzt werde, die jedoch überall mit der Flächennormale identificirt wird. Dagegen ist nicht ausgesprochen, was doch factisch das Gemeinsame ist, dass die Punktreihe für die Vermessung die Stelle der geraden Linie vertreten soll. Es werden nun 3 Fälle unterschieden: je nachdem man von einem Punkte in beliebiger Richtung fortschreitet, oder einen zweiten Punkt zum Ziele nimmt, oder endlich vor und zurück visirt. Hieraus sollen angeblich eine gewisse Anzahl von Curven hervorgehen. Offenbar kann jede analytisch bestimmte Curve für den einen Fall auch für den andern dienen. Für den ersten wird allein der Normalschnitt aufgestellt, der für den zweiten nur nicht umkehrbar sein würde. Beim zweiten Falle wird ausser der Kürzesten und Loxodrome diejenige Curve genannt, längs welcher die Normalen durch die Sehne zwischen den zwei Endpunkten gehen. Hiervon wird Anwendung auf die Fläche 2. Grades gemacht, wo die von den genannten Normalen erzeugte Fläche ein Hyperboloid ist, dann insbesondere auf das Ellipsoid. H.

C. H. Kummell. The theory of errors practically tested by target-shooting. Bull. of the Phil. Soc. of Washington VI. 138—148.

Nach dieser Theorie bilden die Deviationen der Schüsse von gleicher Wahrscheinlichkeit nach allen Richtungen um den Zielpunkt Ellipsen, deren Axen horizontal und vertical durch den Zielpunkt gehen. Diese Ellipsen werden hier durch Substitution neuer Coordinaten auf Kreise reducirt. Ferner wird die Wahrscheinlichkeit des Treffens einer solchen Ellipse berechnet. Nach Reproduction dessen, was Herschel hierin in Ausführung gebracht, wird weiter untersucht die Ellipse, bei welcher „das Treffen und Nichttreffen gleiche Wahrscheinlichkeit hat", die Ellipse von grösster Wahrscheinlichkeit, und manche andere Fragen. H.

Analytische Geometrie der Kegelschnitte nach elementarer Methode für höhere Schulen. Von W. Fuhrmann, Oberlehrer am Realgymnasium auf der Burg in Königsberg i. Pr. Mit 27 Figuren im Text und 2 Tafeln. Berlin 1884. Winckelmann u. Söhne. 144 S.

Gegenüber zahlreichen Lehrbüchern der speciellen Coordinatenlehre, die sich den Titel „Analytische Geometrie" ohne Erklärung des Wortsinns fälschlich beilegen, verdient es bemerkt zu werden, dass das gegenwärtige über den begrifflichen Unterschied zwischen synthetischer und analytischer Methode eine Aufstellung macht, die wol neu sein möchte, jedenfalls aber nicht recht überlegt ist. Nach den Anfangsworten ist sie synthetisch oder analytisch, je nachdem die Grundgebilde, relativ zu welchen alle Bestimmungen gemacht werden, zur betrachteten Figur gehören oder davon unabhängig sind. Demgemäss müsste sie in die synthetische übergehen, sobald man z. B. die Axen des untersuchten Kegelschnitts zu Coordinatenaxen nähme. Letzteres ist hier mit Beginn der Kegelschnittslehre vom V. Cap. (das VIII. Cap. ausgenommen) geschehen, mithin ist der Hauptteil des Buches nach eigenem Begriff des Verfassers synthetisch. Dasselbe Urteil ergibt sich nach ursprünglichem und allein richtigem Begriff in Bezug auf das Ganze, wenn man nur die Anordnung der Teile betrachtet. Sie sind: Begriff des Coordinatensystems und der Punkt; die gerade Linie; Einführung einer abgekürzten Bezeichnung nebst einigen Anwendungen; der Kreis; die Parabel; die Ellipse; die Hyperbel; die allgemeine Gleichung des 2. Grades; Eigenschaften der Kegelschnitte von allgemeinem Charakter; Eigenschaften derselben, die sich besonders auf die Krümmungsradien und die Combination von Kegelschnitten beziehen. Anhang: Hülfssätze von den Determinanten. Das Ganze stellt sich also als eine ebene Coordinatenlehre mit der zum Zielpunkt genommenen Anwendung auf die Kegelschnitts-

lehre in beständig synthetischem Fortschritt vom Einfachen zur grösseren Mannigfaltigkeit dar. Der Titel ist demnach entschieden unzutreffend. Betrachtet man die Coordinatenlehre als den eigentlichen Gegenstand des Buchs, so ist die Behandlung durchaus sachgemäss. Dass das rechtwinklige System zu Grunde gelegt, und von demselben ohne besonderen Zweck nicht abgegangen wird, ist das einzig vernünftige Zuwerkgehen und bedurfte keiner Rechtfertigung, jede ursprüngliche Verallgemeinerung beruht auf Illusion. Ebenso ist dem ganz beizustimmen, dass von den Determinanten bei jeder Gelegenheit Gebrauch gemacht wird. Das einzig missliche bei der gegenwärtigen Bearbeitung ist, dass die Darstellung die Grenzen nie überschreitet, wo die Figur nötig ist, so dass der Blick stets an deren zufällige Specialitäten gefesselt bleibt, und eine Einsicht in die Bedeutung der Coordinaten nie gewonnen werden kann. Dieser Mangel ist jedoch mit der unnatürlichen Anordnung unabänderlich verknüpft, der gemäss eine Theorie, die als Organ für ein unbegrenztes Gebiet den Anfang eines Cursus bilden sollte, ans Ende des Schulcursus gelegt wird, und kann dem einzelnen Buche nicht zur Last fallen.

H.

Sammlung von Beispielen in besonderen Zahlen zur analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Zusammengestellt von Fr. Tamchyna, Professor am Staatsgymnasium in Saaz. Mit zwei Holzschnitten. Prag 1884. A. Storch Sohn. 76 S.

Der Verfasser hält für den Schulunterricht Zahlenbeispiele namentlich für erforderlich: zur Discussion der allgemeinen Gleichung 2. Grades zwischen zwei Variabeln, zum Tangentenproblem der Kegelschnitte, zu dem durch sie vorgestellten geometrischen Orte eines Punktes und zur Bestimmung eines Kegelschnitts durch 5 Punkte Die gegenwärtige, sehr reichhaltige Sammlung erstreckt sich indes nicht nur auf zahlreiche Aufgaben über die Kegelschnitte, sondern auch auf die Elementaraufgaben der analytischen Geometrie. Die Beispiele sind womöglich so ausgesucht, dass sich die Rechnung in rationalen Zahlen bewegt. Die allgemeine Formel ist stets vorangestellt.

H.

Analytische Geometrie des Raumes. I. Theil. Die allgemeine Theorie der Flächen und Curven; die Eigenschaften der Flächen zweiten Grades. II. Theil. Disquisitiones generales circa superficies curvas von C. F. Gauss, ins Deutsche übertragen mit Anwendungen und Zusätzen. Die Fresnel'sche Wellenfläche. Von Dr. Otto Böklen, Rektor der k. Realanstalt in Reutlingen. Mit in den Text ge-

druckten Holzschnitten und 4 lithographirten Tafeln. Zweite Auflage. Stuttgart 1884. Albert Koch. 336 S.

Anstatt auf dem von Gauss gewonnenen Standpunkte weiter zu arbeiten, hat der Verfasser es vorgezogen auf den Standpunkt von Monge zurückzukehren. Als Zweck ist angegeben, die geometrische Bedeutung der analytischen Grössen mehr im Bewusstsein zu behalten. Ob dies dadurch erreicht wird, darf man wol bezweifeln. Nachteile erkennt der Verfasser an, doch schwerlich in dem Masse, als sie wirklich stattfinden. Die Symmetrie des Raumes ist von Anfang an bei Seite geworfen; mit ihr fällt die Uebersicht und Orientirung weg; die Formeln werden complicirt; zu ihrer Auffassung und zur Verfolgung ihrer Herleitung braucht man die dreifache Mühe; die Resultate sind an bestimmte Lage der Coordinatenaxen gebunden, von der man ohne umständliche Rechnung nicht abgehen kann; von einer Basirung der Principien auf bestimmte hinreichende, die Fläche charakterisirende Elemente ist keine Spur, ebensowenig von einem Plan das gesamte bekannte Gebiet zu erschöpfen und durch Ordnung zu beherrschen; jede besondere Untersuchung beginnt mit besonderen Einführungen. Die Curventheorie steht nur auf dem Titel, im Buche kommt sie nicht vor. Es ist sehr zu beklagen, dass die viel zu wenig bekannte analytische Geometrie des Raumes in einer so äusserst unvorteilhaften Form dargeboten wird. Einen besonderen Teil des I. Teils bildet die Lehre von den Flächen 2. Grades: die darin enthaltenen Untersuchungen haben viel Anregendes. H.

Darstellende und projective Geometrie nach dem gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium. Von Dr. Gustav Ad. V. Peschka, k. k. Regierungsrath, ordentl. öffentl. Hochschul-Professor, Mitglied der k. k. Staatsprüfungs-Commission und der k. k wissenschaftlichen Realschul-Prüfungs-Commission an der k. k. technischen Hochschule in Brünn etc. Zweiter Band. Mit einem Atlas von II Tafeln. Wien 1884. Carl Gerold's Sohn. 576 S.

Atlas zur darstellenden und projectiven Geometrie. Von Dr. Gustav Ad. V. Peschka. Zweiter Band. Wien 1884. Carl Gerold's Sohn.

Der erste Band ist im 275. litt. Bericht S. 27. besprochen. Der zweite Band enthält die Theorie der Curven und Flächen. Die Abschnitte sind folgende: Curvenlehre, und zwar Fundamentaleigenschaften algebraischer Curven, allgemeine Eigenschaften ebener algebraischer Curven, Theorie der Polaren algebraischer Curven, der Correspondenz-

satz, Anwendung desselben und der Polarentheorie auf die Untersuchung der Eigenschaften algebraischer Curven, Eigenschaften der Raumcurven und ihrer Projectionen. Allgemeine Theorie der krummen Flächen und Flächensysteme, und zwar allgemeine Eigenschaften algebraischer Flächen, lineare Flächensysteme 1. Stufe (Flächenbüschel) und deren Eigenschaften, lineare Flächensysteme 2. Stufe (Flächenbündel und Flächennetze), lineare Flächensysteme 3. Stufe, Sätze über die gemeinschaftlichen Curven zweier und über die gemeinschaftlichen Punkte dreier Flächen, projectivische Erzeugung algebraischer Flächen, Anwendung der Polarentheorie auf die Entwickelung projectivischer Eigenschaften algebraischer Flächen und ihrer Systeme, projectivische lineare Flächensysteme μter Stufe und symmetrische Flächencomplexe, Eigenschaften der Hessiana und Steineriana oder der conjugirten Kernflächen einer Fundamentalfläche $n$ter Ordnung, Bestimmung der Charaktere und Singularitäten einiger Flächen, welche sich aus gegebenen algebraischen Flächen ableiten lassen. Theorie der Flächen 2. Grades, und zwar Definitionen und Fundamentaleigenschaften. Constructive Theorie der Kegel- und Cylinderflächen im allgemeinen, Kegel- und Cylinderflächen 2. Grades, developpable Flächen, welche 2 gegebenen Curven und Flächen umschrieben sind, developpable Flächen, welche 2 Curven 2. Grades umschrieben sind.

H.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. Walfried Marx, Professor an der k. technischen Hochschule in München. Erster Abschnitt. Die Methode der rechtwinkligen Projektionen und ihre Anwendung zur graphischen Bestimmung von Punkten, Geraden, Ebenen und der von ihnen begrenzten Körper, sowie zur Lösung von Aufgaben über die gegenseitige Lage dieser Objekte. Dritte, umgearbeitete und durch Beifügung von Aufgaben vermehrte Auflage des I. Bandes von F. A. Klingenfeld's Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Mit 11 lithographirten Tafeln. Nürnberg 1885. Friedr. Korn. 311 S.

Die 1. Auflage ist 1851 erschienen, die zweite (1871) unterschied sich nur wenig von ihr. Ueber der Vorbereitung zur dritten starb Klingenfeld 1880. Bei Bearbeitung der gegenwärtigen beabsichtigte Marx, die Bereicherungen, welche die darstellende Geometrie in den letzten Decennien erfahren, in Aufnahme zu bringen, hielt es jedoch nicht für angemessen, jene durch blosse Zusätze und Aenderungen im einzelnen zu berücksichtigen, sondern eine durchgehende Erneuerung für erforderlich. Die ersten zwei Capitel (Zweck und Methoden der darstellenden Geometrie, die rechtwinklige Projection in einer

Tafel) sind ganz neu. Die Grenzen des Lehrstoffs des 1. Bandes sind aus dem Titel bereits ersichtlich. Die 4 folgenden Capitel behandeln: die graphische Bestimmung von Punkten, Geraden und Ebenen durch ihre Risse in 2 Tafeln und Entscheidung ihrer gegenseitigen Lage; die Wahl neuer Tafeln und deren Anwendung zur Lösung von Aufgaben, in denen Entfernungen und Winkel gesucht oder gegeben sind, geometrische Oerter im Raume; das Drei- und das Vielkant; die Darstellung der von ebenen Flächen begrenzten Körper, die Bestimmung ihrer Risse aus gegebenen Stücken und ihrer Durchschnitte mit Geraden, Ebenen und unter sich. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

III.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bernoulli, Daniel, u. Leonhard Euler, die Basler Mathematiker. Hundert Jahre nach ihrem Tode gefeiert v. der Naturforschenden Gesellschaft. Basel, Georg. 1 Mk. 60 Pf.

Dühring, E., u. U. Dühring, neue Grundmittel u. Erfindungen zur Analysis, Algebra, Functionsrechnung u. zugehörigen Geometrie etc. Leipzig, Fues. 12 Mk.

Fortschritte, die, der Astronomie. Nr. 9. 1883. Köln, Mayer. 2 Mk.

— die, der Meteorologie. Nr. 9. 1883. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

— die, der Physik. Nr. 7. 1882—1883. Ebd. 2 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im. J. 1878. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 34. J. Red. v. Neesen. 2. Abth., enth.: Optik, Wärmelehre, Elektricitätslehre. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Heller, A., Geschichte der Physik v. Aristoteles bis auf die neueste Zeit. 2. Bd. Von Descartes bis auf Rob. Mayer. Stuttgart Enke. 18 Mk.

Hoppe, E., Geschichte d. Elektrizität. Leipzig, Barth. 13 Mk. 50 Pf.

Lepsius, R., die Längenmasse der Alten. Berlin, Besser. 3 Mk.

Rosenberger, F., die Geschichte der Physik in Grundzügen 2. Thl. Geschichte d. Physik in d. neueren Zeit. Braunschweig, Vieweg & S. 8 Mk.

Methode und Principien.

Rethwisch, E., der Irrthum der Schwerkrafthypothese. Kritik u. Reformthesen. 2. Afl. Freiburg, Kiepert & v. B. 2 Mk.

Litterarischer Bericht.

IV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Alfred Girard, invention nouvelle en l'algebre. Reimpression par Dr. D. **Bierens de Haan**. L. L. D. Leiden 1884.

Der vollständige Titel dieses Buchs, welches bereits selten geworden ist, und einer neuen Ausgabe für wert gehalten wird, lautet: Invention nouvelle en l'algebre, par Albert Girard matematicien. Tant pour la solution des equations, que pour reconnoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science. A Amsterdam. Chez Guillaume Jansson Blaeuw. M. D C. XXIX. Wie schon der Titel verschiedene Gegenstände nennt, so lassen sich auch in der Schrift 3 Teile erkennen. Der Verfasser sagt davon in der Dedication: Diese 3 Schriften, deren erste nur eine kurze Einführung in die Arithmetik ist, während die beiden andern einige Neuheiten in der Algebra und Geometrie, unbekannt nicht nur den Heutigen, sondern auch den Alten, enthalten —. In der Tat ist der erste Teil betitelt: „Complement Mathematiqve" und handelt von einigen Partien der Arithmetik. Der 2. Teil, ohneSpecialtitel, handelt von den Wurzeln, von der Ausziehungder Wurzeln aus vielgliedrigen Ausdrücken, der algebraischen Construction einiger Aufgaben, von geordneten Gleichungen, von einigen Sätzen, namentlich dann von dem bekannten Girard'schen Satze, von den hintergestellten Grössen in der Algebra. Der 3. Teil hat den Titel: „De la mesure de la superfice des triangles et polygones sphericques, nouvellement inventée" und ist voll von interessanten Beobachtungen. Zuletzt handelt er von der Messung der körperlichen Winkel zwischen ebenen Seitenflächen. Beim Neudruck ist dafür gesorgt, dass Seiten und Zeilen dem Original gleich sind; die Figuren sind Facsimiles.

H.

Simon Stevin, „vande spiegeling der singkonst“ et „vande molens“, deux traités inédits. Reimpression par Dr. D. Bierens de Haan, L. L. D. Amsterdam 1884.

Aus einem Gemisch von Bruchstücken, welche sich in einer Handschriftensammlung der Akademie der Wissenschaften von Amsterdam vorfanden, hat der Herausgeber 3 Abhandlungen, wiewol mit manchen Lücken, zusammengestellt und hier publicirt. Die erste, unter dem Titel: „Deerde Deel der Gemengde stoffen vande Spiegeling der Singkonst. Beschreven door Simon Stevin — “ enthält Notenlehre, Gesangsregeln, musikalische Akustik in Hauptstücke und Sätze mit Erklärungen geordnet, jedoch mit Besprechung von mancherlei Einzelheiten untermischt. Der zweite hat den Titel: „Byvough der Singkonst.“ Von beiden ist die Authenticität zweifellos. Daneben aber findet sich ein Werk: „Spiegeling der Singkonst met Anhang“. Es werden die Gründe dargelegt, warum es demselben Verfasser zugeschrieben werden muss. Was das Verhältniss beider Bearbeitungen betrifft, so vermutet der Herausgeber, dass letztere die ältere sei. Die letzte Abhandlung ist betitelt: „Stevin vande Molens. Reriviceert doorden Professor Golius. 1634.“ Sie enthält die Berechnung der verschieden construirten Mühlen. H.

Benedictus de Spinoza, „Stelkonstige reeckening van den regenboog“ and „Reeckening van kanssen“, two nearly unknown treatises. Reimpression by Dr. Bierens de Haan. Leiden 1884 20+8 S.

Das Vorliegende ist eine Festschrift zum 300jährigen Jubiläum der Universität Edinburg. Die 2 Schriften verschiedenen Inhalts algebraische Berechnung des Regenbogens und Wahrscheinlichkeitsrechnung sind vereinigt, weil sie sich vereinigt vorfanden. Der Verfasser der zweiten ist zweifelhaft, doch wird sie aus angeführten Gründen dem Spinoza zugeschrieben. Erstere setzt das Gesetz der Reflexion und Brechung als bekannt voraus und betrachtet den Regentropfen als Kugel; letztere enthält 5 Fragen über das Verhältniss der ungleichen Chancen mehrerer Spieler bei gegebenen Bedingungen, nebst Antworten. Die ausgeführte Rechnung folgt dann für die 2 ersten Fragen. H.

Histoire de l'Académie impériale et royale des sciences et belles lettres de Bruxelles, par Éd. Mailly, Membre de l'Académie royale de Belgique. Bruxelles 1883. F. Hayez. 720+426 S.

Das Werk erscheint in 2 Bänden, als Auszug aus den Mém. de l'Ac. roy. de Belg. t. XXXIV. und XXXV. Es beginnt mit einer Einleitung, welche die Umstände darlegt, die zur Stiftung der Société littéraire in den österreichischen Niederlanden führten. Das 1. Buch, zugleich der 1. Band, handelt von der Geschichte dieser Gesellschaft, vor und nach ihrer Erhebung zur Akademie; das 2te von den in den Sitzungen gelesenen oder vorgelegten Abhandlungen; das 3te von den Preisaufgaben. Zum Schluss folgt ein dictionnaire biographique über die Namen, Titel, Stellung und Wirksamkeit, den Geburts- und Todestag, Ort der Geburt und des Todes der Gründer, Mitglieder und Laureaten der Gesellschaft, überdies aller Personen, deren Spur in ihren Annalen aufbewahrt ist, die unbekannten Zeit- und Ortsbestimmungen zur Ergänzung leer gelassen. Der Act der Errichtung der Société littéraire führt zurück auf den 12. Januar 1769, die letzte Sitzung der Akademie fand statt den 12. Mai 1794. Der Verfasser hatte demnach ein Vierteljahrhundert ins Licht zu setzen, dessen Geschichte sehr wenig bekannt, nur von Zeitgenossen erzählt ist. Er hat dazu Documente fast sämtlich aus erster Hand, entliehen aus den Archiven der Akademie und des Staats benutzt. Er spricht sich dahin aus, dass die Arbeiten der Akademiker von ihren Collegen keineswegs mit gegenseitigem Lobe beurteilt sind, und sagt dann weiter: „die Preisaufgaben, von Anfang an als ein mächtiges Mittel des Wetteifers betrachtet, zeigen zugleich den Geist, welcher über den Arbeiten der Gesellschaft herrschte, und die intellectuelle Bewegung, wofür ihr das Land noch den Dank schuldet. Wenn es wahr ist, wie man behauptet (angeführt ist Ad. Quetelet), dass während des letzten Teils des 18. Jahrhunderts die Geschichte der Wissenschaften in Belgien so zu sagen ganz in der Geschichte der Arbeiten der alten Akademie von Brüssel liegt, so wird man mir verzeihen lang gewesen zu sein: ich wollte mit deren vagen Darstellungen und oberflächlichen Begriffen, die nichts lehren, ein Ende machen und den Menschen und Sachen die Stelle geben, auf die sie ein Recht haben.“ Was die Form der Abfassung betrifft, lässt die Schrift, obwol in zusammenhangender Erzählung, grösstenteils die Documente reden. H.

Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit. Von August Heller, Professor in Budapest. Zwei Bände. II Band: Von Descartes bis Robert Mayer. Stuttgart 1884. Ferdinand Enke. 753 S.

Der 1. Band ist im 273. litt. Ber. S. 1. besprochen. Die Aufgabe, die der Verfasser mit dem 2. Bande zu lösen unternimmt, ist eine wesentlich verschiedene. So gering der Stoff im vorausgehenden

Zeitraum war, so überwältigend gross ist er hier. Sollte die Darstellung auf den Umfang des Buches beschränkt sein, so war äusserste Kürze notwendig. Was den Plan der Bearbeitung betrifft, so erscheint die Biographie der Physiker als oberste Leitung; nur im Anschluss an diese wird die Litteratur aufgestellt, bloss zum Teil mit Angabe der Leistung der Schriften. Am wenigsten bedacht ist die Entwickelung der Wissenschaftszweige und ihrer Probleme; die einzelnen Entdeckungen und Erfindungen finden sich zerstreut in den Biographien. Im Contrast mit der sonstigen Kürze führt die Biographie von Guericke weit in die Kriegsbegebenheiten hinein, die hier gar nicht hingehören, doch kommen ähnliche Abschweife nicht weiter vor. Im ganzen vermisst man die Scheidung des Wichtigen und Unbedeutenden, wie sie aus einer klaren Auffassung der Ziele der Forschung hervorgehen würde. So viel aber auch der Arbeit an Vollendung fehlt, so ist ihr doch ein Wert zuzuerkennen, nicht sowol als Stoffsammlung für neue Bearbeitung — dazu würden Monographien tauglicher sein — sondern als Versuch einer universellen Bearbeitung, der vielleicht noch lange als Aushülfe dienen muss, wo ein Handbuch der Geschichte der Physik für Unterrichtszwecke Bedürfniss ist. H.

Johannes Kepler's Leben und Entdeckungen. Von F. Fischer Abhandlung zu dem Programm der Realschule II. Ord. zu Leipzig für das Schuljahr 1883—1884. Leipzig 1884. 4°. 35 S.

Kepler's Lebensgeschichte, seine Schicksale und Tätigkeit nebst der Herausgabe seiner Schriften erzählen die 4 ersten Abschnitte in folgender Begrenzung: von der Geburt bis zur Uebersiedelung nach Prag, dann das Leben in Prag, dann in Linz, dann die letzten Lebensjahre. Die Angaben sind reichlich und werden ohne Umschweife in einfacher Weise so vorgetragen, dass Kepler's Ansichten und Denkweise daraus deutlich erhellen. Die folgenden 6 Abschnitte geben näher auf seine Arbeiten ein. Sie sind überschrieben: Würdigung Kepler's (d. i. die, welche seine astronomischen Leistungen fanden), die Stereometrie der Fässer, die regulären Polygone und Polyeder, die Logarithmen, Kepler's optische Untersuchungen, die Gesetze der Planetenbewegung. Der letzte erklärt es, wie Kepler successive zur Annahme elliptischer Bahnen übergieng, die er anfangs nur der Rechnung wegen den empirisch gefundenen Ovalen substituirte. Quellen sind nirgends angeführt. H.

William Farr. Eine biographische Skizze von Franz Carl Lukas in Wien. 12 S.

Dem Andenken des Genannten widmet der Verfasser diesen Artikel (Rundschau d. Vorh. XXXIII. 1883. p. 401.) wegen seiner zahlreichen Schriften im medicinisch statistischen Fache. Er ist geboren 1807 in Kenley, gestorben den 19. April 1883. Von seinen Schriften werden angeführt 2 Artikel in den Schriften der Royal Society of London und 18 im Journal of Statistical Society of London. Noch mehr wird aber offenbar die Aufmerksamkeit auf ihn gelenkt durch seine Tätigkeit in den statistischen Congressen, welche zeigt, in wie hohem Ansehen er in seinem Fache stand. Von 1836 an war er Mitglied der Statist. Soc. Er vertrat die englische Regierung im ersten statistischen Congress in Brüssel, dann wieder in Paris, dann in Wien, ward in die Commission zur Aufstellung eines einheitlichen Münz-, Mass- und Gewichtssystems gewählt und war bei verschiedenen Veranstaltungen Berichterstatter. Seine Statistik bezog sich anfangs auf England, dehnte sich aber später auf die europäischen Hauptstaaten aus. H.

Het geboorte-jaar van Willebrordus Snellius. Door P. van Geer. Overgedrukt uit het Album der Natuur. 4 S.

Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius. Par P. van Geer. Extrait des Archives Néerlandaises, t. XVIII 16 S.

Erstere Schrift hat Bezug auf den frühern Artikel derselben Zeitschrift „Willebrordus Snellius" (s. 280. litt. Ber. S. 38) und enthält die reichlichen Ergebnisse fernerer Nachforschungen des Verfassers, welche dessen Angaben berichtigen und vermehren. Nach übereinstimmenden Angaben in Siegenbeek: Geschiedenis der Leidsche hoogeschool; van Kempen: Geschiedenis der Letteren en Wetenschappen in de Nederlanden; van der Aa: Biographisch woordenboek der Nederlanden; Poggendorff: Biogr. Wörterb.; Montucla: Hist. des Math. war die Geburt in das Jahr 1591 gelegt. Weit ausführlichere Berichte führen indes, obwol die directe Aussage überall fehlt, auf das Geburtsjahr 1581, in welchem er bereits im Einwohnerregister von Leiden aufgeführt ist. Er war der älteste der 3 Söhne Willebrord, Jakob und Heinrich von Rudolf Sn. und seiner Frau Machteld Cornelisdr, und Jacob ist, wie feststeht, 1582 geboren. 1600 las er schon mit seinem Vater an der Universität. Letzterer wohnte anfangs am Kirchhof, wo er viele Studenten als Kostgänger bei sich hatte, kaufte aber später ein eigenes Haus, welches Willebrord nach seinem Tode inne hatte. Willebrord heiratete den 1. Aug. 1608 Maria de Langhe, Tochter des Burgemeisters von Schoonhoven, und hatte 3 Kinder, Rudolf (Mediciner), Jannette und Lorenz (Jurist), die

keine Berühmtheit erlangt haben. Er starb den 30. Oct. 1626, seine Frau den 11. Nov. 1627. Alles, was in dieser und der frühern Schrift als Entdeckung aufgezeichnet ist, hat nun der Verfasser in den Arch. Néerl. zu einer vollständigen Lebensgeschichte verarbeitet.

H.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XVI. Roma 1883. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt ist folgender. A. Favaro: Einige ungedruckte Schriften von Galileo Galilei aus den Manuscripten der Biblioteca Nazionale von Florenz ausgezogen und illustrirt. — Leben des Leon Battista Alberti di Girolamo Mancini in Florenz, herausgegeben von G. C. Sansoni 1882. — Nicolaus Coppernicus von Leopold Prowe. Erster Band: Das Leben. 1 und 2. Teil. Berlin 1882. Weidmann. — Ueber einen Vortrag über die Magnetnadel von P. D. Benedetto Castelli. — Ungedrucker Vortrag über die Magnetnadel von P. D. Benedetto Castelli, publicirt nach dem Codex der Nationalbibliothek von Florenz, Sezione Palatina: „Die Schüler von Galileo“. Band I. Castelli Benedetto, Notizen und Schriften. — Litterargeschichtliche Studien über Euklid von J. L. Heiberg. Leipzig 1882. B. G. Teubner.

A. Genocchi: Bruchstück eines Briefes an D. B. Boncompagni (über Pepin's Herleitung eines Satzes von Fermat).

S. Realis: Ueber eine unbestimmte Gleichung.

A. Sparagna: Brief von C. G. Gauss an Heinrich Wilhelm Matthias Olbers. Uebersetzung ins Italienische. (Der deutsche Text folgt).

Ch. Henry: Ueber das Leben und die mathematischen Schriften von Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet. Es folgt das Verzeichniss seiner Arbeiten, ein Bericht über die ungedruckten und unter diesen vollständig herausgegeben: Des méthodes d'approximation pour les équations différentielles lorsqu'on connaît une première valeur approchée. — Probleme der praktischen Geometrie von Mydorge und Lösungen, zum erstenmal publicirt.

D. Bierens de Haan: Historisch wissenschaftliche niederländische Bibliographie.

F. Jacobi: Ueber das Problem „le noeud de cravate“ und einige Werke von Urbano d'Aviso Romano.

M. Steinschneider: Studien über Zarkali. 2. Artikel. — Ergänzung zu der Notiz (XIV. 721.) über ein ungedrucktes astronomisches Werk von Jbn Haitham.

L. Rodet: Lösungen der Probleme von Mydorge entnommen aus orientalischen Werken.

G. Uzielli: Untersuchungen über Paolo dal Pozzo Toscanelli.

A. Stiatesi: Ueber das Leben und die Arbeiten von Sebastiano Purgotti.

B. Boncompagni: Ueber 2 in der Zeitschrift „Giorn. degli eruditi e curiosi" gestellte Aufgaben.

Publicationsverzeichnisse im 2. 4. 6. 8. 10. 12. Heft.

Erd- und Himmelskunde.

Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie. Von Dr. Siegmund Günther, Professor am Gymnasium zu Ansbach. Zwei Bände. I. Band. Mit 77 in den Text gedruckten Abbildungen. Stuttgart 1884. Ferdinand Enke. 416 S.

Das Interesse an allen Fragen über die Natur der Weltkörper hat sich wol zu allen Zeiten weit über die Gelehrtenkreise hinaus erstreckt, tritt aber in neuester Zeit besonders lebhaft hervor. Wer bisher im einzelnen über solche Fragen nachgedacht oder von fremden Ansichten Kenntniss genommen hat, wird bei Durchlesung des vorliegenden Buchs staunen, bis zu welcher Grösse einerseits die Menge dieser grösstenteils ungelösten Fragen, andrerseits die Menge der Lösungsversuche und Meinungen, mithin auch die betreffende Litteratur angewachsen ist. Dies gesamte Material übersichtlich zusammengestellt zu haben ist unstreitig eine höchst dankenswerte Leistung. Auch wird der Erfolg des Unternehmens durch die bekannte Begabung des Verfassers in populärer Darstellung sehr unterstützt. Doch hat das Buch nichts gemein mit den Schriften derer, welche um der Popularität willen den Reiz des Wunderbaren vor der Belehrung bevorzugen. Die Tendenz ist vielmehr durchweg eine wissenschaftliche. Daher sind auch die zahlreichen Kosmophantasien der Neuzeit fast unberücksichtigt geblieben: die dahin gehörige Erklärung der Schwerkraft, die der Verfasser freilich viel zu günstig beurteilt, wird nur kurz erwähnt. Trotz einiger Aehnlichkeit dieser rückschrittlichen Bestrebungen mit den Erklärungsversuchen der Alten

hinsichtlich ihrer Aufstellungen sind doch letztere als Anfänge eines stabilen Entwickelungsganges ganz verschieden zu beurteilen. Es ist entschieden wesentlich für die Aufgabe des Buchs, dass es allen Nachrichten über dieselben, die zu uns gelangt sind, mit gleicher Aufmerksamkeit nachgeht. Ein Zweifel kann eher darüber erhoben werden, ob die auf höheren Rechnungen beruhenden Leistungen der Neuzeit zweckentsprechend behandelt sind. Eine genügende Einführung in deren Verständniss wird und darf man nicht von dem Buche erwarten. Der Verfasser hat versucht, den Lesern, welche die Originalwerke nicht studiren, wiewol nicht ohne Anwendung von Rechnung, die Doctrinen zum Teil zugänglich zu machen. Mag jeder selbst aussagen, ob er dadurch belehrt worden ist. Die behandelten Gegenstände sind in folgender Weise geordnet: Die kosmische Stellung der Erde, und zwar die Kant-Laplace'sche Hypothese, die physische Constitution der Körper des Sonnensystems, die der Erde ähnlichen Planeten und der Mond; allgemeine mathematische und physikalische Verhältnisse des Erdkörpers und zwar die Erde als Kugel und Rotationssphäroid, die Attractionsphänomene und deren Anwendung zur Bestimmung der Gestalt und Dichte der Erde, das Geoid, die Bewegung der Erde im Raume, die Graphik im Dienste der physischen Erdkunde; Geophysik im engern Sinne, dynamische Geologie, und zwar die Wärmeverhältnisse des Erdinnern, der innere Zustand der Erde, die vulcanischen Erscheinungen, Erdbeben. Auf jeden Abschnitt folgt das Litteraturverzeichniss mit Verweisung auf die Stellen, wo Erwähnung des Einzelnen geschehen ist. H.

Die mathematische Geographie in Verbindung mit der Landkarten-Projektion. Für Schulen und zum Selbstunterricht bearbeitet von Gustav Wenz. Mit 187 in den Text eingedruckten Figuren. München und Leipzig 1883. R. Oldenbourg. 297 S.

Der Verfasser hat es für gut befunden in das Lehrbuch der mathematischen Geographie allgemeine Mathematik in beträchtlichem Umfange aufzunehmen. Diese Auskunft würde man als natürliche leicht anerkennen, wenn es sich z. B. darum handelte, zur Vermeidung von Unterbrechungen die in Anwendung kommenden Sätze vorher in Erinnerung zu bringen. Anders aber lautet die Motivirung. Der Verfasser schliesst den Gedanken geradezu aus, dass die Schüler der mathematischen Geographie von Mathematik die geringste Kenntniss bereits besitzen, und befürwortet nur überhaupt gegen die (seiner Aussage nach) verbreitete Scheu vor der Mathematik die selbstverständliche Sache, dass man ihnen diese sicherste Stütze zuteil werden lasse. Hiernach muss es also wirklich Schulpläne ohne Mathematik, und doch mit mathematischer Geographie geben! In der Bearbeitung

des allgemein mathematischen Lehrstoffs ist ein leitender Gedanke schwer zu erkennen. Zu bemerken ist eine eigentümlich familiäre, nicht sonderlich präcise, oft bildliche Sprache. Während aber einerseits der Vortrag ganz bekannter Sätze aus den Anfangsgründen den Standpunkt sehr niedrig zu stellen scheint, ist doch andrerseits durch Auswahl, Anordnung, Erklärung und Herleitung so wenig für Einführung in ein leidliches Verständniss geschehen, dass man jene Beigabe eher für blosse Repetition halten möchte. Am wenigsten ausreichend aber ist sie zur Vorbildung für das Verständniss der darauf folgenden mathematischen Geographie in gegenwärtiger Abfassung, welche gleich anfangs ziemlich complicirte Raumvorstellungen in Anspruch nimmt. Es wäre gewiss möglich gewesen, diese Partien einfacher und dem Anfänger zugänglicher zu gestalten. In gegenwärtiger Bearbeitung kann das Buch nicht als Muster der Darstellung gelten. Die Abschnitte des Hauptteils sind: Mathematische Geographie, und zwar Gestalt und Grösse der Erde; Kugelbilder, und zwar die perspectiven Projectionen, Polar- und Aequatorial-, Meridian-, Horizontalprojection, die nicht perspectivischen Projectionen; Zonenbilder; Terrainbilder; dann astronomisch-mathematische Geographie, und zwar die Erde im Weltraum, der Mond, Ebbe und Flut, das Planetensystem, die Sonne und das Sonnensystem, Kometen und Asteroiden, Zodiakallicht, Arten der Sterne, das Weltall. Dann folgen 24 Tabellen und 3 Nachträge. H.

Neue exacte Methode für die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen nebst einer neuen Störungstheorie. Von M. Vodusék, Professor am k. k. Gymnasium in Laibach. Laibach 1883. Jg. v. Kleinmayr u. Fed. Bamberg. 162 S.

Die Schrift ist keine blosse Mitteilung dessen, was die Erfindung des Verfassers an der Methode gebessert hat, sondern ein Vortrag der gesamten Lehre der Bahnbestimmung von Anfang an, indem der 1. Abschnitt die geometrischen Beziehungen, namentlich zwischen geocentrischen und heliocentrischen Coordinaten, der zweite die Dynamik der Planetenbewegung behandelt. Gerade über die Punkte der Neuheit spricht das Buch nichts aus. In der Vorrede legt der Verfasser den Fortschritt gegen die bisherigen Methoden darin, dass nicht allein die Auflösung der sogenannten Fundamentalgleichungen, sondern auch die Bestimmung der darin vorkommenden Dreieckverhältnisse sowol bei Planeten als auch bei Kometen eine sehr einfache und elegante Gestalt angenommen habe. Das würde sich im 3. Abschnitt, Bahnbestimmung aus 3 Beobachtungen, auszuweisen haben. Hier werden zuerst die Verhältnisse der Dreiecke zwischen

Sonne und 3 Oertern des Planeten dargestellt, dann unter Annahme einer Bewegung im Kreise, bzhw. in der Parabel für Kometen, die angenäherten Werte von Unbekannten durch Probiren ermittelt, dann die Coordinaten in die taylor'sche Reihe entwickelt und die Coefficienten durch die Bewegungsgleichungen bestimmt. Wenn man nun einräumt, dass die hier gegebenen Relationen und dadurch gewonnenen Controlen einfacher sind als die gewöhnlichen, so ist doch die fernere Behauptung des Verfassers in der Vorrede nicht wol zu verstehen, er hätte eine Controle geschaffen, deren Schärfe die Beobachtungen oft kaum vertragen würden; dafür fielen die Methode der kleinsten Quadrate, Variation der Constanten u. s. w. als überflüssige Surrogate ganz weg, denn es wäre einleuchtend, dass eine aus wenigen guten Beobachtungen vermittelst einer richtigen Methode durchgeführte Bahnbestimmung mehr leisten müsste, als alle andern secundären Hülfsmittel zusammengenommen, wenn ihnen die richtige Basis fehlte. Nun ist aber nirgends gesagt, was die für überflüssig erklärte Ausgleichungsrechnung ersetzen soll. Die aufgestellten Controlen zeigen nur an, dass mehr oder weniger fehlerhafte Elemente überhaupt vorhanden sind. Von deren Ermittelung spricht das Buch gar nicht; ja es werden nicht einmal die Fehler der Hypothesen, nämlich der Isolirung des Planeten und der Kreisbewegung, und die Beobachtungsfehler begrifflich unterschieden. Hierdurch wird es erklärlich, dass die Mondbahn auf 5, die Störungsrechnung auf 21 Seiten behandelt werden konnte. Die Bahnbestimmung aus 4 Beobachtungen ist nur rücksichtlich der Kometen untersucht und im 4 Abschnitt hinzugefügt werden. H.

Die Fixsterne. Von Dr. C. F. W. Peters, Professor an der Universität zu Kiel. Mit 9 Figuren in Holzstich. Leipzig 1883. G. Freytag. Prag: F. Tempsky. 163 S.

Die Sonne und die Planeten. Populär-wissenschaftlich dargestellt von E. Becker, Dr. phil. und 1. Observator an der Sternwarte zu Berlin. Mit 68 Abbildungen. Leipzig 1883. G. Freytag. Prag: F. Tempsky. 296 S.

Die Kometen und Meteore. In allgemein fasslicher Form dargestellt von Prof. Dr. W. Valentiner. Vorstand der grossherzoglichen Sternwarte in Karlsruhe. Mit 62 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig 1884. G. Freytag. Prag: F. Tempsky. 240 S.

Diese 3 Schriften bilden bzhw. den 16., 10. und 27. Band der „Deutschen Universal-Bibliothek für Gebildete", von welcher der

12. Band, enthaltend die Lehre von der Wärme, im 278. litterarischen Bericht besprochen worden ist. Die darin gegebene allgemeine Charakteristik der Behandlungsweise gilt auch von dem Vorliegenden, so dass nur die besondern Gegenstände näher anzugeben sind.

Das erste Buch behandelt nach einander: die äusseren Erscheinungen der Fixsterne, ihre Entfernungen, ihre Eigenbewegungen, die Doppelsterne, veränderlichen Sterne, Sternhaufen und Nebelflecke, die physische Beschaffenheit der Fixsterne.

Das zweite: die scheinbaren Bewegungen der Sonne und der Planeten, die Weltsysteme der Alten, die Koppernikanische Lehre, die Keplerschen Gesetze, die allgemeine Attraction, die Entfernung der Erde von der Sonne, das Sonnen- und Planetensystem, die Sonne, die einzelnen Planeten nebst ihren Trabanten, mit Beigabe einer Tabelle der Elemente der grossen und kleinen Planeten.

Das dritte: die Natur der Bahnen der Kometen, viele einzelne Kometen, die Natur der Sternschnuppen, Berichte über Beobachtungen derselben. H.

Die Zunahme der Wärme mit der Tiefe ist eine Wirkung der Schwerkraft. Von Gotthold Landenberger. Stuttgart 1883. J. G. Cotta. 28 S.

Der Satz, welcher als Titel der Schrift vorangestellt wird, ist nur einer der Gegenstände, von denen sie handelt, doch darf man wol daraus schliessen, dass der Verfasser auf ihn hauptsächlich Wert legt. Gerade dieser Satz aber ist nicht neu, sondern bereits 1860 in Poggendorff's Annalen, Bd. CX. p. 598 hergeleitet, und die Zunahme unter 2 verschiedenen extremen Hypothesen, zwischen denen das actuelle Verhalten liegen muss, berechnet worden. Nicht erst bei der Krönig'schen Hypothese über die Constitution der Gase, auf welche sich das Gegenwärtige stützt, sondern unter der blossen Voraussetzung, dass die Wärme in der lebendigen Kraft von Körperatomen besteht, ist ersichtlich, dass ein bewegtes Atom, sofern nur seine Höhe variirt, nach unten zu eine grössere lebendige Kraft, mithin auch Wärme, mitbringt und an ein andres Atom übertragen kann als nach oben zu, dass daher in Bezug auf Wärmeleitung Gleichgewicht der Temperatur stattfindet, wo dieselbe nach unten zunimmt. Dies ist der in Rede stehende Satz. Er schliesst nicht aus, einerseits dass durch Strahlung im Innern beständige Ausgleichung der Temperaturdifferenz, durch Strahlung nach aussen beständige Abkühlung der Erde stattfindet, andrerseits dass die Temperaturdifferenz, soweit sie überschüssig vorhanden ist, mit Abkühlung durch Leitung verbunden auf-

tritt. Nach Begründung jenes Satzes untersucht die Schrift noch eine Reihe weiterer Fragen. Die Geschwindigkeit der Luftmolecüle findet sie = 970 Meter, die Höhe der Atmosphäre = 48000 Meter, die Geschwindigkeit verschiedener Gase bei gleicher Temperatur soll sich wie die Quadratwurzeln aus dem specifischen Gewicht verhalten. Ferner entwickelt der Verfasser seine Ansicht über die Temperatur der Atmosphäre an ihrer Grenze, nach ihr besteht die oberste Schicht aus Wasserstoff. Weil die Berge auf ihre Basis stärker drücken als die Luft von gleicher Höhe, soll die Temperaturdifferenz in ihnen grösser, mithin ihre Gipfel kälter als die umgebende Luft sein, wodurch sich die Nebelbildung erklärt. Gründe findet der Verfasser für alle seine Aufstellungen, vermöge deren Originalität haben letztere etwas anregendes. H.

Wie erklären sich Erdmagnetismus und Erdbeben? Eine naturwissenschaftliche Studie von Hermann Gringmuth. Dresden 1883. E. Pierson. 15 S.

Der Verfasser nimmt an, dass die Erde von gewisser Tiefe an im liquiden, von grösserer Tiefe an im gasförmigen Zustande sei, die innere Kugel aus Gas der schwersten Stoffe bestehe. Zwischen der Gaskugel und der festen Hohlkugel soll nun elektrische Spannung stattfinden. Dass die liquide Zwischenschicht isolirend wirkt, ist nicht ausgesprochen, scheint aber hiernach Voraussetzung zu sein. Ueber die Erzeugung des Erdmagnetismus spricht nur der kurze Satz: „Aus den Aeusserungen der durch die Axenrotation des Gascentrums hervorgerufenen elektrischen Tätigkeit und Umlaufes der elektrisirten innerirdischen flüssigen Masse erkläre ich die Erscheinungen des Erdmagnetismus.“ Das Weitere bezieht sich nur auf Unregelmässigkeiten. Hiermit hat der Verfasser einen neuen Motor hingestellt; die Erklärung mag sich daraus der Leser, wenn es ihm gelingt, selbst bilden. Die magnetischen Pole sollen durch die absolute Rotation der Erde im ganzen bedingt sein. Dann würden sie offenbar unabhängig von der Entstehung des Magnetismus zu demselben hinzukommen. Von solchen Fehlern des Ausdrucks (wie schon oben „Rotation des Centrums“) wollen wir gern absehen, da die Darstellung sachlich soviel vermissen lässt. Näher geht die Schrift auf Erklärung der Erdbeben ein. Sie entstehen durch Entladungen der genannten elektrischen Spannung; doch können manche auch andre Ursachen haben. Auf Verschiedenheit der Ursachen deutet der Umstand, dass öfters Erdbeben in der Nähe von Vulcanen stattgefunden haben, die dabei ruhig blieben. Es werden viele Fälle angeführt, wo

Erdbeben mit elektrischen Erscheinungen verbunden auftraten. Der Nachtrag, betreffend die Sonnenflecken, steht in keiner ersichtlichen Beziehung zur neuen Hypothese. H.

Astronomischer Kalender für 1884. Nach dem Muster des Karl von Littrow'schen Kalenders herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Neue Folge. Dritter Jahrgang. Wien 1884. Carl Gerold's Sohn.

Die beiden ersten Jahrgänge sind im 271. und 276. litt. Bericht, bzhw. S. 33 und 45 besprochen. Die gegenwärtigen Beilagen enthalten: die grossen Kometen der Jahre 1843, 1880 und 1882; neue Planeten und Kometen; Uebersicht des Planetensystems; alphabetisches Verzeichniss der Asteroiden; Verzeichniss der Asteroiden nach der Zeit ihrer Entdeckung; Bahnelemente der grossen Planeten, der Satelliten, der Asteroiden; Gebührenscala. H.

Meteorologische Zeitschrift, herausgegeben von der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft, redigirt von Dr. W. Köppen, Hamburg, Seewarte. Erster Jahrgang 1884. Berlin, A. Asher u. Co.

Von dieser neuen Zeitschrift erscheint monatlich ein Heft, enthaltend Abhandlungen, Correspondenzen und Notizen, Vereinsnachrichten und Bibliographie. Das 1. Heft gibt einige Nachrichten über die Gründung der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft, welche am 17. November 1883 nach Vorgang und Vorbild der Oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie auf Anregung des Directors der Seewarte, Geh. Admir.-Rats Prof. Dr. Neumayer stattgefunden hat, neben ihr besteht, und im Anfang dieses Jahres bereits 296 Mitglieder zählte. Ueber die Statuten und die Ordnung der Vereinsthätigkeit finden sich darin keine Mitteilungen. Zweigvereine haben sich nach einander gebildet in Magdeburg, Berlin, München und Rudolstadt. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

IV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Prowe, L., Nicolaus Copernicus. 2. Bd. Urkunden. Berlin, Weidmann. 15 Mk.

Weyr, E., üb. d. Geometrie der alten Aegypter. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Methode und Principien.

Alth, G. R. v., üb. d. absolute Masssystem u. die Theorie der Dimensionen. Wien, Hölder. 1 Mk.

Dellingshausen, Baron N. v., die Schwere od. das Wirksamwerden der potentiellen Energie. Stuttgart, Schweizerbart. 1 Mk. 60 Pf.

Flammerion, C., das bewohnte Welten-All. Astronom. u. philosoph. Betrachtgn. 2. Afl. bearb. v. A. Drechsler. Leipzig, Weber. 4 Mk.; geb. 5 Mk.

Killing, W., Erweiterg. d. Raumbegriffes. Mathemat. Abhandlung. Braunsberg, Huye. 1 Mk. 60 Pf.

Schneider, G., die platon. Metaphysik, auf Grund d. im Philebus gegeb. Principien in ihren wesentl. Zügen dargest. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Secchi, A., die Einheit d. Naturkräfte. Ein Beitr. zur Naturphilosophie. Uebers. v. R. L. Schulze. 2. Afl. 3. u. 4. Lfg. Leipzig, Frohberg. à 2 Mk.

Veyder-Malberg, A. Frhr. v., üb. d. Einheit aller Kraft. Eine Abhandlg. Wien, Seidel & S. 5 Mk.

Sammlungen.

Grosse, F., Antworten u. Lösgn. zu d. Rechenbuch f. Seminare, Mittelschulen u. d. mittl. Klassen höh. Lehranstalten. Münster, Nasse. 1 Mk.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Zweiter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1885.

Inhalts-Verzeichniss

des zweiten Teils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite
	Methode und Principien.		
III.	Die Umkehrung des Grundgedankens von Hindenburg's combinatorischer Analysis. (Fortsetzung). Von Friedrich Roth	I.	82
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
IV.	Ein Satz über Determinanten. Von R. Hoppe	I.	106
XI.	Ueber einen Satz der Zahlentheorie. Von F. Gomes Teixeira	III.	265
XV.	Ueber die vollkommenen Zahlen, insbesondere über die bis jetzt zweifelhaften Fälle $2^{40}.(2^{41}-1)$, $2^{46}.(2^{47}-1)$ und $2^{52}.(2^{53}-1)$. Von P. Seelhoff	III.	327
XV.	Zur Analyse sehr grosser Zahlen. Von P. Seelhoff	III.	329
XV.	Bemerkungen über Gleichungsauflösung. Von Th. Sanio	III.	332
XIV.	Neue Relationen innerhalb eines Orthogonalcoefficientensystems. Von R. Hoppe	IV.	413
XXI.	Zur Convergenz der Reihen. Von A. Börsch	IV.	445

№ der Abhandlung. Heft. Seite.

Integralrechnung.

		Heft.	Seite.
II.	Zur Integration der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Von Otto Ohnesorge	I.	53
VII.	Transformation der elliptischen Integrale und Functionen in Verbindung mit der Theorie der Kettenlinie. Von Emil Oekinghaus	II.	138
XX.	Rein analytische Consequenzen der Curventheorie. Von R. Hoppe	IV.	417

Geometrie der Ebene.

		Heft.	Seite.
IV.	Zur harmonischen Teilung. Von B. Sporer . .	I.	111
V.	Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten. Von P. H. Schoute	II.	113
XV.	Mehrfach collineare Dreiecke bei Kegelschnitten. Von J. Vályi	III.	320
XV.	Ueber drei geometrische Kreisörter. Von Karl Zelbr	III.	324
XVII.	Das Sehnen-Tangentenviereck. Von Schumacher	IV.	383
XXI.	Eine Gruppe planimetrischer Maxima und Minima. Von J. Lange	IV.	430
XXI.	Ein Dreieckssatz. Von Emil Hain	IV.	435
XXI.	Ein Satz über Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind. Von A. Sporer	IV.	437
XXI.	Wann stehen die von einem Punkte an eine Kegelschnittslinie gezogenen 2 Tangenten auf einander senkrecht? Von Franz Schiffner	IV.	442
XXI.	Archimedische Kreisquadratur. Von R. Hoppe	IV.	447

Geometrie des Raumes.

		Heft.	Seite.
IV.	Bemerkung zu einem Satze von Craig. Von R. Hoppe	I.	103
VI.	Erweiterung des Aoust'schen Problems der Curventheorie. Von R. Hoppe	II.	129

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite
VIII.	Die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Functionen. Von Paul Richard Domsch .	II.	193
X.	Fortsetzung	III.	225
IX.	Beweis, dass auf einer algebraischen Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden ausser dieser nicht mehr als 16 Geraden liegen können. Von Alfred Leman	II.	223
XII.	Zum Molins'schen Problem. Von R. Hoppe .	III.	269
XIV.	Die Cono-Cunei. Von Carl Pabst	III.	281
XVI.	Fortsetzung	IV.	337
XXI.	Körper zwischen 2 Rotationsellipsoiden. Von Albert Bieler	IV.	439

Trigonometrie.

XVIII.	Trigonometrische Sätze, Von A. H. Anglin .	IV.	407

Mechanik.

XIII.	Bewegung eines senkrecht empor geworfenen Körpers. Von R. Hoppe	III.	274

Optik, Akustik und Elasticität.

I.	Der Winkelspiegel. Von R. Mack	I.	1
IX.	Zur Theorie des Winkelspiegels. Von Karl Mack	II.	220
IV.	Ein Beitrag zur Schattenlehre. Von F. Procházka	I.	101
IV.	Ueber die Grenze der Stabilität eines longitudinal comprimirten geraden elastischen Stabes. Von R. Hoppe	I.	108

Litterarische Berichte.

V. Becker (Math. als Lehrgegst.). Sylvester (Am. J. VI.) Mittag-Leffler (A. M. IV.).

VI. Krebs (Phys.). Zenger (Sp. Elektr.). Wallentin (Gener. b. Elektr.). Popper (elektr. Kraft Uebertr.). Fourier (Wärme).

Uppenborn (elektr. Masss.). Lisser u. B. (Zschr. ph. Unt.). Lie (Arch. II--VII.). Teixeira (Jorn. III. IV.) Amsterdam (N. Arch. XI.). Mansion (Math. IV.). Hamburg. math. Ges. (Mitt. III. IV.). Association Française (Congr. Lille, la Rochelle) Brüssel Akad. (Bull. I—V.) Amsterdam (Versl. en Meded. XVIII.). Smithson. Inst. (Rep. 1881—2). Washington Phil. Soc. (Bull. IV. V.). R. Acc. Linc. (Trans. VIII.). Böklen (math. natw. Mitt. I.).

VII. Frege (Grdl. d. Ar.). Vogt (Grenzbegr.). Teixeira (Jorn. V.). Mittag-Leffler (A. M. V.) Amsterdam (Versl. en Meded. XIX. XX.).

VIII. Walberer (Ar. u. Alg.). Köstler (Ar. — Vorsch. Geom.). Hoch (eb. Geom.). Glinzer (Geom.). Fischer (Geom.). Gusserow (Ster.). Spieker (Trig.). Sickenberger (Ar.). Gerlach (Plan.). Wrobel (Prop. Progr.). Claussen (Ar. u. Alg.). Hofmeister (Phys.). Blum (Phys.) Jüdt (Aufg.). Prampero (log. quadr.). August (5st. Log.). Claussen (5st. Log.). Hartner (Geod.). Bohnenberger (Vermess.). Messerly (Rev. Su. op.).

Berichtigungen

im LXX. Teile d. 1. Reihe:

Seite 433 in Gl. (4) links statt $C^w{}_m(r)$ setze $C^w{}_m(n)$

im II. Teile d. 2. Reihe:

Seite		Zeile				statt		setze	
Seite	2	Zeile	25	v.	ob.	statt	und	setze	um
„	4	„	3	„	„	„	von	„	vor
„	7	„	10	„	„	„	2(*m*	„	(2*m*
„	8	„	1	v.	unt.	vor	mit *B*	„	weil es

Seite	9	Zeile	9	v. unt.	statt	ja	setze	je
„	10	„	11,14	v. ob.	„	P_{x+1}	„	P'_{x+1}
		„	18	„ „	„	$=$	„	$<$
„	11	„	9	v. unt.	„	substituirt	„	statuirt
„	12	„	12	v. ob.	„	gemäss	„	gewiss
		„	17	„ „	„	P	„	P_x'
		„	20	„ „	„	P_x'	„	P'_{x-1}
		„	22	„ „	„	P'	„	P_x'
„	16	„	3	„ „	„	φ_3	„	φ_2
„	19	„	9	„ „	„	Q_{n-1}	„	R_{n-1}
„	20	„	16	„ „	„	φ_1	„	φ_2
„	22	„	18	„ „	(3mal)	K	„	V
„	23	„	3	„ „	„	B	„	$\mathfrak{B}$
„	25	„	2	v unt.	„	M_2''	„	M_2'
„	26	„	3	v. ob.	„	OO	„	BO
„	27	„	6	„ „	„	Lage	„	Länge
„	29	„	3	„ „	„	$2\alpha =$	„	$2n =$
„	32	„	8	v. unt.	„	$\mathfrak{B}\mathfrak{P}$	„	$\mathfrak{B}P$
„	33	„	9	v. ob.	„	P_v'	„	P_v''
„	34	„	10	v. unt.	„	$= 2\alpha$	„	$= n . 2\alpha$
„	39	„	19	v. ob.	„	von	„	vor
		„	2	v. unt.	nach	§ 11.	„	zu einem andern
„	40	„	11	v. ob.	statt	zwischen	„	gewissen
„	41	„	20	„ „	nach	so ist	„	s
„	42	„	17	„ „	statt	P_n	„	P'_n
		„	18	„ „	„	$\mathfrak{M}$	„	$\mathfrak{P}$
„	43	„	11	v. unt.	„	E_6'	„	P_6'
		„	5	„ „	„	jenem	„	jenen
„	44	„	9	v. ob.	„	P_x'	„	P_n'
„	45	„	21	v. unt.	„	jene	„	je
		„	13	„ „	„	E_k	„	E_k'
„	46	„	1	v. ob.	„	ungerader		gerader
		„	10	„ „	„	Σ_{n+1}'	„	Σ_{n+1}'
		„	19	„ „	„	ihnen	„	ihm
„	47	„	13	v. unt.	„	V	„	IV
		„	5	„ „	„	I	„	V
		„	2	„ „	nach	Ebene	„	UVR_n

Seite		Zeile					
Seite	48	Zeile	4 v. ob.	statt	fehlte	setze	fehlt
		„	14 v. unt.	„	Σ_{n+2}'	„	Σ_{n+1}'
		„	4 „ „	„	$\mathfrak{N},$	„	$\mathfrak{N}_1$
„	49	„	12 v. ob.	„	eines	„	reines
		„	21 „ „	nach	etwa	„	sich
„	50	„	1 v. unt.	statt	absoluter	„	aliquoter
„	55	„	7. v. ob.	„	(ξ)	„	$\tau(\xi)$
		„	17 „ „	„	(ξ, η)	„	$(\xi-\eta)$
„	58	„	3 „ „	„	$\chi_1(\eta)$	„	$\chi_2(\eta)$
		„	13 v. unt.	„	$\varphi(\xi)$	„	$\varphi(\eta)$
		„	12 „ „	„	$\chi(\xi, \omega(\eta$	„	$\chi(\eta, \omega(\eta$
„	59	„	8 „ „	nach	$\varphi_2(\eta)$	„	setzt
„	60	„	14 „ „	statt	aber	„	also
„	61	„	11 „ „	„	„	„	„
		„	7 „ „	„	$c\xi+a$	„	$c\xi+d$
„	64	„	12 „ „	„	höherer Geraden	„	höheren Grades
„	82	„	17 „ „	vor	auf S. 427	„	in T. LXX.
„	86 bis 88		überall	statt	w	„	ω ausser in ${}^wC$
„	87	Zeile	3 v. unt.	„	$\binom{p+1}{m}$	„	$\binom{p+r}{m}$
„	92	„	17 „ „	„	gemacht	„	genannt
„	93	„	5 v. ob.	„	er	„	r
		„	15 „ „	„	$(m-1)r$	„	$(n-1)r$
		„	16 v. ob.	„	nur	„	und
		„	11 v. unt.	„	${}^rC$ $(n-1$ $(n-1)s$	„	${}^rC$ $(n-1)$ $(n-1)r$
„	94	„	1 v. ob.	„	c	„	b
		„	7 „ „	„	b^{2s-m}	„	b^{2r-m}
„		„	10 v. unt.	„	$\overline{r\ \ x}$	„	$\overline{r-x}$
„	95	„	9 v. ob.	„	a und c	„	a und b
		„	10 „ „	„	$2r\ \ q$	„	$2r-q$
		„	15 „ „	„	braucharen	„	brauchbaren
„	97	„	16 „ „	„	nieder	„	wieder
		„	21 „ „	„	*ab*	„	ab
„	98	„	7 v. unt.	„	Berechnung	„	Beachtung.

I.

Der Winkelspiegel.

Genaueres über Lage und Anzahl der Bilder eines in seine Oeffnung eingeführten Gegenstandes.

Von

L. Mack.

(Mit einer Figur.)

Bezüglich der Erscheinungen am Winkelspiegel wird als Fundamentalaufgabe auszusprechen sein die folgende.

Gegeben sei die Oeffnung des Winkelspiegels in beliebig bestimmter Grösse, und ebenso beliebig bestimmt die Lage eines in jene eingeführten leuchtenden Punktes. Für die sich ergebenden Bilder desselben, welche in zwei charakteristisch verschiedene Reihen zerfallen, soll ermittelt werden: 1) die Lage jedes einzelnen mit gesetzmässiger Bestimmtheit, 2) je die Anzahl der in einer Reihe befindlichen, 3) die Anzahl aller zusammen, 4) die eigentümlichen Verhältnisse ihrer gegenseitigen Lage; je die entsprechende Angabe mathematisch formulirt in der Art, dass ihre Abhängigkeit von den gemachten Voraussetzungen völlig klar liege.

Wie diese Fundamentalaufgabe auch nur mit Bezug auf Nr. 3) streng gelöst wird, so zeigt sich, dass in einer Menge von Fällen, bei bestimmt gegebener Oeffnungsgrösse, die Gesammtzahl der Bilder eines die beiden Einzelspiegel bestrahlenden Punktes bald grösser, bald kleiner wird, jenachdem dieser Punkt seine Stellung zwischen beiden verändert. Hieraus folgt, dass für einen ausgedehnten Gegenstand, der in die Oeffnung eingeführt ist, einige der zu er-

wartenden Erscheinungen durchaus nicht so einfach sich gestalten, als man gewöhnlich sich vorstellen möchte; es ergibt sich also die Forderung, dass auch über diese Erscheinungen genügende Aufklärung gegeben werde.

Sieht man nun auf das in unsern Lehrbüchern Gebotene, so wird Niemand behaupten wollen, dass es auch nur den Forderungen der Fundamentalaufgabe (zu schweigen von den weiter anzuknüpfenden) genüge. Vielmehr wird man zugeben müssen, dass jene sowol in Betreff der Genauigkeit als der Vollständigkeit gar Manches zu wünschen übrig lassen, wie denn selbst von eigentlichen und starken Irrtümern oder Verstössen auf diesem Gebiete Verschiedenes zu berichten wäre.

Sucht man nach Originalarbeiten über den fraglichen Gegenstand, so findet sich eine solche von Bertin in den annales de chimie et de physique, série III, tome 29, page 257 ... 262; Paris 1850. – Der Verfasser berührt zunächst die Notwendigkeit des Aufräumens mit landläufigen falschen Angaben, will übrigens wesentlich nur auf die Frage nach der G e s a m m t z a h l d e r B i l d e r e i n e s e i n z e l n e n L i c h t p u n k t e s sich einlassen. Dass diese immer eine begrenzte sei, will er mit wenigen Worten klar machen. Er hebt auch ganz richtig den Umstand hervor, an welchen zu diesem Behuf anzuknüpfen ist; indes einen wirklichen Beweis gibt er keineswegs. — Behufs der Erreichung seines Hauptzwecks unterscheidet er zwei Hauptfälle, jeden mit zwei Unterfällen. Hiernach betrachtet er vier besondere Figuren, und das von ihnen Abzulesende sofort in allgemeine Angaben umzusetzen, und zuletzt einen Generalsatz über die Gesammtheit der Bilder auszusprechen. Dieser ist zwar streng richtig, aber nicht übersichtlich; und sein zweiter Teil ist nicht bestimmt genug und nicht in solcher Weise gefasst, dass sofort für jede gegebene Oeffnungsgrösse und jede gegebene Lage des eingeführten Lichtpunkts die Zahl der sich ergebenden Bilder unzweideutig zu gewinnen wäre.

Aus neuester Zeit ist in Poggendorff's Annalen, Band VII, Stück 2, pag. 103 ... eine russisch geschriebene Arbeit angezeigt: M. Pawloff, Untersuchung der Frage über die Bilder in zwei zu einander geneigten ebenen Spiegeln. Der Berichterstatter sagt kurz: „indem der Verfasser zuerst nachweist, dass die Anzahl der Bilder immer eine begrenzte ist, zeigt er weiter, wie für jede Lage der Spiegel und für jede Lage des leuchtenden Punkts diese Zahl zu bestimmen ist."

Dass bei Pawloff wie bei Bertin so und so viele Forderungen der Fundamentalaufgabe unerfüllt geblieben seien, ist aus den gemachten Mitteilungen zur Genüge zu ersehen; ich möchte aber das besonders hervorheben, dass weder bei Bertin, noch bei Pawloff

(nach der Poggend. Angabe) irgend Erhebliches über die Eigentümlichkeiten der gegenseitigen Lage der Bilder zu finden sei. Gerade aber diese Eigentümlichkeiten, namentlich bei denjenigen zwei Bildern hervortretend, welche als letzte, jedes von einem der Einzelspiegel geliefert werden, sind im höchsten Grade überraschend. Schon ihre Ermittlung und Hervorhebung dürfte für die Berechtigung der hier zu veröffentlichenden Arbeit sprechen, wenn man auch bezüglich der arithmetischen Frage mit dem Richtigen, was schon Bertin gegeben hat, sich beruhigen wollte. Uebrigens ist gegenwärtige Arbeit in dem Sinne gemeint, dass sowol die oben ausgesprochene Fundamentalaufgabe vollständig gelöst, als auch der weiteren an sie geknüpften Forderung genügt werde.

Bei der hier durchgeführten Art der Untersuchung und Darstellung wird der aufmerksame Leser nach gezeichneten Figuren so wenig Verlangen tragen, dass er selbst diejenige überflüssig finden könnte, welche zur Veranschaulichung gewisser Definitionen und Bezeichnungen beigelegt ist; welche übrigens immerhin dienen mag, um bei den verschiedensten Gestaltungen oder Einteilungen des Operationsfeldes die Orientirung in diesem zu erleichtern.

---

§ 1.

Winkelspiegel heisst eine Zusammenstellung zweier undurchsichtigen Planspiegel, in der Art angeordnet, dass die allein spiegelnden Vorderflächen derselben zwischen sich einen hohlen Flächenwinkel ($< 180^0$) haben.

Dieser Flächenwinkel und seine Scheitelkante UV werden beziehungsweise als Oeffnung und Axe des Winkelspiegels bezeichnet.

Die allein spiegelnden Vorderflächen sind zu denken als zwei aus UV entspringende Ebenenstücke, die sich beliebig weit erstrecken: UVA den ersten Planspiegel abgebend, UVB den zweiten.

Zu den Ebenenstücken UVA, UVB sind ihre über UV hinaufgehenden Erweiterungen $UV\mathfrak{A}$, $UV\mathfrak{B}$ einzuführen, jede derselben rein geometrisch gedacht.

Bei jeder der Vollebenen $AUV\mathfrak{A}$, $BUV\mathfrak{B}$ heisst vordere Seite diejenige, an welcher die zugehörige Halbebene ihre spiegelnde Kraft entwickelt.

§ 2.

Sofern hinter einem der Einzelspiegel ein Bild erscheint, hervorgerufen durch einen von ihm befindlichen Gegenstand, möge solches kurz ein diesem Spiegel zugehöriges Bild genannt werden.

Wenn nun ein leuchtender Punkt P frei innerhalb der Oeffnung des Winkelspiegels sich befindet, so sind zunächst die zwei Bilder in's Auge zu fassen, deren jedes durch einen der Spiegel für sich, ohne Mitwirkung des andern, entsteht. Diese zwei niemals fehlenden sind notwendig von einander getrennt. Jedes liegt symmetrisch zu der Ebene desjenigen Spiegels, dem es zugehört. Diese zwei Bilder heissen die Bilder erster Ordnung.

Jedes von ihnen, wenn es vor dem Spiegel liegt, dem es nicht zugehört, verhält sich diesem gegenüber wie ein leuchtender Gegenstand, von welchem gedachter Spiegel ein neues (hinter ihm liegendes) Bild liefert — ein Bild zweiter Ordnung.

Von jedem der beiden Bilder zweiter Ordnung wird derjenige Spiegel, dem es nicht zugehört, möglicher Weise (wenn es eben vor ihm liegt) ein neues Bild geben — ein Bild dritter Ordnung; u. s. w.

Um jedes dieser Bilder sowol bezüglich seiner Zugehörigkeit zu einem bestimmten der zwei Einzelspiegel, als nach seiner Ordnung kenntlich zu machen, gebrauchen wir die Bezeichnung P_m' für das zu dem ersten Spiegel gehörige Bild $m$ter Ordnung, dagegen P_m'' für sein zum zweiten gehöriges derselben Ordnung. Demgemäss werden die zum ersten Spiegel gehörigen Bilder des Punkts P hier der Reihe nach benannt werden P_1', P_2', P_3' ...; die zum zweiten gehörigen der Reihe nach P_1'', P_2'', P_3'' ...

Da immer das von einem Gegenstand erhaltene Spiegelbild symmetrisch mit jenem liegt bezüglich der Ebene des zugehörigen Spiegels, so ist hieraus zunächst folgendes allgemein Bekannte zu entnehmen.

Alle durch das Zusammenwirken beider Einzelspiegel sich ergebenden Bilder des Punktes P befinden sich in derjenigen Ebene, welche durch P normal zu der Axe UV zu führen ist, die einen Durchschnittspunkt O mit jener gibt. Auch haben alle solche Bilder denselben Abstand von O wie P selbst; sie liegen mit P auf der Peripherie eines um O als Mittelpunkt zu beschreibenden Kreises.

Mit diesem Ortskreise der Bilder von P hat jedes der aus Axe UV entspringenden Ebenenstücke UVA, $UV\mathfrak{A}$, UVB, $UV\mathfrak{B}$ seinen bestimmten Durchschnittspunkt; diese Punkte selbst sollen der Reihe nach mit A, $\mathfrak{A}$, B, $\mathfrak{B}$ bezeichnet sein, und bei jedem der Paare (A, $\mathfrak{A}$), (B, $\mathfrak{B}$) ist zu beachten, dass es zwei Gegenpunkte des Kreises enthält. (Siehe Figur.)

Auf dem zwischen beiden Spiegelflächen selbst begriffenen Bogenstück APB heben wir ausser P noch hervor den Halbirungspunkt M desselben; so auch den Punkt P_0, welcher zu P symmetrisch mit Bezug auf die Gerade OM liegt. Zu diesen Punkten erscheinen beziehungsweise $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}_0$ als ihre Gegenpunkte auf dem Bogenstück $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$, welches zwischen den zwei Ebenenstücken $UV\mathfrak{A}$, $UV\mathfrak{B}$ begriffen ist. Hierbei die Möglichkeit vorbehalten, dass P und P_0 in M zusammenfallen, und demgemäss $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{M}$.

Es liegt nahe auch die Radien einzuführen, die aus O nach den erwähnten Peripheriepunkten gehen. Von diesen sind uns zunächst OA, OB aus dem Grunde besonders wichtig, weil sie die Spuren der zwei Einzelspiegel in der Ebene der Bilder des Punktes P sind, während zugleich der (hohle) Winkel AOB die Grösse 2α der Oeffnung des Winkelspiegels darstellt.

Für jedes der Bilder des Punktes P ist seine Lage vollständig bestimmt, einesteils durch die Länge des von O nach solchem Bilde gehenden Fahrstrahles, welche Länge gleich OP selbst ist, — andernteils durch die Grösse des Winkels, um welchen gedachter Fahrstrahl von der Spur (OA oder OB) des bezüglichen Spiegels, auf der Rückseite des letzteren, abweicht.

Jeder derartige Winkel soll hier durch eine absolute Zahl dargestellt werden, welche auf den Grad als Einheit sich bezieht. — Ist nun ein Winkel $AOP_x' = \psi$ angegeben, so heisst dies, dass man aus der Lage OA in die Lage OP_x' komme durch eine Drehung um ψ^0, in der Richtung über $O\mathfrak{B}$ nach $O\mathfrak{A}$; dagegen eine Angabe Wkl. $BOP_y'' = \omega$ besagt, dass man aus der Lage OB in die Lage OP_y' komme durch eine Drehung um ω^0 in der Richtung über $O\mathfrak{A}$ nach $O\mathfrak{B}$.

Anmerkung. Vorstehender § hält streng fest die ganz bestimmte Voraussetzung, dass der Punkt P frei innerhalb der Oeffnung des Winkelspiegels liege, d. h. in keiner der zwei spiegelnden Flächen UVA, UVB selbst sich befinde. — Es mag gut sein sich klar zu machen, wie ganz anders gegenüber von solchem Punkt P die Verhältnisse für einen andern leuchtenden Punkt sind, wenn dieser in der Fläche eines der zwei Einzelspiegel selbst — immerhin seitwärts von der Axe UV — gegeben ist.

Angenommen, der Punkt A des ersten Einzelspiegels sei ein leuchtender.

Sofern nun A vor dem zweiten Spiegel liegt, so entsteht gewiss hinter diesem ein Bild A_1'', von A in derselben Weise abstammend wie P_1'' von P; und von A_1'' sind weitere Bilder A_2', A_3'', A_4' ... in derselben Weise herzuleiten wie von P_1'' hergeleitet werden P_2', P_3'', P_4' ... jedes folgende aus dem nächst vorhergehenden.

Dass das Licht des Punktes A von dem ersten Spiegel selbst, dem er angehören soll, auch reflectirt werde, wird man nicht sagen wollen, man wird also von einem Bilde A_1' nicht zu sprechen haben. Jedenfalls aber müsste dieses mit A selbst identisch gesetzt werden, und von A_1' wären durchaus keine weiteren Bilder des Punktes A herzuleiten, als die vorhin angeführten A_1'', A_2', A_3'', A_4' ...

§ 3.

„Um nun Genaueres über Lage und Anzahl sämmtlicher zu P „sich ergebenden Bilder entwickeln zu können, stellen wir zunächst „folgende Betrachtung an".

Sei irgend ein zum ersten Spiegel gehöriges Bild P_m' gedacht, zu welchem der zweite noch das Bild P_{m+1}'' gebe. Der Fahrstrahl OP_m', hinter dem ersten Spiegel liegend, weiche von dessen Spurlinie OA um einen Winkel ψ ab. Indes muss OP_m', damit das Bild P_{m+1}'' entstehen könne, vor dem zweiten Spiegel liegen, von der Spur OB desselben abweichend um den Betrag $BOA + AOP_m'$, d. h. um $2\alpha + \psi$. Dieselbe Abweichung von OB, aber hinter dem zweiten Spiegel, muss der Fahrstrahl OP_{m+1}'' haben, d. h. es muss Winkel $BOP_{m+1}'' = 2\alpha + \psi$ sein. — So findet sich der also lautende

Hauptsatz.

„Wenn das zu dem einen Einzelspiegel gehörige Bild $m$ter Ord- „nung des Punktes P seinen Fahrstrahl hinter die Spur gedachten „Spiegels zurückweichen lässt um einen Winkel ψ, so muss das etwa „entstehende, zu dem andern Spiegel gehörige Bild $(m+1)$ter Ord- „nung seinen Fahrstrahl hinter dessen Spur zurückweichen lassen „um $2\alpha + \psi$; hiebei unter 2α die Oeffnungsgrösse des Winkelspiegels „gedacht".

Sei nun φ_1 die Abweichung des Fahrstrahls OP von der Spur OA nächst gegen OB hin, und φ_2 die Abweichung desselben Fahr-

strahls von OB gegen OA hin, so ist offenbar zunächst für die zwei Bilder P_1', P_1'' anzugeben

$$\text{Winkel } AOP_1' = \varphi_1, \quad BOP_1'' = \varphi_2.$$

An diese zwei einfachsten Angaben sind, mit Anwendung des vorigen Hauptsatzes, sofort zu knüpfen die zwei Reihen von Angaben

I.

$$\begin{aligned} \text{Winkel } AOP_1' &= \varphi_1 \\ AOP_2' &= 2\alpha + \varphi_2 \\ AOP_3' &= 4\alpha + \varphi_1 \\ &\vdots \\ AOP_{2m-1}' &= 2(m-2)\,2\alpha + \varphi_1 \\ AOP_{2m}' &= (2m-1)\,2\alpha + \varphi_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} \text{Winkel } BOP_1'' &= \varphi_2 \\ BOP_2'' &= 2\alpha + \varphi_1 \\ BOP_3'' &= 4\alpha + \varphi_2 \\ &\vdots \\ BOP_{2m-1}'' &= (2m-2)\,2\alpha + \varphi_2 \\ BOP_{2m}'' &= (2m-1)\,2\alpha + \varphi_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bei jeder der vorstehenden Reihen ist zu sehen, dass sie vermöge ihres arithmetisch-geometrischen Bildungsgesetzes bis ins Unendliche fortzuführen ist; und in diesem Fortgang werden die immer wachsenden Winkel AOP' BOP'' über jede zu gebende Grösse hinausgeführt.

Hiedurch ist mit Bezug auf jeden der zwei Einzelspiegel die Frage angezeigt, ob die Anzahl der ihm zugehörigen Bilder von P (wie es ja scheinen möchte) eine unendlich grosse sein werde oder nicht.

§ 4.

„Angesichts voriger Frage sind sofort folgende Beschränkungen „zu betonen, welche für die Lagen der Bilder des Punktes P sich „ergeben".

1) Jedes der zum ersten Spiegel gehörigen Bilder P', da es nur hinter diesem Spiegel sein kann, ist angewiesen auf den Halbkreisbogen $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, dessen Grenzpunkte A, $\mathfrak{A}$ sind.

Ebenso jedes der Bilder P'' ist angewiesen auf den Bogen $B\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, dessen Grenzpunkte B, $\mathfrak{B}$ sind.

2) Im Grenzpunkt $\mathfrak{A}$ des Bogens $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ kann niemals ein Bild P' sich befinden.

Denn zunächst ist klar, dass P_1' nicht in $\mathfrak{A}$ sein könne. — Sollte aber ein Bild P_n' (mit $n > 1$) zu Stande kommen, so müsste es hervorgerufen sein durch ein Bild P_{n-1}''. Die Punkte P_n', P_{n-1}'' müssten zu der Ebene des ersten Spiegels, in welcher P_n' mit $\mathfrak{A}$ vereinigt sein sollte, symmetrisch liegen; es müsste also P_{n-1}'' ebenfalls in $\mathfrak{A}$ sein. Aber in der Lage $\mathfrak{A}$ befindlich kann ein leuchtender Punkt P_{n-1}'' keine reflexionsfähigen Strahlen an die spiegelnde Fläche UVA gelangen lassen. Also ein Bild P_n' an der Stelle $\mathfrak{A}$ ist unmöglich.

Ebenso zeigt sich die Unmöglichkeit eines Bildes P'' an der Stelle $\mathfrak{B}$.

3) Auch im Grenzpunkt A des Halbkreisbogens $A\mathfrak{B}A$ kann kein Bild P' erscheinen.

Denn zunächst überzeugt man sich, dass P_1' nicht in A sein könne. — Sollte aber ein Bild P_n' (mit $n > 1$) in A zu Stande kommen, so würde dies die Existenz eines Bildes P_{n-1}'' voraussetzen, welches den zwei sich widersprechenden Forderungen genügen müsste: einesteils hinter der Ebene des zweiten Spiegels zu liegen, andernteils mit A zusammenzufallen.

Ebenso zeigt sich die Unmöglichkeit eines Bildes P'' an der Stelle B.

4) Sieht man auf das Bogenstück $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$, welches den zwei Halbkreisen $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gemeinschaftlich ist, so zeigt jeder zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ liegende Punkt desselben die Eigenschaft, frei sowohl hinter der einen als hinter der andern der zwei Spiegelebenen zu liegen, so dass kein Licht von ihm an die eine oder die andere der zwei spiegelnden Flächen UVA, UVB gelangen könne. Hienach ist zu sagen:

Wenn ein zum ersten oder zweiten Spiegel gehöriges Bild des Punktes P irgendwo auf dem Bogen $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ zwischen seinen Endpunkten sich befindet, so gibt es kein Bild höherer Ordnung, welches als ein von dem erstgedachten Bilde abgeleitetes zu finden wäre.

5) Was insbesondere die Grenzpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ des Bogens $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ betrifft, so ist leicht zu sehen: es mag zwar in $\mathfrak{B}$ ein zum ersten Spiegel gehöriges Bild P_n' entstehen, aber von diesem aus, mit $\mathfrak{B}$

in der Ebene des zweiten Spiegels, und seitwärts von der Abteilung UVB liegt, kann kein Bild P_{n+1}'' sich ergeben. Desgleichen mag immerhin an der Stelle 𝔄 ein zum zweiten Spiegel gehöriges Bild P_n'' sich befinden, aber es ist kein P_{n+1} von ihm herzuleiten.

Jedes Bild P' oder P'', von welchem kein Bild höherer Ordnung abzuleiten ist, heisst nach Bertin ein **improductives**; jedes andere mag ein **productives** heissen.

Aus vorstehenden besonderen Angaben ergibt sich nun die umfassende:

I) „Jedes Bild P' liegt auf dem Halbkreisbogen A𝔅𝔄 **frei** „**zwischen** seinen Grenzpunkten A, 𝔄; und zwar jedes productive „zwischen A und 𝔅, jedes improductive von 𝔅 bis vor 𝔄“.

„Jedes Bild P'' liegt auf dem Halbkreisbogen B𝔄𝔅 frei zwischen „seinen Grenzpunkten B, 𝔅; und zwar jedes productive **zwischen** „ B und 𝔄, jedes improductive von 𝔄 bis vor 𝔅“.

Sieht man jetzt auf den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UV𝔄, UV𝔅, so ist auch zu sagen:

II) „Ein Bild P' oder P'' des Punktes P ist immer dann und „nur dann improductiv, wenn es entweder frei zwischen den Ebenen-„stücken UV𝔄, UV𝔅, oder in einem von diesen sich befindet“.

Der hiemit scharf bestimmte Ort der improductiven Bilder heisse der **todte Raum**.

Durch die Angaben I) und II) ist man zunächst auf die **Möglichkeit** solcher Lagen von P hingewiesen, bei welchen eine begrenzte Zahl für die zu dem einen Spiegel gehörigen Bilder sich ergibt, und ebenso eine begrenzte für die zu dem andern gehörigen.

Wo nun diese Möglichkeit verwirklicht ist, mag ja das letzte Bild von P, welches durch letzte Reflexion an einem der Einzelspiegel als ihm zugehöriges sich ergibt, kurz als das zu diesem Spiegel gehörige **Grenzbild** von P bezeichnet werden.

§ 5.

„Verbinden wir jetzt die Lehren der §§ 3. und 4., so gelingt es „vollständige Klarheit über die am Schluss des § 3. aufgeworfene „Frage zu geben, ob nämlich für die Bilder P' und P'' immer je „eine begrenzte Anzahl sich ergebe oder nicht“.

Wir wollen zu dem Behuf vorerst an die Bilder P' uns halten, und wir wollen für den (ersten) Spiegel, zu welchem sie gehören, sogleich die nähere Bestimmung treffen, er solle der dem Punkt P etwa nähere sein; womit $\varphi_1 \leqq \alpha$ statuirt ist. — Sofort sind folgende Bemerkungen zu machen.

Ist x irgend eine ganze Zahl, welche den nach § 3. I. entwickelt zu denkenden Wert des Winkels $AOP_x' < 180$ macht, so ist jeder der Punkte P_1', P_2' ... P_x' ein Bild von P; und diese Bilder liegen der Reihe nach auf dem Bogen $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ zwischen A und $\mathfrak{A}$.

Ist x sogar die grösste ganze Zahl, welche den Wert $AOP_x' < 180$ macht, so ist notwendig AOP_{x+1} entweder $= 180$ oder > 180. Alsdann gilt von den Punkten P_1' ... P_x' noch dasselbe wie vorhin, es ist aber sogleich das Weitere hervorzuheben was folgt.

Die Angabe $AOP_{x+1} = 180$, wenn sie zutrifft, verweist den Punkt P_{x+1}' an die Stelle $\mathfrak{A}$, wo nach § 4. I) niemals ein Bild P' erscheinen kann.

Die Angabe $AOP_{x+1}' > 180$, wenn sie zutrifft, und wenn zugleich $AOP_{x+1}' = 360$ sich zeigt, verweist den Punkt P_{x+1}' auf eine zwischen $\mathfrak{A}$ und A liegende Stelle des Halbkreisbogens $\mathfrak{A}BA$, d. h. an eine Stelle vor dem ersten Spiegel, wo ebenfalls kein Bild P' erscheinen kann.

Um also sicher zu sein, dass die Zahl der Bilder P' eine begrenzte sei, genügt es offenbar, die folgende Behauptung streng zu beweisen.

$\mathfrak{C}$ Wenn x die grösste natürliche Zahl ist, welche den Winkel $AOP_x' < 180$ macht, und wenn von den zwei hiemit allein verträglichen Angaben $AOP_{x+1}' = 180$ und $AOP_{x+1}' > 180$, die letztere zutrifft, so muss damit zugleich bestehen die Angabe $AOP_{x+1}' < 360$.

Diess lässt sich in der Tat beweisen; man hat aber zu dem Behufe getrennt zu behandeln die zwei Fälle: x ungerade und x gerade.

Erster Fall: x ungerade.

Da die zwei Angaben bestehen sollen

a) $AOP_x' < 180$, b) $AOP_{x+1}' > 180$,

und da nach § 3. die Entwicklungen stattfinden

a') $AOP_x' = (x-1)2\alpha + \varphi_1$, b') $AOP_{x+1}' = x.2\alpha + \varphi_2$

so haben wir hier

a'') $(x-1)2\alpha + \varphi_1 < 180$ und b'') $x.2\alpha + \varphi_2 > 180$.

Für $x = 1$ (weil ja immer $2\alpha < 180$ und $\varphi_2 < 2\alpha$) hat man ohne Weiteres

$$x.2\alpha + \varphi_2 < 360$$

d. h.

$$AOP_{x+1}' < 360.$$

Ist vielmehr die ungerade Zahl $x > 1$, so dient uns die aus a″) herzuleitende

$$x.2\alpha - \varphi_2 < 180,$$

welche durch Verdopplung beider Seiten übergeht in

$$\text{a}''')\quad (x.2\alpha + \varphi_2) + (x.2\alpha - 3\varphi_2) < 360.$$

Da jetzt x mindestens $= 3$ sein soll, so ist hier $(x.2\alpha - 3\varphi_2)$ sicher positiv, und da a''') unzweifelhaft

$$x.2\alpha + \varphi_2 < 360$$

gibt, so ist wieder

$$AOP_{x+1}' < 360.$$

Zweiter Fall: x gerade.

Da zu den zwei Angaben

$$\text{a})\quad AOP_x' < 180, \qquad b)\quad AOP_{x+1}' > 180$$

jetzt die Entwickelungen gehören

$$\text{a}')\quad AOP_x' = (x-1)2\alpha + \varphi_2, \qquad \text{b}')\quad AOP_{x+1}' = x.2\alpha + \varphi_1,$$

so haben wir hier

$$\text{a}'')\quad (x-1)2\alpha + \varphi_2 < 180 \qquad \text{und} \qquad \text{b}'')\quad x.2\alpha + \varphi_1 > 180.$$

Die a″) ist sofort überzuführen in

$$x.2\alpha - \varphi_1 < 180,$$

wonach auch

$$\text{a}''')\quad (x.2\alpha + \varphi_1) + (x.2\alpha - 3\varphi_1) < 360.$$

Da nun x mindestens $= 2$ sein soll, und da $\varphi_1 \overset{=}{<} \alpha$ substituirt ist, so hat man hier $(x.2\alpha - 3\varphi_1)$ sicher positiv, und die a‴) gibt unzweifelhaft

$$x.2\alpha + \varphi_1 < 360$$

d. h. eben

$$AOP_{x+1}' < 360.$$

Nachdem hiemit die Behauptung $\mathfrak{C}$ für alle Fälle, wo $\varphi_1 \overset{=}{<} \alpha$, streng bewiesen ist, hat man ihr gemäss und kraft des Nächstvorhergehenden vorerst den Satz:

⊙) Wenn der Punkt P gegen die zwei Einzelspiegel so liegt, dass $\varphi_1 \leqq \alpha$, so ist die Zahl der Bilder P' eine begrenzte x, und zwar ist x die grösste natürliche Zahl, welche die nach § 3. zu denkende Entwickelung des Winkelwertes $AOP_x' < 180$ macht.

Ist nun P_x' im Sinne dieses Satzes das letzte der Bilder P', so sind für den Winkel AOP_x' (der immer < 180) als drei mögliche Fälle zu beachten

$$AOP_x' = \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 180 - 2\alpha.$$

Für jeden dieser drei Fälle ist jetzt zu zeigen, dass auch ein Grenzbild P'' sich einstelle.

1) Ist Winkel $AOP_x' < 180 - 2\alpha$, liegt also das Grenzbild P_x' frei ausserhalb des todten Raumes, so ist nach § 4. gemäss ein Bild P_{x+1}'' aus ihm herzuleiten; aber ein Bild P_{x+2}'' ist so gewiss unmöglich, als ein Bild P_{x+1}' nicht vorhanden ist.

Und hiebei hat man nach § 3.

$$\text{Wkl. } BOP_{x+1}' = AOP_x' + 2\alpha, \quad \text{d. h.} \quad < 180.$$

2) Ist Winkel $AOP_x' = 180 - 2\alpha$, liegt also das Grenzbild P in $\mathfrak{B}$, so ist (nach § 4.) zwar kein P_{x+1}'' herzuleiten aus P_x', wol aber ein Bild P_x'' aus P_{x-1}'; und man erhält hiebei

$$\text{Wkl. } BOP_x'' = AOP_x' + 2\alpha, \quad \text{d. h.} \quad < 180.$$

3) Ist Winkel $AOP_x' > 180 - 2\alpha$, so sei die — positive — Differenz $180 - AOP'$ bezeichnet mit ψ.

Da nun gemäss der gemachten Annahme P_x' frei innerhalb des todten Raumes liegt, so ist nach § 4. ein Bild P_{x+1}'' unmöglich. Gewiss aber ist die Existenz des P_{x-1}'', von welchem P_x' abstammt, und fraglich ist nur, ob auch noch Punkt P_x'' ein Bild sei. Die Entscheidung dieser Frage hängt davon ab, ob x gerade sei oder ungerade.

Ist x gerade, so bestehen nach § 3. für die Punkte P_x', P_x'' die Angaben

$$\text{Wkl. } AOP_x' = (x-1)\,2\alpha + \varphi_2$$
$$BOP_x'' = (x-1)\,2\alpha + \varphi_1.$$

Diese lassen (wegen $\varphi_1 \leqq \varphi_2$) erkennen, dass $BOP_x'' \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} AOP_x'$, somit < 180; und man sieht, dass P_x'' so gut wie P_x' ein Bild von P sei.

Ist aber x ungerade, so hat man vielmehr die Angaben

$$\text{Wkl. } AOP_x' = (x-1)2\alpha + \varphi_1$$
$$BOP_x'' = (x-1)2\alpha + \varphi_2$$

somit

$$BOP_x'' = AOP_x' + \varphi_2 - \varphi_1.$$

Jenachdem nun $\varphi_2 - \varphi_1$ (immer $< 2\alpha$) sich $\gtreqless \psi$ zeigt, wird der Winkel BOP_x'' (immer < 360) sich $\gtreqless 180$ finden. Und hieraus ist bei unserer Annahme der ungeraden x in aller Strenge zu schliessen, dass zu Grenzbild P_x' auch als richtiges Grenzbild entweder P_{x-1}'' oder P_x'' hinter dem zweiten Spiegel sich ergebe.

Zu jeder der eben erörterten Annahmen 1), 2), 3), welche die allein möglichen sind, zeigt sich offenbar eine bestimmte natürliche Zahl y als Ordnungszahl eines Grenzbildes P_y''.

Diese Zahl y, entweder $= x+1$, oder $= x$, oder $= x-1$ sich findend, ist auch gewiss die grösste natürliche Zahl, welche den nach § 3. entwickelt zu denkenden Winkelwert $BOP_y'' < 180$ macht, Denn wenn auch noch $BOP_{y+1}'' < 180$ sein könnte, so könnte ja P_y'' nicht das Grenzbild sein, als welches es doch erwiesen wurde.

Jetzt die Ergebnisse vorstehender Untersuchung zusammenfassend erkennt man für jede frei innerhalb des Winkelspiegels angenommene Lage des P ($\varphi_1 \lesseqgtr \varphi_2$) die Giltigkeit der Sätze:

I) „Sowohl für die Bilder P' ergibt sich immer eine begrenzte „Anzahl u, als für die Bilder P'' eine begrenzte Anzahl v; immer „nämlich u als die grösste natürliche Zahl, welche den nach § 3. ent-„wickelt zu denkenden Winkelwert $AOP_u' < 180$ macht, = und v „als die grösste natürliche, welche dasselbe mit Bezug auf BOP_v'' „leistet“.

II) „Die Ordnungszahlen u und v der Grenzbilder P_u', P_v'' sind „immer entweder einander gleich oder nur um Eins verschieden.“

Was übrigens die Gleichheit von u und v betrifft, so ist schon aus Obigem und späterhin noch genauer zu sehen, dass sie nicht bloss in den Fällen mit $\varphi_1 = \varphi_2$ eintreten wird, in welchen sie freilich (wegen vorhandener Symmetrieverhältnisse) als selbstverständsich sich darbietet.

Anmerkung 1. Sofern in obiger Untersuchung bei vorkommendem P_{x-1}'' die Zahl x gleich Eins würde, wäre natürlich unter P_0'' der leuchtende Punkt P selbst zu denken.

Anmerkung 2. „Der obige Hauptsatz I) bietet bereits eine immer „zum Ziel führende Methode dar zur Auflösung der Aufgabe: aus „gegebenen Werten von 2α, φ_1, φ_2 die entsprechenden Zahlen u und „v zu ermitteln".

Will man z. B. u ermitteln, so ist davon auszugehen, dass u (bei P_u') entweder eine ungerade Zahl u_1 oder eine gerade u_2 sein muss. Mit Bezug auf die erste Möglichkeit ist gemäss dem § 3. zu suchen

u_1 als grösste ungerade Zahl, welche der Ungleichung genügt

$$1) \quad (u_1 - 1)\, 2\alpha + \varphi_1 < 180;$$

mit Bezug auf die andere Möglichkeit ist zu suchen

u_2 als grösste gerade Zahl, welche der Ungleichung genügt

$$2) \quad (u_2 - 1)\, 2\alpha + \varphi_2 < 180.$$

Aus 1) und 2) ergibt sich

u_1 = grösste ungerade Zahl unter dem Quotientenwerte $\dfrac{180 + 2\alpha - \varphi_1}{2\alpha}$,

u_2 = grösste gerade Zahl unter dem Quotientenwerte $\dfrac{180 + 2\alpha - \varphi_2}{2\alpha}$.

Von den zwei hiemit bestimmten Zahlen u_1, u_2, ist die grössere für u zu wählen.

Man bemerke die für den Fall $\varphi_1 = \varphi_2 + \alpha$ sich ergebende Vereinfachung.

§ 6.

Jetzt vollkommen davon überzeugt, dass für die optische Anwendung jede der Reihen I), II) des § 3. eine begrenzte sei, wollen wir auf die genauere Untersuchung derselben eingehen.

Im Sinne der Allgemeinheit der zu erwartenden Ergebnisse lassen wir dahin gestellt, ob $\varphi_1 \lesseqgtr \varphi_2$ sei; wir halten nur immer fest die Voraussetzungen: 2α zwischen 0 und 180, φ_1 und φ_2 je > 0, $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha$.

Zunächst beschäftigen wir uns mit der ersten jener Reihen, welche die Angaben darbietet

$$\begin{aligned}
\text{Winkel } AOP_1' &= \varphi_1 \\
AOP_2' &= 2\alpha + \varphi_2 \\
AOP_3' &= 4\alpha + \varphi_1 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
AOP_{2m-1}' &= (2m-2)2\alpha + \varphi_1 \\
AOP_{2m}' &= (2m-1)2\alpha + \varphi_2 \\
AOP_{2m+1}' &= 2m.2\alpha + \varphi_1 \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}$$

Da in vorstehenden Auswertungen der Reihe nach die Winkelwerte 2α, 4α, 6α ... eine so ausgezeichnete Rolle spielen, so empfiehlt es sich, dieselben zu entsprechender Darstellung in der Ortsebene der Bilder P' zu bringen. — Zu dem Behuf werden auf dem Halbkreisbogen $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, auf welchen die sämmtlichen Bilder beschränkt sind, der Reihe nach die Punkte L_1, L_2, L_3 ... L_n so genommen, dass die einzelnen Bogen AL_1, L_1L_2, L_2L_3 ... $L_{n-1}L_n$ je gleich 2α seien, (d. h. die Gradzahl 2α haben), während der letzte $L_n\mathfrak{A}$ entweder auch gleich 2α ist, oder einen unter 2α liegenden Wert ω hat. Jetzt die Radien OL_1, OL_2 ... OL_n eingeführt, so sieht man, dass die Winkel 2α, 4α, 6α ... der Reihe nach durch die Winkelfächer AOL_1, AOL_2, AOL_3 ... dargestellt sind. Zugleich hat man vor sich der Reihe nach die Winkelfächer AOL_1, L_1OL_2 ... $L_{n-1}OL_n$, $L_nO\mathfrak{A}$. Diese zeigen sich so wichtig, dass wir sie bezeichnen wollen als die zu dem ersten Spiegel gehörigen Hilfsfächer: erstes, zweites ... $(n+1)$tes. Das letztgenannte heisse auch das zu diesem Spiegel gehörige Schlussfach.

Sofern nun jeder der Winkel φ_1 und φ_2 einen Wert zwischen 0 und 2α hat, so sind an ihr abwechselndes Vorkommen in den obigen Auswertungen der Winkel AOP' folgende Bemerkungen zu knüpfen.

Zunächst bei dem ersten Hilfsfach AOL_1 ist ersichtlich, dass das Bild P_1' frei in demselben liegt, so zwar, dass sein Fahrstrahl OP_1' von dem ersten Grenzradius des Faches um φ_1 abweicht.

Sieht man auf irgend ein Hilfsfach ungerader Ordnung $(2m-1)$, welches zwischen den Radien OL_{2m-2} und OL_{2m-1} liegt, so ergibt sich, dass P_{2m-1}' frei innerhalb solches Hilfsfaches liegt, so zwar, dass OP_{2m-1} von dem ersten Grenzradius desselben OL_{2m-2} um φ_1 abweicht.

Fasst man desgleichen in's Auge ein Hilfsfach gerader Ordnung ($2m$) mit Grenzradien OL_{2m-1}, OL_{2m}, so ist zu sehen: P_{2m}' liegt in demselben, so zwar, dass OP_{2m}' von OL_{2m-1} um φ_2 abweicht.

Sieht man endlich auf dass Schlussfach $L_n O \mathfrak{A}$, dessen Ordnungszahl ($n+1$) ist, so hat man zunächst für den Fall $L_n O \mathfrak{A} = 2\alpha$ zu bemerken, dass jenes genau sich verhalte entweder wie ein vorangehendes Hilfsfach ungerader Ordnung oder wie ein vorangehendes gerader, jenachdem $n+1$ ungerade ist oder gerade. Also muss in solchem Fache ein Bild P_{n+1} liegen und so liegen, dass der Fahrstrahl OP_{n+1}' dem Fahrstrahl OL_n entweder um φ_1 oder um φ_2 voraus ist, jenachdem $n+1$ ungerade ist oder gerade.

Wenn dagegen der Winkel $L_n O \mathfrak{A}$ eine Grösse ω unter 2α hat, dann hat man mit den Gleichungen

$$AOL_n = n.2\alpha$$
$$AO\mathfrak{A} = n.2\alpha + \omega$$

zusammen

$$\text{entweder } AOP_{n+1}' = n.2\alpha + \varphi_1 \quad \text{bei ungerader } n+1$$
$$\text{oder } AOP_{n+1}' = n.2\alpha + \varphi_2 \quad \text{bei gerader } n+1,$$

und es zeigt sich sofort: das Grenzbild P_{n+1}' kommt in dem Schlussfache dann und nur dann zu Stande, wenn entweder $n+1$ ungerade und $\varphi_1 < \omega$, oder wenn $n+1$ gerade und $\varphi_2 < \omega$; und der Fahrstrahl OP_{n+1}' weicht von dem ersten Grenzradius OL_n dieses Faches entweder um φ_1 oder um φ_2 ab, jenachdem $n+1$ ungerade oder gerade.

Hienach ergeben sich folgende Sätze über Lage und Ordnungszahl jedes einzelnen Bildes P', insbesondere des Grenzbildes.

I) „Jedes der zum ersten Spiegel gehörigen Bilder P' liegt frei „in demjenigen Hilfsfach dieses Spiegels, welches dieselbe Ordnungs„zahl hat wie das Bild; und der Fahrstrahl OP' des Bildes weicht „von dem ersten Grenzradius des Faches entweder um φ_1 oder um „φ_2 ab, jenachdem die Ordnungszahl ungerade ist oder gerade. Das „Grenzbild findet sich freiliegend entweder in dem Schlussfache oder „in demjenigen Hilfsfache, welches letzterem zunächst vorangeht."

II) „Ist n die grösste ganze Zahl, welche unterhalb des „Quotientenwertes $180:2\alpha$ liegt, und wird immer unter P_u' das zu „dem ersten Spiegel gehörige Grenzbild verstanden, so sind über seine „Ordnungszahl u und seine Lage die folgenden Angaben zu machen."

1) Ist $180:2\alpha$ eine ganze (die Eins übertreffende) Zahl $n+1$, so ist jedenfalls $u = n+1$; aber man hat

a) bei ungerader n

Winkel $AOP_u' = n.2\alpha + \varphi_2$, d. h. auch $\mathfrak{A}OP_u' = \varphi_1$

b) bei gerader n

Winkel $AOP_u' = n.2\alpha + \varphi_1$, d. h. auch $\mathfrak{A}OP_u' = \varphi_2$.

2) Wenn die Division $180:2\alpha$ einen Rest ω lässt, so dass $180 = n.2\alpha + \omega$, so hat man

a) bei ungerader n

entweder mit $\varphi_2 < \omega$ die Angaben

$$u = n+1, \quad AOP_u' = n.2\alpha + \varphi_2, \quad \mathfrak{A}OP_u' = \omega - \varphi_2$$

oder mit $\varphi_2 \overset{=}{>} \omega$ die Angaben

$$u = n, \quad AOP_u' = (n-1)2\alpha + \varphi_1, \quad \mathfrak{A}OP_u' = \omega + \varphi_2$$

b) bei gerader n

entweder mit $\varphi_1 < \omega$ die Angaben

$$u = n+1, \quad AOP_u' = n.2\alpha + \varphi_1, \quad \mathfrak{A}OP_u' = \omega - \varphi_1$$

oder mit $\varphi_1 \overset{=}{>} \omega$ die Angaben

$$u = n, \quad AOP_u' = (n-1)2\alpha + \varphi_2, \quad \mathfrak{A}OP_u' = \omega + \varphi_1.$$

Die in unsrem § vorangestellte Tafel der Winkel AOP_u' und ihrer Auswertungen fordert für sich zur Vergleichung von je zwei nächst benachbarten Gliedern der Winkelreihe auf. Da ergeben sich zunächst folgende Bemerkungen.

Die Differenz $AOP_2' - AOP_1'$ findet sich $= (2\alpha - \varphi_1) + \varphi_2 = 2\varphi_2$; und ganz dasselbe ergibt sich für $AOP_{2m}' - AOP_{2m-1}'$. Dagegen die Differenz $AOP_3' - AOP_2'$ findet sich $= (2\alpha - \varphi_2) + \varphi_1 = 2\varphi_1$, und dasselbe ergibt sich für $AOP_{2m+1}' - AOP_{2m}'$.

Man erkennt also allgemein:

III) „Der Bogenweg von einem Bilde P' ungerader Ordnung zu „dem nächst folgenden gerader Ordnung ist immer $= 2\varphi_2$; dagegen „ der Weg von einem Bilde gerader Ordnung zu dem nächst folgen„den ungerader Ordnung ist immer $= 2\varphi_1$."

Wird auch die Summe von je zwei nächst benachbarten Gliedern in Betracht gezogen, und beachtet man immer, dass $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha$, so erhält man ein bemerkenswertes Ergebniss bezüglich der Hälfte solcher Summe. Man findet

$$\text{a)}\quad \tfrac{1}{2}(AOP_{2m-1}' + AOP_{2m}') = (2m-1)2\alpha = AOL_{2m-1}$$
$$\text{b)}\quad \tfrac{1}{2}(AOP_{2m}' + AOP_{2m+1}') = 2m.2\alpha = AOL_{2m}.$$

Da nun nach voriger Nummer III) anzugeben ist

$$\text{a}')\quad \tfrac{1}{2}(AOP_{2m}' - AOP_{2m-1}') = \varphi_2$$
$$\text{b}')\quad \tfrac{1}{2}(AOP_{2m+1}' - AOP_{2m}') = \varphi_1$$

so ergibt sich durch Verbindung einesteils der Angaben a, a', andernteils der b und b', mit Beiziehung der Linien OL:

IV) „Je zwei nächst benachbarte Bilder P' liegen symmetrisch „zu der Scheidelinie OL derjenigen zwei Hilfsfächer des ersten Spie„gels, welchen sie selbst einwohnen. Von dieser Linie nämlich „weichen die aus O gehenden Fahrstrahlen solcher Bilder entweder „beide um φ_2 oder beide um φ_1 ab, jenachdem das bezügliche Bilder„paar entweder besteht aus einem Bilde ungerader Ordnung mit „nächst folgendem gerader, oder aus einem Bilde gerader Ordnung „mit nächst folgendem ungerader."

Das heisst auch:

„Je zwei Bilder P_x' und P_{x+1}' liegen so gegen einander, wie „wenn P_{x+1}' ein Spiegelbild von P_x' wäre, durch einen Planspiegel „hervorgerufen, dessen Ebene mit derjenigen der Geraden OL_x und „UV zusammenfiele."

Wenn man bei Betrachtung der vorangestellten Tafel endlich auf irgend zwei solche Glieder sieht, welche nur durch ein einziges zwischenliegendes getrennt sind, so erkennt man sofort, dass die Differenz zwischen solchen immer einfach $= 4\alpha$ sei. Danach besteht die Angabe:

V) „Je zwei nächst benachbarte Bilder P' von ungerader Ord„nung haben zwischen sich das Bogenintervall 4α; und ebenso je „zwei nächst benachbarte von gerader Ordnung."

Ganz dieselbe Art von Erörterung, wie sie so eben für die Reihe I) des § 3. durchgeführt wurde, ergibt sich mit selbstverständlichen Abänderungen für die dortige Reihe II), welche die folgenden Angaben darbietet:

$$
\begin{aligned}
\text{Winkel } BOP_1'' &= \varphi_2 \\
BOP_2'' &= 2\alpha + \varphi_1 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
BOP_{2m-1}'' &= (2m-2)2\alpha + \varphi_2 \\
BOP_{2m}'' &= (2m-1)2\alpha + \varphi_1 \\
BOP_{2m+1} &= 2m \, . \, 2\alpha + \varphi_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
$$

Zu diesen Angaben wird man in dem Ortskreise der Bilder des Punktes P, hinter der Spurlinie OB des zweiten Spiegels der Reihe nach einführen die Radien OR_1, $OR_2 \dots OR_n$, so zwar, dass die Winkel BOR_1 $R_1OR_2 \dots Q_{n-1}OR_n$ jeder gleich 2α seien, während der zuletzt sich anschliessende $R_nO\mathfrak{B}$ entweder gleich 2α ist, oder eine Grösse ω unter 2α hat. Man erhält demgemäss zum zweiten Spiegel gehörige Hilfsfächer, die den ebenso vielen und ebenso grossen zum ersten Spiegel gehörigen analog sind; man erhält namentlich auch als zum zweiten Spiegel gehöriges Schlussfach das mit $R_nO\mathfrak{B}$ zu bezeichnende, welches immer denselben Winkel 2α oder ω fasst, wie das zu dem ersten Spiegel gehörige $L_nO\mathfrak{A}$. Sofort überzeugt man sich, dass für die Bilder P'' und namentlich für das Grenzbild P_v'' folgende Sätze Ia) ... Va) sich ergeben müssen, welche den vorigen I) ... V) analog sind.

Ia) „Jedes der zum zweiten Spiegel gehörigen Bilder P'' liegt „frei in demjenigen Hilfsfach dieses Spiegels, welches dieselbe Ord- „nungszahl hat wie das Bild; und der Fahrstrahl OP'' des Bildes „weicht von dem ersten Grenzradius des Faches entweder um φ_2 „oder um φ_1 ab, jenachdem die Ordnungszahl ungerade ist oder ge- „rade. Das Grenzbild findet sich freiliegend entweder in dem Schluss- „fach oder in demjenigen Hilfsfach, welches diesem zunächst vorangeht.“

IIa) „Ist n die grösste ganze Zahl, welche unterhalb des Quo- „tientenwertes $180:2\alpha$ liegt, und wird immer unter P_v'' das zu dem „zweiten Spiegel gehörige Grenzbild verstanden, so sind über seine „Ordnungszahl v und seine Lage die folgenden Angaben zu machen.“

1) Ist $180:2\alpha$ eine (die Eins übertreffende) ganze Zahl $n+1$, so ist jedenfalls $v = n+1$, aber man hat

a) bei ungerader n

Winkel $BOP_v'' = n \, . \, 2\alpha + \varphi_1$, d. h. auch $\mathfrak{B}OP_v'' = \varphi_2$

b) bei gerader n

Winkel $BOP_v'' = n \, . \, 2\alpha + \varphi_2$, d. h. auch $\mathfrak{B}OP_v'' = \varphi_1$.

2) Wenn die Division $180:2\alpha$ einen Rest ω lässt, so dass $180 = n.2\alpha + \omega$, so erhält man

a) bei ungerader n

entweder mit $\varphi_1 < \omega$ die Angaben

$$v = n+1, \quad BOP_v'' = n.2\alpha + \varphi_1, \quad \mathfrak{B}OP_v'' = \omega - \varphi_1$$

oder mit $\varphi_1 \overline{\gtreqless} \omega$ die Angaben

$$v = n, \quad BOP_v'' = (n-1)2\alpha + \varphi_2, \quad \mathfrak{B}OP_v'' = \omega + \varphi_1$$

b) bei gerader n

entweder mit $\varphi_2 < \omega$ die Angaben

$$v = n+1, \quad BOP_v'' = n.2\alpha + \varphi_2, \quad \mathfrak{B}OP_v'' = \omega - \varphi_2$$

oder mit $\varphi_2 \overline{\gtreqless} \omega$ die Angaben

$$v = n, \quad BOP_v'' = (n-1)2\alpha + \varphi_1, \quad \mathfrak{B}OP_v'' = \omega + \varphi_2.$$

III a) „Der Weg von einem Bilde P'' ungerader Ordnung zu „dem nächst folgenden gerader ist immer $= 2\varphi_1$; dagegen der Weg „von einem Bilde P'' gerader Ordnung zu dem nächst folgenden un„gerader ist immer $= 2\varphi_1$."

IV a) „Je zwei nächst benachbarte Bilder P'' liegen symmetrisch „zu der Scheidelinie OB derjenigen zwei Hilfsfächer des zweiten „Spiegels, welchen sie selbst einwohnen. Von dieser Linie nämlich „weichen die aus O gehenden Fahrstrahlen solcher Bilder entweder „beide um φ_1 oder beide um φ_2 ab, jenachdem das bezügliche Bil„derpaar entweder besteht aus einem Bilde ungerader Ordnung mit „nächst folgendem gerader, oder aus einem Bilde gerader Ordnung „mit nächst folgendem ungerader."

Das heisst auch:

„Je zwei Bilder P_x'', P_{x+1}'' liegen so gegeneinander, wie wenn „P_{x+1}'' ein Spiegelbild von P_x'' wäre, durch einen Planspiegel her„vorgerufen, dessen Ebene mit derjenigen der Geraden OR_x und UV „zusammenfiele."

V a) „Je zwei nächst benachbarte Bilder P'' von ungerader „Ordnung haben zwischen sich das Bogenintervall 4α; und ebenso „je zwei nächst benachbarte von gerader."

Anmerkung. Durch leichte Ueberlegung ist zu finden, wie manchfaltige Constructionen aus Sätzen des vorstehenden § zu entnehmen sind, und wie weit letztere für das Verständniss der Erscheinungen an parallelen Spiegeln sich verwerten lassen.

§ 7.

Die Sätze des vorigen § sind hinreichend, um alle Fragen über Zahl und Lage zu beantworten, welche auf die Reihe der Bilder P' für sich allein, oder auf die Reihe der P'' allein sich beziehen mögen; es wird sich aber auch darum noch handeln, diese zwei Reihen in ihrer gegenseitigen Beziehung weiter zu untersuchen. Dieser Untersuchung mag nur noch vorausgehen eine genauere Betrachtung der Linien OL und OR, von welchen leicht zu erkennen ist, dass sie nicht bloss die Bedeutung geometrischer Hilfslinien, sondern eine eigene optische Bedeutung haben.

Zuerst nämlich überzeugt man sich, dass die Linie OL_1, hinter dem ersten Spiegel liegend, ein diesem zugehöriges Bild der OB sei, und ebenso zeigt sich die OR_1, hinter dem zweiten Spiegel liegend, als ein diesem zugehöriges Bild der OA.

Von der in § 6. gegebenen Vorschrift für die Construction der n Linien OL und der ebenso vielen OR ergibt sich nun erstlich eine Reihe von Gleichungen, die auf wiederholte Abbildungen OL_1, OR_2, OL_3, OR_4 ... von OB sich beziehen:

$$\begin{aligned} \text{Winkel } BOA &= 2\alpha = AOL_1 \\ L_1OB &= 4\alpha = BOR_2 \\ R_2OA &= 6\alpha = AOL_3 \\ L_3OB &= 8\alpha = BOR_4 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

zweitens eine Reihe von Gleichungen, die auf wiederholte Abbildungen OR_1, OL_2, OR_3, OL_4 ... von OA sich beziehen

$$\begin{aligned} \text{Winkel } AOB &= 2\alpha = BOR_1 \\ R_1OA &= 4\alpha = AOL_2 \\ L_2OB &= 6\alpha = BOR_3 \\ R_3OA &= 8\alpha = AOL_4 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

Dazu gewinnt man leicht, nach der Weise des § 5. schliessend die Ueberzeugung, dass die Linien OL und die OR zusammengenommen alle diejenigen seien, in welchen überhaupt die OA und OB sich abbilden können; immer unter n die grösste natürliche Zahl verstanden, welche unterhalb des Quotientenwertes $180:2\alpha$ liegt.

Daher ist mit völliger Bestimmtheit zu behaupten:

I) „In Gestalt der Radien $OL_1 \ldots OL_n$ hat man sämmtliche „Bilder, welche der erste Spiegel (UVA) von den Linien OA und „OB geben kann, so zwar, dass eine Linie OL_x als Bild von OB „oder OA erscheint, jenachdem x ungerade oder gerade. — Ebenso „in Gestalt der Linien $OR_1 \ldots OR_n$ hat man sämmtliche Bilder, welche „der zweite Spiegel von den Linien OA, OB geben kann, so zwar, „dass eine Linie OR_x als Bild von OA oder OB erscheint, jenachdem „x ungerade oder gerade."

An diesen Satz knüpft sich mit leichter Begründung der weitere.

II) „Von den Spiegeln UVA, UVB erhält man als ihre sämmt- „lichen zu dem ersten Spiegel (UVA) gehörigen Abbildungen die n „Scheinspiegel UKL_1, UKL_2, $UKL_3 \ldots$ so zwar, dass ein Schein- „spiegel UVL_x immer eine Abbildnng von UVB oder UVA ist, je- „nachdem x ungerade oder gerade. — Und von denselben Spiegeln „UVA, UVB erhält man als ihre sämmtlichen zu dem zweiten Spiegel „(UVB) gehörigen Abbildungen die n Scheinspiegel UVR_1, UVR_2, „$UVR_3 \ldots$ so zwar, dass ein Scheinspiegel UVR_x immer eine Ab- „bildung von UVA oder UVB ist, jenachdem x ungerade oder gerade".

§ 8.

„Bezüglich der Linien OL, OR ist jetzt angezeigt, auch die Lage „der einen Reihe gegen die andere in's Auge zu fassen".

Zunächst ist klar, dass die $OL_1 \ldots OL_n$ der Reihe nach zu den „$OR_1 \ldots OR_n$ symmetrisch sind mit Bezug auf Axe $MO\mathfrak{M}$.

Weitere Bestimmungen werden davon abhängig sein, wie weit die zwei letzten OL_n, OR_n vorgeschoben sind, beziehungsweise gegen $O\mathfrak{A}$, $O\mathfrak{B}$ hin. Das hängt selbst davon ab, ob die Division $180:2\alpha$ (welche jedenfalls die Zahl n liefern muss) entweder aufgehe oder einen Rest ω lasse. Bei letzterem sind die drei Möglichkeiten $\omega \gtreqless \alpha$ zu unterscheiden, sind beziehungsweise durch die Angaben $\omega = \alpha + e\alpha$, $\omega = \alpha$, $\omega = \alpha - e\alpha$ darzustellen, wo e jeden positiven

echten Bruch bedeutet. Dieses berücksichtigt, so erhält man vier charakteristisch verschiedene Angaben:

1) Ist $180 = (n+1)2\alpha$, so ist die OL_n in der Lage OB zu finden, die OR_n in $O\mathfrak{A}$. Die zwei Reihen der Linien OL und OR sind also völlig getrennt, zu verschiedenen Seiten der Axe $MO\mathfrak{M}$, während dagegen die zwei Schlussfächer $L_nO\mathfrak{A}$, $R_nO\mathfrak{B}$ vollständig zusammenfallen (jedes $= 2\alpha$).

2) Ist $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, so fallen OL_n und OR_n beide frei zwischen $O\mathfrak{A}$ und $O\mathfrak{B}$, übrigens OL_n näher an $O\mathfrak{B}$, OR_n näher an $O\mathfrak{A}$. Die zwei Reihen der Linien OL und OR sind auch nun völlig getrennt durch die Axe $MO\mathfrak{M}$, die von keiner erreicht wird. Die zwei Schlussfächer aber haben das Winkelfeld L_nOR_n ($= 2e\alpha$) und nur dieses gemeinschaftlich.

3) Ist $180 = n.2\alpha + \alpha$, so sind OL_n, OR_n vereinigt in der Linie $O\mathfrak{M}$, in welcher also die zwei Reihen (sonst getrennt wie sie sind) zusammenstossen. Die zwei Schlussfächer haben die Linie $O\mathfrak{M}$, und nur diese, gemeinschaftlich.

4) Ist $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, so fallen immerhin OL_n und OR_n frei zwischen $O\mathfrak{A}$, $O\mathfrak{B}$, aber OL_n näher an $O\mathfrak{A}$, OR_n näher an $O\mathfrak{B}$. Jede der zwei Linienreihen OL, OR greift über die Axe $MO\mathfrak{M}$ hinüber. Die andere hinein. Die zwei Schlussfächer sind völlig getrennt durch das Winkelfeld L_nOR_n, welches ($= 2e\alpha$) zwischen ihnen liegt.

Sofern nun aber das Grenzbild P_n' des Punktes P in das Schlussfach $L_nO\mathfrak{A}$ fallen kann, aber nicht muss, und das Grenzbild P_v'' in das Fach $L_nO\mathfrak{B}$ fallen kann, aber nicht muss: so ist gemäss Obigem auch bezüglich der Bilder P' und P'' zu denken, dass für ihre weitere Untersuchung es von Bedeutung sein müsse, überall jene vier Fälle zu beachten, in welchen der Quotient $180:2\alpha$ sich befinden kann.

Anmerkung 1. Zu den Gleichungen, welche als charakteristisch in den obigen Fällen 2, 3, 4 auftreten, ist eine Bemerkung zu machen, welche auch weiterhin zu berücksichtigen ist, wo es sich darum handeln wird, die ganzen Zahlen n und $2n$ mit Bezugnahme auf die Quotienten $180:2\alpha$ und $360:2\alpha$ auszudrücken.

Sofern ein solcher Quotient ein unechter eigentlicher Bruch ist soll (nach sonst üblicher Weise) die grösste in ihm enthaltene ganze Zahl beziehungsweise durch $\left[\frac{180}{2\alpha}\right]$, $\left[\frac{360}{2\alpha}\right]$ dargestellt werden. Nun ist zu sagen

ad 2) Da hier $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, so ist

$$\frac{180}{2\alpha} = n + \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{2}\right), \quad \frac{360}{2\alpha} = 2n + 1 + e$$

also

$$n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad 2n+1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right], \quad 2n = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] - 1$$

ad 3) Da hier $180 = n.2\alpha + \alpha$, so ist

$$\frac{180}{2\alpha} = n + \tfrac{1}{2}, \quad \frac{360}{2\alpha} = 2n+1$$

also

$$n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad 2n = \frac{360}{2\alpha} - 1.$$

ad 4) Da hier $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, so ist

$$\frac{180}{2\alpha} = n + \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{2}\right), \quad \frac{360}{2\alpha} = 2n + (1 - e)$$

also

$$n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad 2n = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Anmerkung 2. Die Angaben des obigen § sind natürlich auch massgebend für das volle Verständniss des Auftretens der zu den Spiegeln *UVA*, *UVB* sich gesellenden Scheinspiegel.

Mit Bezug hierauf ist dem ersten der dort unterschiedenen Fälle eine besondere Wichtigkeit zuzuschreiben.

Seine genaue Betrachtung führt auf folgenden bemerkenswerten

Lehrsatz.

Wenn zwei wirkliche Planspiegel *UVA*, *UVB* zwischen sich einen hohlen Winkel haben, der als aliquoter Teil von 180^0 sich darstellt $= \frac{180}{n+1}$, so gilt die Behauptung: in der über *UV* hinausgehenden Erweiterung des wirklichen Spiegels $\begin{Bmatrix} UVB \\ UVA \end{Bmatrix}$ sieht man einen Scheinspiegel, welcher als eine zu dem Spiegel $\begin{Bmatrix} UVA \\ UVB \end{Bmatrix}$ gehörige Abbildung $\begin{Bmatrix} \text{entweder des Spiegels } UVB \text{ oder des } UVA \\ \text{entweder des Spiegels } UVA \text{ oder des } UVB \end{Bmatrix}$ erkannt wird, jenachdem n ungerade oder gerade ist.

„Man sieht leicht, dass und wie dieser Satz sich benutzen lasse

„um einen vorgeblichen Winkel von $\frac{180^0}{n+1}$ auf diese Grösse zu prü-
„fen, oder einen Winkel von dieser Grösse herzustellen“.

§ 9.

„Wenn wir jetzt näher auf die gegenseitige Beziehung eingehen „wollen, welche zwischen den Bildreihen P' und P'' stattfindet, so „wird es hauptsächlich darum sich handeln, die Sätze II) und II a) „des § 6. zu verbinden“.

Bei Einleitung dieses Geschäfts zeigt sich sofort, dass überall Rücksicht zu nehmen sei auf das Verhältniss der Winkel φ_1 und φ_2 zu 2α und zu dem etwa auftretenden α. Hiedurch wird man darauf hingeleitet, dass man behufs grösserer Uebersichtlichkeit und Klarheit der Darstellung eine Teilung der Arbeit vorzunehmen habe, so zwar, dass zunächst der Fall $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$ erörtert werde, dann erst die Behandlung der übrigen Fälle mit $\varphi_1 \lessgtr \varphi_2$ kommen solle.

Für alle Fälle mag übrigens die Bemerkung vorausgeschickt werden. Sofern die Ordnungszahlen u, v zusammengehöriger Grenzbilder P_u', P_v'' gewonnen sind, hat man freilich in Gestalt der Summe $u+v$ die Gesammtzahl aller zusammengehörigen Bilder P' und P'' Will man aber, wie hier geschehen soll, mit s die Gesammtzahl aller mit dem Auge zu unterscheidenden Bilder des P bezeichnen, so ist die Angabe $s = u+v$ nur dann zu machen, wenn keine zwei Bilder vereinigt sind. Dagegen wird $s = u+v-1$ anzugeben sein, wenn (wie es vorkommen wird) ein einziges Bild P' mit einem einzigen P'' zur Vereinigung gelangt. — Dieser Sinn der Bezeichnung s soll in der weiteren Darstellung durchaus festgehalten werden.

§ 10.

Um jetzt die Annahme $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$ vollständig zu discutiren, so hat man ihr gemäss den Punkt P (nebst P_0) in der ausgezeichneten Lage M; es handelt sich also um die Abbildungen M', M'' eben des Punktes M, für welche die nach § 3. I), II) zu bildenden Winkelangaben einfach lauten

I.

$$\begin{aligned} \text{Winkel } AOM_1' &= \alpha \\ AOM_2'' &= 3\alpha \\ AOM_3' &= 5\alpha \\ \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

$$AOM_x' = (x-1)2\alpha + \alpha$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

II.

$$\text{Winkel } OOM_1'' = \alpha$$
$$BOM_2'' = 3\alpha$$
$$BOM_3'' = 5\alpha$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$BOM_x'' = (x-1)2\alpha + \alpha$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Man bemerkt, dass die $x$te Angabe unter I), wie unter II) ihre Form nicht ändert, ob nun x ungerade ist oder gerade. Man mag auch bemerken, wie sehr hienach bei der Annahme $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$ die Untersuchung des § 5. und die Lösung der in dortiger Anmerkung behandelten Aufgabe sich vereinfacht hätte.

Sowol aus vorstehenden Winkelangaben als aus dem in § 6. dargelegten entnimmt man die Richtigkeit der sofort zu machenden, mit bisheriger Bezeichnungsweise auszusprechenden Angaben.

Sofern OL_n die letzte der Linien OL ist, so erhält man als zum ersten Spiegel gehörige Bilder des M jedenfalls die n Bilder M_1', M_2' ... M_n' der Reihe nach in den Halbirungslinien der Winkel AOL_1, L_1OL_2 ... $L_{n-1}OL_n$ d. h. in Mitten der n ersten Hilfsfächer, die zu dem ersten Spiegel gehören. Ein weiteres Bild M_{n+1}' findet sich innerhalb des Winkels $L_nO\mathfrak{A}$ (im Schlussfach des ersten Spiegels) dann und nur dann, wenn dieser Winkel entweder $= 2\alpha$ oder doch $> \alpha$; denn nur in jedem dieser zwei Fälle ist Winkel $M_n'OM_{n+1}'$ in der Grösse 2α und so zu construiren, dass Radius OM_{n+1}' frei innerhalb des Winkels $L_nO\mathfrak{A}$ fällt, somit (vgl. § 4. und 5.) einen letzten brauchbaren Ort für ein Bild M_{n+1}' abgibt. — Hienach ist leicht auch zu übersehen, wie die zum zweiten Spiegel gehörigen Bilder M'' in den bezüglichen Hilfsfächern dieses Spiegels sich ergeben. Es sind ihrer ebenso viele wie der Bilder M', und je zwei gleichbezifferte Bilder M_x', M_x'' liegen symmetrisch zu der Geraden $MO\mathfrak{M}$, wonach auch die zwei Bogenwege $\mathfrak{A}M_x'$, $\mathfrak{B}M_x''$ einander gleich gefunden werden.

Will man noch Genaueres über die Bilder M', M'' ermitteln, so sind bezüglich des Quotienten $180:2\alpha$ die vier in § 8. hervorgehobenen Fälle zu unterscheiden. Diese Unterscheidung durchführend, kann man für jeden Fall zunächst gemäss den Sätzen II) und IIa) des § 6. die gemeinschaftliche Ordnungszahl u der beiden

Grenzbilder M_u', M_u'' angeben — bestimmt mit Rücksicht auf den Quotienten $180:2\alpha$ und den etwa mitspielenden Divisionsrest. Zugleich bietet sich dar der absolute Wert jedes der gegenläufigen und gleichgrossen Bogenwege $\mathfrak{A}M_u'$, $\mathfrak{B}M_u''$, und hienach ist nicht bloss die genaue Lage jedes der zwei Grenzbilder bekannt, sondern auch die Lage des jedenfalls in $\mathfrak{M}$ halbirten Bogenweges M_u', M_u'' zu finden. Denn jenachdem $\mathfrak{A}M_u' + \mathfrak{B}M_u'' \lessgtr 2\alpha$ sich darbietet, ist

$$\text{absolute Bogenlänge } M_u'M_u'' = \pm \{2\alpha - (\mathfrak{A}M_u' + \mathfrak{B}M_u''\}$$

anzugeben, während die etwa zutreffende Gleichung

$$\mathfrak{A}M_u' + \mathfrak{B}M_u'' = 2\alpha$$

offenbar auf $M_u'M_u'' = 0$ führt und die Vereinigung der zwei Bilder M_u', M_u'' in $\mathfrak{M}$ anzeigt.

An die gedachten Angaben ist auch die vollkommene Anschauung der gegenseitigen Lage der zwei Bilderreihen (M') und (M'') zu knüpfen, endlich die Zahl s entweder $= 2u$ oder $= 2u - 1$ anzugeben und in passendster Form (vgl. § 8. Anmerkung) zu entwickeln.

Geht man nun die einzelnen Fälle in Kürze durch, so zeigt sich Folgendes.

Erster Fall: $180 = (n+1)2\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+2$.

Man erhält

$$\begin{aligned} u &= n+1 = 180:2\alpha \\ \mathfrak{A}M_u' &= \alpha = \mathfrak{A}\mathfrak{M}, \\ \mathfrak{B}M_u' &= \alpha = \mathfrak{B}\mathfrak{M}, \\ M_u'M_u'' &= 0. \end{aligned}$$

Die Grenzbilder M_u', M_u'' sind in $\mathfrak{M}$ vereinigt. Die zwei Bilderreihen stossen in $\mathfrak{M}$ zusammen, während sie im übrigen getrennt liegen. Somit aus

$$2u = 2n+2 = 360:2\alpha$$

folgt

$$s = 2u - 1 = (360:2\alpha) - 1.$$

Die hieher gehörigen Werte von $2\alpha^0$ sind alle zu entnehmen aus der Reihe

$$90^0;\ 60^0;\ 45^0;\ 36^0;\ 30^0;\ 25,7\ldots{}^0;\ \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{180^0}{x+1} \text{ oder } \frac{360^0}{2x+2} \text{ mit } x = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots$$

Zweiter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360 : 2\alpha = (2n + 1) + e$.

Man erhält

$$u = n + 1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right] + 1$$

$$\mathfrak{A}M_u' = \mathfrak{B}M_u'' = e\alpha$$

$$M_u'M_u'' = 2(\alpha - e\alpha).$$

M_u' liegt zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$, M_u'' zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$.

Jede der zwei Bilderreihen greift über $\mathfrak{M}$ hinaus. Kein Bild M' ist mit einem M'' vereinigt. Also

$$s = 2u = 2n + 2 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

Dritter Fall: $180 = n.2\alpha + \alpha$, oder $360 : 2\alpha = 2n + 1$.

Man erhält

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right]$$

$$\mathfrak{A}M_u' = \mathfrak{B}M_u'' = 2\alpha$$

$$M_u'M_u'' = 2\alpha.$$

M_u' liegt in $\mathfrak{B}$, M_u'' in $\mathfrak{A}$. Jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{M}$ auf. Kein Bild M' mit einem M'' vereinigt.

$$s = 2u = 2n = (360 : 2\alpha) - 1.$$

Die hieher gehörigen Werte von $2\alpha^0$ sind alle zu entnehmen aus der Reihe

$$120^0;\quad 72^0;\quad 51, 42 \ldots {}^0;\quad 40^0 \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{360^0}{2x + 1} \quad \text{mit} \quad x = 1,\ 2,\ 3 \ldots$$

Vierter Fall: $180 = n . 2\alpha + (\alpha - e\alpha)$ oder $360 : 2\alpha = 2n + (1 - e)$.

Man erhält

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right]$$

$$\mathfrak{A}M_u' = \mathfrak{B}M_u'' = 2\alpha - e\alpha$$

$$M_u'M_u'' = 2(\alpha - e\alpha).$$

M_u' liegt zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$, M_u'' zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$. Jede der

zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes 𝔐 auf. Kein Bild M' mit einem M'' vereinigt.

$$s = 2u = 2a = \left[\frac{360}{2\alpha}\right]$$

Angesichts obiger Angaben mag nur Folgendes noch besonders hervorgehoben werden.

I) „In jedem Fall werden die Grenzbilder M_u', M_u'' beide im „todten Raum gefunden. Die Grenzlinien $O\mathfrak{A}$, $O\mathfrak{B}$ desselben er- „reichen sie dann und nur dann, wenn $180:2\alpha$ den Rest α lässt, „d. h. $360:2\alpha$ eine ganze ungerade Zahl ist; hiebei je das zu dem „einen Spiegel gehörige Grenzbild in der Ebene des andern Spiegels „(in seiner Spurlinie) erscheinend".

II) Die Vereinigung zweier Bilder M', M'' kommt dann und „nur dann zu Stande, wenn $180:2\alpha$ eine ganze Zahl, d. h. $360:2\alpha$ „eine gerade Zahl ist; da sind die Grenzbilder M_u', M_u'' in 𝔐 ver- „einigt. Die grösste Oeffnung des Winkelspiegels, durch die solche „Vereinigung herbeigeführt wird, ist die von 90°".

Anmerkung. Die zu den Fällen 1 und 3 erhaltenen Reihen der Werte von 2α sind zu verbinden zu der Reihe

$$120^0;\quad 90^0;\quad 72^0;\quad 60^0;\quad 51,42^0\ldots;\quad 40^0;\ldots\frac{360^0}{2x+1};\quad \frac{360^0}{2x+2}\ldots$$

Um an sie die den Fällen 2, 4 entsprechenden Werte zu knüpfen, hätte man vor ihren Anfang alle zwischen 180^0 und 120^0 liegenden Werte zu stellen, sodann aber zwischen je zwei weiteren nächstbenachbarten Gliedern alle möglichen Zwischenwerte einzuschalten.

§ 11.

„Jetzt wollen wir der Aufgabe näher treten, die Sätze II) und „II a) des § 6. in dem Sinne zu verbinden, dass vollkommene Klar- „heit über alle diejenigen Fälle verbreitet werde, wo die Winkel φ_1 „und φ_2 ungleich sind"; hiebei die feste Bestimmung treffend, dass der kleinere von beiden der mit φ_1 bezeichnete (POA) sei.

Für die Ausführung gedachter Verbindung ist es nun wesentlich, nicht nur die in § 6. betonte Unterscheidung der geraden und der ungeraden n fest zu halten, sondern auch für den Rest ω, wo er vorkommt, die drei Möglichkeiten $\omega = \alpha + e\alpha$, $\omega = \alpha$, $\omega = \alpha - e\alpha$ in derselben Weise zu berücksichtigen, wie schon im § 8., dann in § 10. mit grösstem Nutzen geschehen ist. — Ist nämlich $\omega = \alpha + e\alpha$,

so weisen die Sätze II) des § 6. darauf hin, dass man für $\varphi_2 (> \alpha)$ unterscheide, ob entweder $\varphi_2 < \alpha + \varepsilon\alpha$, oder $\varphi_2 \geqq \alpha + \varepsilon\alpha$, woran die entsprechenden Angaben für φ_1 (gemäss der Gleichung $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha$) sich knüpfen.

Ist aber $\omega = \alpha - \varepsilon\alpha$, so verlangen jene Sätze vielmehr, dass bei $\varphi_1 (< \alpha)$ unterschieden werde, ob entweder $\varphi_1 < \alpha - \varepsilon\alpha$ oder $\varphi_1 \geqq \alpha - \varepsilon\alpha$; woran die entsprechenden Angaben über φ_2 zu knüpfen sind. Wird Solches beachtet, so überzeugt man sich, dass es zwölf charakteristisch verschiedene Fälle sind, die wir noch zu erörtern haben; und dieselben sind gemäss dem Gesagten mit ihren Charakterisirungen aufzuführen wie folgt:

1) $180 = (n+1)\,2\alpha$, n ungerade
2) $180 = (n+1)\,2\alpha$, n gerade
3) $180 = n.2\alpha + (\alpha + \varepsilon\alpha)$, n ungerade, $\varphi_2 < \alpha + \varepsilon\alpha$
4) $180 = n,2\alpha + (\alpha + \varepsilon\alpha)$, n ungerade, $\varphi_2 \geqq \alpha + \varepsilon\alpha$
5) $180 = n.2\alpha + (\alpha + \varepsilon\alpha)$, n gerade, $\varphi_2 < \alpha + \varepsilon\alpha$
6) $180 = n.2\alpha + (\alpha + \varepsilon\alpha)$, n gerade, $\varphi_2 \geqq \alpha + \varepsilon\alpha$
7) $180 = n.2\alpha + \alpha$, n ungerade
8) $180 = n.2\alpha + \alpha$, n gerade
9) $180 = n.2\alpha + (\alpha - \varepsilon\alpha)$, n ungerade, $\varphi_1 \geqq \alpha - \varepsilon\alpha$
10) $180 = n \cdot 2\alpha + (\alpha - \varepsilon\alpha)$, n ungerade, $\varphi_1 < \alpha - \varepsilon\alpha$
11) $180 = n.2\alpha + (\alpha - \varepsilon\alpha)$, n gerade, $\varphi_1 \geqq \alpha - \varepsilon\alpha$
12) $180 = n.2\alpha + (\alpha - \varepsilon\alpha)$, n gerade, $\varphi_1 < \alpha - \varepsilon\alpha$.

Für jeden dieser Fälle ist die Bestimmung der Zahlen u und v aus den entsprechenden Angaben der Sätze II) und IIa) des § 6. sofort zu entnehmen; so auch die der absoluten Werte der (gegenläufigen) Bogenwege $\mathfrak{A}P_u'$ $\mathfrak{B}P_v''$. — Der für $\mathfrak{A}P_u'$ sich darbietende Wert wird für den Punkt P_u' sogleich die Entscheidung darüber geben, ob derselbe frei innerhalb des todten Raumes (W. $\mathfrak{A}O\mathfrak{B}$), oder auf der Grenze ($O\mathfrak{B}$) desselben, oder frei ausserhalb liege, da diesen drei Lagen beziehungsweise die Angaben $\mathfrak{A}P_u' \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 2\alpha$ entsprechen; und ebenso dient die Wertangabe von $\mathfrak{B}P_v''$ mit Bezug auf den Punkt P_v''. — Aus den Werten beider Bogenwege muss dann immer

sowol die Länge des Bogens $P_u'P_v''$, als die (wie sich zeigen wird) so sehr bemerkenswerte Lage seines Halbirungspunktes zu ermitteln sein. Letztere Aufgabe hat natürlich keine so einfache Lösung, wie sie im § 10. unter den dortigen einfacheren Umständen sich darbot; erstere kann immerhin nach der dortigen Methode auch behandelt werden. — Für gegenwärtigen § mag als allgemeine Methode der Auflösung beider Aufgaben zumal empfohlen werden die folgende. Man benutzt die absoluten Werte der gegenläufigen Bogenwege $\mathfrak{A}P_u'$, $\mathfrak{B}P_v''$, um aus ihnen für die beiden Punkte P_u', P_v'' sowol die absolute Differenz als die Summe von zwei gleichläufigen Bogenwegen herzuleiten, durch welche sie von einem und demselben der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aus erreicht werden. Jene Differenz ist eben die Bogenlänge $P_u'P_v''$ selbst; die gedachte Summe oder vielmehr ihre Hälfte lässt sofort die Lage des fraglichen Halbirungspunktes erkennen. — Uebrigens gestatten verschiedene der jetzt zu behandelnden zwölf Fälle, je nach ihrer Eigentümlichkeit eine einfachere Erledidung der gedachten Aufgaben; wie man sich sogleich überzeugen wird.

Erster Fall: $180 = (n+1)2\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+2$, mit ungerader n.

Man findet

$$u = n+1 = 180:2\alpha, \quad \mathfrak{A}P_u' = \varphi_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{P}$$
$$v = n+1, \quad \mathfrak{B}P_v'' = \varphi_2 = \mathfrak{B}\mathfrak{P};$$

d. h. P_u', P_v'' vereinigt in $\mathfrak{P}$.

$$u+v = 2n+2$$
$$s = u+v-1 = (360:2\alpha)-1.$$

Alle hieher gehörigen Werte von 2α sind zu entnehmen aus der Reihe

$$90^0;\ 45^0;\ 30^0;\ 22,5^0 \ldots$$

deren allgemeines Glied ist $180^0:(x+1)$ mit $x = 1, 3, 5 \ldots$

Zweiter Fall: $180 = (n+1)2\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+2$, mit gerader n.

Man findet

$$u = n+1 = 180:2\alpha, \quad \mathfrak{A}P_u' = \varphi_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{P}_0$$
$$v = n+1, \quad \mathfrak{B}P_v'' = \varphi_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{P}_0;$$

d. h. P_u', P_v'' vereinigt in $\mathfrak{P}_0$.

$$u+v = 2n+2$$
$$s = u+v-1 = (360:2\alpha)-1.$$

Alle hieher gehörigen Werte von $2\alpha^0$ zu entnehmen aus der Reihe

$$60^0;\ 36^0;\ 25,71^0 \ldots;\ 20^0 \ldots$$

deren allgemeines Glied ist $180^0:(x+1)$ mit $x = 2, 4, 6 \ldots$

Dritter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n+1+e$, mit ungerader n;

Man findet
$$\varphi_2 < \alpha + e\alpha, \quad \varphi_1 > \alpha - e\alpha.$$

$$u = n+1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right] + 1, \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha - \varphi_2 < 2\alpha$$
$$v = n+1, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha;$$

d. h. P_u', P_v'', beide frei innerhalb des todten Raumes.

Mit Hilfe von

kommt auch
$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_2$$
$$\mathfrak{B}P_u' + \mathfrak{B}P_v'' = 2\varphi_2 = 2\mathfrak{B}\mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{B}P_u' - \mathfrak{B}P_v'' = 2\alpha - 2e\alpha;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{P}$, seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha)$.

Aus $\mathfrak{B}P_u' > \mathfrak{B}P_v''$ sieht man, dass jede der zwei Bilderreihen über $\mathfrak{P}$ hinausgreift in die andere hinein. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n+2 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

Vierter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n+1+e$, mit ungerader n;

Man findet
$$\varphi_2 \overset{=}{>} \alpha + e\alpha, \quad \varphi_1 \overset{=}{<} \alpha - e\alpha.$$

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha + \varphi_2 > 2\alpha$$
$$v = n+1, \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{P}_v'' = \alpha + e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha;$$

d. h. P_u' frei ausserhalb des todten Raumes; P_v'' frei innerhalb.

Mit Hilfe von

kommt auch
$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_1$$
$$\mathfrak{A}P_u' + \mathfrak{A}P_v'' = 4\alpha = 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{A}P_u' - \mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha + 2e\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{B}$, seine Länge $= 2(\alpha + e\alpha - \varphi_1)$.

Jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{B}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n + 1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

F ü n f t e r F a l l: $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360 : 2\alpha = 2n + 1 + e$ mit gerader n;

$$\varphi_2 < \alpha + e\alpha, \quad \varphi_1 > \alpha - e\alpha.$$

Man findet

$$u = n + 1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right] + 1, \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha$$

$$v = n + 1 \qquad \mathfrak{B}P_v' = \alpha + e\alpha - \varphi_2 < 2\alpha$$

d. h. P_u', P_v'', beide frei innerhalb des todten Raumes.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_2$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_v'' + \mathfrak{A}P_u' = 2\varphi_2 = 2\mathfrak{A}\mathfrak{P}_0$$

$$\mathfrak{A}P_v'' - \mathfrak{A}P_u' = 2\alpha - 2e\alpha;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{P}_0$, seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha)$.

Aus $\mathfrak{A}\mathfrak{P}_v'' > \mathfrak{A}P_u'$ folgt: jede der 2 Bilderreihen greift über $\mathfrak{P}_0$ hinaus. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n + 2 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

S e c h s t e r F a l l: $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360 : 2\alpha = (2n+1) + e$, n gerade;

$$\varphi_2 \overset{=}{>} \alpha + e\alpha, \quad \varphi_1 \overset{=}{<} \alpha - e\alpha.$$

Man findet

$$u = n + 1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right] + 1, \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha$$

$$v = n, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + e\alpha + \varphi_2 > 2\alpha;$$

d. h. P_u' frei innerhalb des todten Raumes; P_v'' frei ausserhalb.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_v'' + \mathfrak{B}P_u' = 4\alpha = 2\mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{B}P_v'' - \mathfrak{B}P_u' = 2\alpha + 2e\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{A}$, seine Länge $= 2(\alpha + e\alpha - \varphi_1)$.

Jede der 2 Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{A}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n + 1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Siebenter Fall: $180 = n.2\alpha + \alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+1$, n ungerade.

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right],\quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha + \varphi_2 > 2\alpha$$

$$v = n + 1,\qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - \varphi_1 < 2\alpha,$$

d. h. P_u' frei ausserhalb des todten Raumes; P_v'' frei innerhalb.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_u' + \mathfrak{A}P_v'' = 4\alpha = 2.\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{A}P_u' - \mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - 2\varphi_1,$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{B}$, seine Länge $= 2(\alpha - \varphi_1)$.

Jede der 2 Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{B}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2u + 1 = 360:2\alpha.$$

Alle hieher gehörigen Werte von 2α zu entnehmen aus der Reihe

$$120^0;\quad 51,42^0 \ldots;\quad 32,72^0 \ldots;\quad 24^0 \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{360^0}{2x+1} \text{ mit } x = 1,\ 3,\ 5 \ldots$$

Achter Fall: $180 = 2\alpha + \alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+1$, n gerade

Man findet

$$u = n + 1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right] + 1,\quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha - \varphi_1 < 2\alpha$$

$$v = n,\qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + \varphi_2 > 2\alpha,$$

d. h. P_u' frei innerhalb des todten Raumes; P_v'' frei ausserhalb.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_v'' + \mathfrak{B}P_u' = 4\alpha = 2\mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{B}P_v'' - \mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{A}$; seine Länge $= 2(\alpha - \varphi_1)$.

Jede der Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{A}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

Alle hieher gehörigen Werte von $2\alpha^0$ zu entnehmen aus der Reihe

$$72^0:\ 40^0;\ 27,6^0 \ldots;\ 21,17^0 \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{360^0}{2x+1} \quad \text{mit} \quad x = 2,\ 4,\ 6 \ldots$$

Neunter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n + (1-e)$, n ungerade;

$$\varphi_1 \overset{=}{>} \alpha - e\alpha, \quad \varphi_2 \overset{=}{<} \alpha + e\alpha.$$

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_2 \overset{=}{<} 2\alpha$$

$$v = n, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_1 < 2\alpha,$$

d. h. P_v'' frei innerhalb des todttn Raumes, P_u' entweder frei innerhalb oder an Grenze $O\mathfrak{B}$.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + e\alpha - \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_u' + \mathfrak{A}P_v'' = 2\varphi_2 = 2\mathfrak{A}\mathfrak{P}_0$$

$$\mathfrak{A}P_u' - \mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - 2e\alpha;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirf in $\mathfrak{P}_0$; seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha)$.

Aus $\mathfrak{A}P_u' > \mathfrak{A}P_v''$ folgt; jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung von $\mathfrak{P}_0$ auf. Kein Bild P' mit P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Zehnter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n + (1-e)$, n ungerade;

$$\varphi_1 < \alpha - e\alpha, \quad \varphi_2 > \alpha + e\alpha.$$

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_2 > 2\alpha$$

$$v = n + 1, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha,$$

d. h. P_u' frei ausserhülb des todten Raumes; P_v'' frei innerhalb.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + e\alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_u' + \mathfrak{A}P_v'' = 4\alpha = 2\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A}P_u' - \mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - 2e\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{B}$; seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha - \varphi_1)$.

Jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{B}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n + 1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

Elfter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n + (1-e)$, n gerade;

$$\varphi_1 \overset{=}{>} \alpha - e\alpha, \quad \varphi_2 \overset{=}{<} \alpha + e\alpha.$$

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_1 < 2\alpha$$

$$v = n, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_2 \overset{=}{<} 2\alpha,$$

d. h. P_u' frei innerhalb des todten Raumes. P_v'' frei innerhalb oder an der Grenze $O\mathfrak{A}$.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha - \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_v'' + \mathfrak{B}P_u' = 2\varphi_2 = 2\mathfrak{B}\mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{B}P_v'' - \mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - 2e\alpha,$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{P}$; seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha)$.

Aus $\mathfrak{B}P_v'' > \mathfrak{B}P_v'$ folgt: jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{P}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Zwölfter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n + (1 - e)$, n gerade;

$$\varphi_1 < \alpha - e\alpha. \quad \varphi_2 > \alpha + e\alpha.$$

Man findet

$$u = n + 1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right] + 1, \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha$$
$$v = n, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_2 > 2\alpha;$$

d. h. P_u' frei innerhalb, P_v'' frei ausserhalb des todten Raumes.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_v'' + \mathfrak{B}P_u' = 4\alpha = 2\mathfrak{B}\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{B}P_v'' - \mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - 2e\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{A}$; seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha - \varphi_1)$.

Jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des $\mathfrak{A}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n + 1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

Anmerkung. Die zu den Fällnn 1, 2, 7, 8 gegebenen Reihen der Werte von $2\alpha^0$ sind zu einer einzigen zu verbindeu. Alle übrigen Werte, welche den übrigen acht Fällen entsprechen, wird man leicht gemäss den Charakterisirungen dieser Fälle bestimmen, und man kann sie an die vorhin gedachte Reihe teils durch Voranstellung teils durch Einschaltung anknüpfen.

§ 12.

Die Untersuchung im vorigen § ist zwar unter der bestimmten Voraussetzung durchgeführt worden, dass von den Winkeln φ_1, φ_2 der erstgenannte der kleinere sei. Indes ist aus jener ieicht zu erkennen die Richtigkeit der alsbald auszusprechenden allgemeinen Sätze, welche für $\varphi_1 \lesseqgtr \varphi_2$ gemeint sind.

Bei diesen ist nur immer streng festzuhalten: n die grösste ganze Zahl unterhalb des Quotientenwertes $180:2\alpha$ (der selbst >1 sein muss), $2n$ die grösste gerade Zahl unterhalb des Quotientenwertes $360:2\alpha$ (der selbst >2 sein muss). Und im übrigen sind die bisher gebrauchten Bezeichnungen in dem bisherigen Sinne festzuhalten.

Die bezüglichen allgemeinen Sätze (für $\varphi_1 \lesseqgtr \varphi_2$) lauten:

I) „Was die Ordnungszahlen der Grenzbilder P_u', P_v'' betrifft, „so ist entweder jede gleich $n+1$, oder jede gleich n, oder die eine „gleich $n+1$, die andere gleich n.“ Und zwar

1) Die Angabe $u = v = n+1$ gilt sowol in jedem der Fälle, wo $180:2\alpha$ eine ganze Zahl ist, als in jedem solchen, wo die Division $180:2\alpha$ einen Rest $(\alpha + e\alpha)$ lässt, der sogar den grösseren der Winkel φ_1, φ_2 übertrifft. (§ 11.; 1, 2, 3, 5).

2) Die Angabe $u = v = n$ gilt in jedem derjenigen Fälle, wo die Division $180:2\alpha$ einen Rest $(\alpha - e\alpha)$ lässt, welcher höchstens den kleineren der Winkel φ_1, φ_2 erreicht. (§ 11,; 9, 11).

3) Die Angabe $u \gtrless v$ (mit $u + v = 2n+1$) gilt in jedem der übrigen Fälle, wo nämlich die Division $180:2\alpha$ einen Rest lässt, welcher sich befindet auf dem Wege von dem grösserem (mit einbegriffenen) der beiden Winkel φ bis vor den kleineren.

Immer aber, wenn die Ordnungszahlen der Grenzbilder ungleich sind, ist die kleinere an den bei P näheren, oder an den von P entfernteren Spiegel geknüpft, jenachdem n ungerade oder gerade ist.

II) „Was die Lage der Grenzbilder P_u', P_v'' gegen den todten „Raum betrifft, so bestehen folgende Angaben."

I) Ist $u = v = n+1$, so liegt jedes der zwei Grenzbilder frei innerhalb des todten Raumes. (§ 11.; 1, 2, 3, 5).

2) Ist $u = v = n$, und zwar dadurch herbeigeführt, dass der kleinere der beiden Winkel φ grösser ist als der zu $180:2\alpha$ gehörige Divisionsrest, so liegt ebenfalls jedes der zwei Grenzbilder frei innerhalb des todten Raumes. (§ 11.; 9, 12).

3) Ist $u = v = n$, aber dadurch herbeigeführt, dass der kleinere der beiden Winkel φ gleich oben gedachtem Divisionsreste ist, so liegt das eine der Grenzbilder frei innerhalb des todten Raumes, das andere in einer der Linien $A O \mathfrak{A}$, $B O \mathfrak{A}$, und zwar in der bei P näheren, oder in der von P entfernteren, jenachdem n gerade oder ungerade.

4) Ist $u \gtrless v$, so ist immer das eine Grenzbild frei innerhalb des todten Raumes, das andere frei ausserhalb; und letzteres ist immer dasjenige mit der kleineren Ordnungszahl.

III) „Das Bogenstück $P_u' P_v''$ hat zum Halbirungspunkt immer „einen der vier Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; hiebei die Vorstellung des „Halbirtseins auch dann festzuhalten, wenn die Punkte P_u', P_v'' vereinigt liegen; „welches letztere dann und nur dann (§ 11.; 1, 2) „zutrifft, wenn die Division $180:2\alpha$ aufgeht. Genauer ist zu sagen"

1) In jedem der Fälle $u = v$ ist es einer der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$, welcher die gedachte Rolle spielt. Und zwar, wenn $u = v = n+1$, so fällt diese Rolle dem $\mathfrak{P}$ oder dem $\mathfrak{P}_0$ zu, jenachdem n ungerade oder gerade ist; wenn aber $u = v = n$, so fällt sie dem $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}_0$ zu, jenachdem n gerade oder ungerade. (§ 11.; 1, 2, 3, 5, 9, 11).

2) In jedem der Fälle $u \gtrless v$ ist es einer der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, welcher den Bogen $P_u'P_v''$ halbirt. Und zwar spielt $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ die gedachte Rolle, jenachdem u oder v die grössere der zwei Zahlen ist.

IV) „Was die gegenseitige Lage der Bilderreihen (P'), (P'') „betrifft, so ergeben sich die Behauptungen:“

1) Die zwei Reihen stossen in einem der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$ zusammen, wenn $u = v = n+1$ stattfindet mit $180:2\alpha = n+1$; und zwar erfolgt das Zusammenstossen in $\mathfrak{P}$ oder in $\mathfrak{P}_0$, jenachdem n ungerade oder gerade ist.

2) Die zwei Reihen greifen in einander ein, wenn $u = v = n+1$ stattfindet, ohne dass $180:2\alpha = n+1$; und zwar greifen beide gleich weit über $\mathfrak{P}$ oder über $\mathfrak{P}_0$ hinaus, jenachdem n ungerade oder gerade.

3) Beide Reihen hören von einem und demselben der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$, unter gleichem Abstand von ihm auf, wenn $u = v = n$; und zwar spielt $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}_0$ die bezügliche Rolle, jenachdem n gerade oder ungerade.

4) Beide Reihen hören vor einem und demselben der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, unter gleichem Abstand von ihm auf, wenn u und v ungleich sind; und zwar spielt $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ die bezügliche Rolle, jenachdem u oder v die grösse Zahl ist.

V) „Was die Bogenlänge $P_u'P_v''$ betrifft, so ist sie von den „Grössen φ_1, φ_2 ganz unabhängig in allen denjenigen Fällen, wo einer „der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$ es ist, der den Bogen $P_u'P_v''$ halbirt.“ In jedem derartigen Falle ist $P_u'P_v''$ entweder $= 0$ oder $= 2(\alpha - e\alpha)$; der Wert Null nur vorkommend, wenn $180:2\alpha$ eine ganze Zahl.

„Dagegen ist die Bogenlänge $P_u'P_v''$ von φ_1 oder φ_2 abhängig „in allen denjenigen Fällen, wo einer der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ es ist, der „den Bogen $P_u'P_v''$ halbirt.“ In jedem solchen Falle ist $P_u'P_v''$ entweder $= \alpha - \varphi$, oder $= \alpha + e\alpha - \varphi$, oder $= \alpha - e\alpha - \varphi$; unter φ den kleineren der ber beiden Winkel φ_1, φ_2 verstanden.

Dass durch den Uebergang von einem der zwölf Fälle des § 11. eine schroffe Aenderung der Erscheinungen bewirkt werde, ist aus

jenem § unmittelbar zu ersehen, und es bedarf dass keiner weiteren Ausführung. Durch vorstehende Angaben ist man aber darauf hingewiesen, gewisse Aenderungen und mit ihnen verbundene Beharrungen hervorzuheben, welche innerhalb jedes einzelnen jener zwölf Fälle sich zeigen, während doch die Bedingungen seines Zutreffens streng festgehalten werden. Gemäss vorigen Angaben III) ... V) ist zu behaupten:

VI) „Wenn bei gegebener Oeffnung des Winkelspiegels und gegebener nicht medianer Lage von P $\left\{\begin{array}{c}\text{gleiche}\\ \text{ungleiche}\end{array}\right\}$ Ordnungszahlen „für die zwei Grenzbilder vorhanden sind, so ist innerhalb eines „zwischen (immer nach § 11. zu bestimmenden) Spielraums der Punkt „P so zu bewegen, dass zwar die Grenzbilder ihre Lage ändern, und „für den sie verbindenden Bogen $\left\{\begin{array}{l}\text{die Lage seines Halbirungpunktes}\\ \text{seine Länge}\end{array}\right\}$ „sich stetig ändert, dagegen unverandert bleiben jene beiden Ord„nungszahlen und $\left\{\begin{array}{l}\text{die Länge}\\ \text{die Lage des Halbirungspunktes}\end{array}\right\}$ jenes Bogens."

§ 13.

Wenn man die Fälle mit $\varphi_1 = \varphi_2$ denjenigen gegenüberstellt, wo $\varphi_1 \lessgtr \varphi_2$, so ist aus den §§ 10. ... 12. ersichtlich, dass jeder Fall der einen Art sehr wesentliche Eigentümlichkeiten hervorkehrt gegenüber jedem Falle der andern. Nur diejenigen Fälle der zweiten Art, wo die Ordnungszahlen u und v der beiden Grenzbilder einander gleich werden, zeigen eine merkliche Verwandtschaft mit solchen der ersten Art; was eben damit zusammenhängt, dass jeder der Fälle mit $\varphi_1 = \varphi_2$ als ein solcher anzusehen ist, wo die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{M}$ sich vereinigt haben, wie ja P und P_0 in M es getan.

Mit Rücksicht auf die Grösse der angedeutenden Unterschiede und bei dem übersichtlichen Charakter, welchen welchen man den Darstellungen der §§ 10. und 11. zu geben suchte, wird man darauf verzichten wollen, dass weiterhin Vergleichungen und Zusammenfassungen der beiderseitigen Resultate ausgeführt werden.

Nur mit Bezug auf die Zahl s, auf deren Ermittlung gewöhnlich das grässte Gewicht gelegt wird, mag das geschehen; es mag also noch ausgesprochen werden folgende

Generalangabe
über die Gesammtzahl s der dem Auge unterscheidbaren
Bilder von P.

„Wenn P irgendwie frei zwischen den beiden Spiegeln des Win-
„kelspiegels liegt, so dass jede der drei Möglichkeiten $\varphi_1 \gtreqless \varphi_2$ zu-
„gelassen ist, so hat man bezüglich der Zahl s zu behaupten:

1) Ist $180:2\alpha$ eine ganze Zahl {d. h auch $360:2\alpha$ von der Form $2n+2$}, so ist $s = (360:2\alpha)-1$.

Die hier gemachte Voraussetzung, und nur diese ist es, bei welcher zwei Bilder des P, nämlich die Grenzbilder, sich vereinigen.

2) Lässt die Division $180:2\alpha$ einen Rest $\alpha+e\alpha$ {d. h. ist $360:2\alpha$ von der Form $(2n+1)+e$}, so ist s entweder $= \left[\frac{360}{2\alpha}\right]+1$ oder $= \left[\frac{360}{2\alpha}\right]$. Ersteres trifft zu dann und nur dann, wenn jeder der Winkel φ_1, φ_2 kleiner ist als jener Rest; es trifft also namentlich auch zu, wenn $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$.

3) Lässt die Division $180:2\alpha$ den Rest α {d. h. ist $360:2\alpha = 2n+1$}, so ist s entweder $= 360:2\alpha$ oder $= (360:2\alpha)-1$. Letzteres trifft zu dann und nur dann, wenn $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$.

4) Lässt die Division $180:2\alpha$ einen Rest $\alpha - e\alpha$ {d. h. ist $360:2\alpha$ von der Form $2n+(1-e)$}, so ist entweder $= \left[\frac{360}{2\alpha}\right]+1$ oder $= \left[\frac{360}{2\alpha}\right]$. Letzteres trifft immer zu bei vorhandener Gleichheit der Winkel φ_1 und φ_2: bei vorhandener Ungleichheit aber dann und nur dann, wenn selbst der kleinere mindestens jenem Reste gleich ist.

Man bemerke wol, dass vorstehende Angaben über s ganz unabhängig davon sind, ob die Hilfszahl n eine ungerade oder eine gerade ist.

§ 14.

Die Rolle, welche der Punkt $\mathfrak{M}$ in den Sätzen des § 10. spielt, ist ganz unmittelbar an den Umstand anzuknüpfen, dass die dortige Voraussetzung $\varphi_1 = \varphi_2$ eine durchgängige Symmetrie der Erscheinungen bewirken muss.

„Sofern aber in den Sätzen der §§ 11. und 12. auch die Punkte „𝔓, $𝔓_0$, ja sogar die Punkte 𝔄, 𝔅 eine bis zu gewissem Grad ähn- „liche Rolle spielen wie 𝔐, so ist angezeigt, darüber noch weiteren „Aufschluss zu suchen". Solcher ist in der Tat aus den Sätzen V) und Va) des § 9. zu gewinnen, denn durch diese wird man auf Linien aufmerksam gemacht, deren jede als Symmetralaxe für gewisse Bilder P' und entsprechende P'' erscheinen muss. Sie ergeben sich wie folgt:

1) Die Gerade OP halbirt immer den Winkel $P_2'OP_2''$; denn es ist (vgl. § 3.)

einesteils Winkel $POP_2' = POA + AOP_2' = \varphi_1 + (2\alpha + \varphi_2) = 4\alpha$,
anderntells Wkl. $POP_2'' = POB + BOP'' = \varphi_2 + (2\alpha + \varphi_1) = 4\alpha$.

Sofort gemäss § 10., V) und Va) erkennt man, dass die Bilder P_2', P_4', P_6' ... der Reihe nach mit P_2'', P_4'', P_6'' ... symmetrisch liegen bezüglich der Axe $PO𝔓$.

Demgemäss, wenn die Ordnungszahlen u, v der Grenzbilder P_u', P'' gleich grosse gerade Zahlen sind, muss für den Bogen P_uP_v'' sein Halbirungspunkt in 𝔐 sich ergeben, und auch die Unabhängigkeit seiner Länge von φ_1 und φ_2 ist zu begreifen.

2) Die Gerade OP_0 halbirt immer den Winkel $P_1'OP_1''$; denn es ist

einesteils Wkl. $P_0OP_1' = P_0OA + AOP_1' = \varphi_2 + \varphi_1 = 2\alpha$,
anderntells Wkl. $P_0OP_1'' = P_0OB + BOP_1'' = \varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha$.

Sofort erkennt man, dass die Bilder P_1', P_3', P_5' ... der Reihe nach mit P_1'', P_3'', P_5'' ... symmetrisch liegen bezüglich der Axe $P_0O𝔓_0$.

Demgemäss, wenn u, v gleich grosse ungerade Zahlen sind, muss für den Bogen $P_u'P_v''$ sein Halbirungspunkt in $𝔓_0$ sich ergeben, und auch die Unabhängigkeit seiner Länge von φ_1 und φ_2 ist zu begreifen.

3) Die Gerade OA halbirt immer den Winkel $P_2'OP_1''$; denn es ist

einesteils Wkl. $AOP_2' = 2\alpha + \varphi_2$,
anderntells Wkl. $AOP_1'' = AOB + BOP_1'' = 2\alpha + \varphi_2$.

Sofort erkennt man, dass die Bilder P_2', P_4', P_6' ... der Reihe nach mit den Bildern P_1'', P_3'', P_5'' ... symmetrisch liegen bezüglich der Axe $AO𝔄$.

Demgemäss, wenn u gerade ist und um Eins grösser als v, ist ersichtlich, dass der Bogen $P_u'P_v''$ seinen Halbirungspunkt in 𝔄 haben muss; und auch die Abhängigkeit seiner Länge von φ_2 wird begreiflich.

4) Die Gerade OA halbirt immer auch den Winkel $P_3'OP_2''$; denn es ist

einesteils Wkl. $AOP_3' = 4\alpha + \varphi_1$
andernteils Wkl. $AOP_2'' = AOB + BOP_2'' = 2\alpha + (2\alpha + \varphi_1)$.

Sofort erkennt man, dass die Bilder P_3', P_5', P_7' ... der Reihe nach mit P_2'', P_4'', P_6'' ... symmetrisch liegen bezüglich der Axe AO𝔄.

Wenn also u ungerade ist und um Eins grösser als v, muss der Bogen $P_u'P_v''$ seinen Halbirungspunkt in 𝔄 haben; und auch die Abhängigkeit seiner Länge von φ_1 ist begreiflich.

Bezüglich der Geraden OB findet man ebenso gerechtfertigt die Angaben:

5) Die OB halbirt immer den Winkel $P_1'OP_2''$ und ist dessen Hälfte gleich $2\alpha + \varphi_1$. Hienach die Bilder P_1', P_3', P_5' ... sind der Reihe nach zu P_2'', P_4'', P_6'' ... symmetrisch bezüglich der Axe BO𝔅. Ist also u ungerade und um Eins kleiner als v, so muss der Bogen $P_u'P_v''$ in 𝔅 halbirt sein; und die Abhängigkeit seiner Länge von φ_1 ist ersichtlich.

6) Die OB halbirt auch den Winkel $P_2'OP_3''$, und ist dessen Hälfte gleich $4\alpha + \varphi_2$. Hienach die Bilder P_2', P_4', E_6' ... sind der Reihe nach symmetrisch mit P_3'', P_5'', P_7'' ... bezüglich der Axe BO𝔅. Ist also u gerade und ums Eins kleiner als v, so muss der Bogen $P_u'P_v''$ in 𝔅 halbirt sein, und auch die Abhängigkeit seiner Länge von φ_2 ist begreiflich.

Von vorstehenden Angaben fällt immerhin ein neues und wesentliches Licht auf sehr wichtige Bestandteile der in den §§ 11. und 12. gewonnenen Sätze; ja diese könnten sogar vollständig von jenem hergeleitet werden. Doch dürfte die hiemit angedeutete Herleitung in wesentlichen Stücken der im § 11. durchgeführten Methode nachstehen, welche dort jedenfalls als die nächst liegende und ihres Erfolges vollkommen sichere sich empfehlen müsste.

§ 15.

„Wenn die Oeffnung $2\alpha^0$ des Winkelspiegels fest gegeben ist, „und man lässt den Punkt P in einer zu der Axe UV senkrechten „Ebene AOB stetig sich bewegen", so zwar, dass seine Entfernung OP von der Axe sich nicht ändert, und dass er von einer Lage aus dicht bei der Spur OA des ersten Spiegels bis dicht vor der Spur OB hingeht; so ist aus den hier vorgetragenen Lehren immer der Gang der zugehörigen Bilder P', P'' anschaulich zu entnehmen, insbesondere das die Grenzbilder P_x', P_v'' Angehende, ihre Zahl und Lage Betreffende genau zu verstehen.

Das ist, wie man sofort erkennt, höchst einfach in den Fällen, wo $360:2\alpha$ die Form $2n+2$ mit ungerader oder mit gerader n hat, weniger einfach in den übrigen, von welchen wenigstens ein besonders vorsichtig zu behandelnder durch ein Beispiel erläutert werden mag.

Sei

$$2\alpha^0 = 78^0, \quad \alpha = 39.$$

Aus der Angabe

$$180 = 2.78+24$$

sieht man, die bisherigen Bezeichnungen beibehaltend, dass

$$n = 2, \quad \omega = \alpha - e\alpha = 24, \quad e\alpha = 15, \quad \alpha + e\alpha = 54.$$

Das Beispiel umfasst die Fälle 12) und 11) des § 11. nebst ihren durch Vertauschung von φ_1 und φ_2 sich ergebenden Modificationen es sind hienach die folgenden Angaben zu machen, welche auch mit Hilfe des § 3. zu controliren sind.

1) Während der Winkel AOP von einem dicht bei Null liegenden Werte an stetig wächst bis vor 24^0, hat man beständig $u = 3$, $v = 2$. Die Grenzbilder P_3', P_2'' bewegen sich beide stetig gegen den festen Punkt 𝔄 hin, P_3' innerhalb des todten Raumes, P_2'' ausserhalb, beide immer gleich weit von 𝔄 entfernt; diese Entfernung allmählich alle Werte zwischen Null und 24^0 annehmend.

2) Während AOP von 24^0 an stetig wächst bis zu 54^0 ($= 78^0 - 24^0$), ist immer $u = v = 2$. Der Bogen zwischen den Grenzbildern P_2', P_2'' ist unveränderlich gleich 48^0, sein Halbirungspunkt immer der mit P sich bewegende Punkt 𝔓. Die Bewegung des Bogens P_2''𝔓P_2' ist eine Fortschiebung in der Richtung 𝔄𝔐𝔅, so dass anfänglich P_2'' in 𝔄 ist, und zuletzt P_2' in 𝔅.

3) Während AOP stetig wächst über 54^0 hinaus bis dicht vor 78^0, ist immer $u = 2$, $v = 3$. Die Grenzbilder P_2', P_3'' bewegen sich

beide stetig von dem festen Punkte 𝔅 weg, P_2' ausserhalb des todten Raumes, P_3'' innerhalb; beide immer gleich weit von 𝔅 entfernt, diese Entfernung allmählich alle Werte zwischen 24⁰ und Null annehmend.

§ 16.

Nachdem alles Wesentliche dargelegt ist, was auf die Abbildungen des einzelnen Punktes P sich bezieht, wollen wir irgend ein starres System Σ von Punkten C, D, E ... betrachten, welches in die Oeffnung (2α) des Winkelspiegels eingeführt sei; und es soll für die Punkte C, D, E ... der Figur Σ dahin gestellt bleiben, ob sie in Einer zu der Axe UV normalen Ebene sich befinden oder nicht.

Während wir nun bie bisherigen Bezeichnungen festhalten oder ihnen ganz analoge gebrauchen, machen wir zunächst die besondere Annahme, dass der Quotient $180:2\alpha$ eine ganze Zahl $n+1$ sei. Dann sind gemäss den Sätzen der §§ 6., 7. sofort die folgenden Angaben zu machen.

I) Als zu dem ersten Spiegel gehörige Abbildungen der Figur Σ ergeben sich der Reihe nach Figuren Σ_1', Σ_2', Σ_3' ... Σ_n', Σ_{n+1}', jene eine in einem der $n+1$ Hilfsfächer des ersten Spiegels, welche der Reihe nach sich darbieten als Flächenwinkel, jeder zwischen zwei nächst aufeinander folgenden der $n+2$ Ebenenstücke UVA, UVL_1, UVL_2 ... UVL_n, $UV\mathfrak{A}$. — Und mit analogen Bestimmungen erscheinen als zum zweiten Spiegel gehörige Abbildungen der Figur Σ die mit Σ_1'', Σ_2'', Σ_3'' ... Σ_n'', Σ_{n+1}'' zu bezeichnenden.

II) Je zwei nächst benachbarte Abbildungen Σ_k', Σ_{k+1}' sind symmetrisch mit Bezug auf die sie trennende Ebene (Scheinspiegel) UVL_k, so zwar, dass den Punktbildern C_k', D_k', E_k ... der Reihe nach entsprechen C_{k+1}', D_{k+1}', E_{k+1}' ... — In gleicher Weise sind Σ_k'', Σ_{k+1}'' symmetrisch mit Bezug auf die Ebene (Scheinspiegel) UVR_k.

III) Jede Abbildung Σ' oder Σ'' von ungerader Ordnung ist symmetrisch gleich dem Urbild Σ, so zwar, dass den Punkten C, D, E ... des letzteren entsprechen die in Σ' enthaltenen Punktbilder C', D', E'... und ebensogut die in Σ'' enthaltenen C'', D'', E'' ...

Daher: alle Abbildungen Σ' und Σ'' von ungerader Ordnung sind unter sich congruent, so zwar, dass in jedem Paare derselben die dann einen Partner angehörigen Bilder der Punkte C, D, E ... der Reihe nach entsprechen den im andern Partner befindlichen Bildern derselben Punkte.

IV) Jede Abbildung Σ' oder Σ'' von ungerader Ordnung ist congruent mit dem Urbild Σ, so zwar, dass mit den Punkten C, D, E ... des letzteren beziehungsweise zur Deckung zu bringen sind, sowol die in Σ' enthaltenen Punktbilder C', D', E' ... als die in Σ'' enthaltenen C'', D'', E'' ...

Daher auch: alle Abbildungen Σ' und Σ'' von gerader Ordnung sind (in selbstverständlichem Sinne) unter sich congruent.

Den Sätzen der § 10., II) und § 12., II) gemäss knüpft sich hieran:

V) Die Abbildungen Σ_{n+1}', Σ_{n+1}'', beide in dem Winkel zwischen den Ebenenstücken $UV\mathfrak{A}$, $UV\mathfrak{B}$ eingeschlossen, müssen immer vollständig vereinigt sein, so zwar, dass die Punkte C_{n+1}', D_{n+1}', E_{n+1}' ... der Reihe nach in C_{n+1}'', D_{n+1}'', E_{n+1}'' ... sich finden.

Indes ist hiebei der Unterschied zu berücksichtigen, welcher sich ergibt, jenachdem die Zahl $n+1$ ungerade ist oder gerade.

Wird nämlich diejenige Ebene beigezogen, welche durch die Axe UV gehend, hinter den beiden Spiegelflächen UVA, UVB befindlich, gleiche Winkel mit denselben macht, so ist in dem Falle der ungeraden $n+1$ zu bemerken: das Bild Σ_{n+1}' (oder das mit ihnen identische Σ_{n+1}'') liegt bezüglich genannter Ebene zu dem Urbild Σ symmetrisch, so dass jede der Strecken CC_{n+1}', DD_{n+1}', EE_{n+1}' ... durch genannte Ebene senkrecht halbirt ist. — Ist aber $n+1$ eine gerade Zahl, so sind Σ und Σ_{n+1}' in solcher gegenseitigen Lage, dass jede der Strecken CC_{n+1}', DD_{n+1}' EE_{n+1}' ... durch die Gerade UV senkrecht halbirt ist.

Die Bedeutung dieser Angabe zeigt sich an folgenden Beispielen:

Ist die Oeffnung $2\alpha^0 = 60^0$ $\{180:2\alpha = 3 = n+1\}$, so wird als mittleres Bild eines in den Winkelspiegel mit beiden Augen gleichmässig hineinschauenden Menschen ein solches Menschenbild erscheinen, dessen rechtes Auge die Abbildung von dem linken Auge des wirklichen Menschen ist.

Hat man aber $2\alpha^0 = 90^0\{180:2\alpha = 2 = n+1\}$, so wird als mittleres Bild eines in den Winkelspiegel mit beigen Augen gleichmässig hineinschauenden Menschen ein solches Menschenbild erscheinen, dessen rechtes Auge die Abbildung von dem rechten Auge des Urbildes ist.

§ 17.

Sei jetzt angenommen, dass die Division $180:2\alpha$ einen Rest ω lasse $\{180 = n.2\alpha + \omega\}$, und sei eine in die Oeffnung des Winkelspiegels eingeführte Figur Σ gedacht, wie im vorigen §.

Das $(n+1)$te Hilfsfach zum ersten Spiegel wie das $(n+1)$te zum zweiten ist nun ein Flächenwinkel $= \omega$, und sofort ist zu sagen:

Es erscheinen jedenfalls Abbildungen $\Sigma_1' \ldots \Sigma_n'$ und $\Sigma_1'' \ldots \Sigma_n''$, jede als eine vollständige Abbildung von Σ, und es sind für solche ganz dieselben Bestimmungen zu geben wie im vorigen §.

Was aber in dem $(n+1)$ten Hilfsfach (dem Schlussfach), zu dem einen oder andern Spiegel gehörig, zu suchen sei, dass ist jetzt näher zu erörtern.

Nach den §§ 10. und 12. kann irgend ein Punkt P der Figur Σ so liegen, dass entweder keines der Bilder P_{n+1}', P_{n+1}'' zu Stande kommt, oder nur ein einziges, oder beide. Daher ist bei jedem der zwei Schlussfächer an die drei Möglichkeiten zu denken, dass entweder gar kein Punkt der Figur Σ in demselben zur Abbildung gelange, oder nur ein Teil von Σ, oder Σ in ganzer Ausdehnung.

Indes ist eine Construction anzugeben, welche geeignet ist, für jeden Fall eine vollständige Aufklärung in anschaulicher Weise zu gewähren.

Aus Axe UV werde zunächst innerhalb des $n$ten Hilfsfaches des ersten Spiegels ein Ebenenstück $UV\mathfrak{L}$ so geführt, dass seine Abweichung von dem Ebenenstück $UVL_n = \omega$ sei. Dann ist aus § 6., V) zu entnehmen: was von der Figur Σ_n' zwischen den Ebenenstücken $UV\mathfrak{L}$ und UVL_n sich befindet, das und nur das erscheint auch in dem Schlussfache zwischen UVL_n und $UV\mathfrak{A}$, so zwar, das jedem Punkte C_n' ein Punkt C_{n+1}' entspricht, und die zwei Punkte C_n', C_{n+1}' zu der Ebene UVL_n symmetriseh liegen.

Desgleichen werde aus UV innerhalb des $n$ten Hilfsfaches des zweiten Spiegels ein Ebenenstück $UV\mathfrak{R}$ so geführt, dass seine Abweichung von dem Ebenenstück $UVR_n = \omega$ sei. Was dann von der Figur Σ_n'' zwischen den Ebenenstücken $UV\mathfrak{R}$ und UTR_n sich befindet, das und nur das erscheint auch in dem Schlussfache zwischen UVR_n und $UV\mathfrak{B}$, so zwar, dass jedem Punkt C_n'' ein Punkt C_{n+1}'' entspricht, und die zwei Punkte C_n'', C_{n+1}'' zu der Ebene symmetrisch liegen.

Man sieht hieraus, dass unter Umständen die ganze Leistung des Winkelspiegels mit Hervorbringung der Bilder Σ_n', Σ_n'' erschöpft ist, dass aber unter andern Umständen Figuren Σ_{n+1}', Σ_{n+1}'' entstehen, welchen so und so viel dazu fehlte, vollständige Bilder von Σ zu sein.

Um für solche ihre Beziehung zu Σ genauer zu erkennen, kann man zwei weitere Hilfsebenen einführen, beide aus UV gehend, innerhalb des Winkelspiegels selbst: die eine $UV\mathfrak{L}_1$ von UVA abweichend um ω, die andere $UV\mathfrak{R}_1$ von UVB abweichend um ω. — Sofort sind folgende Angaben zu verstehen:

I) Ueber die etwa zu Stande kommende Figur Σ_{n+1}'.

Ist $n+1$ eine gerade Zahl, so wird Σ_{n+1}' congruent sein mit derjenigen Figur, welche von Σ abgegeben wird in den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UVB, $UV\mathfrak{R}_1$. Genauer: bleibt Σ_{n+1}' in fester Verbindung mit den zwei Ebenenstücken $UV\mathfrak{A}$, UVL_n, und dreht man dieses System um die Axe UV (in der einen oder andern Richtung, ohne Gleitung) bis UVL_n mit UVB sich vereinigt, so wird jeder Punkt C_{n+1}' der Figur Σ_{n+1}' mit dem ihm entsprechenden C der Figur Σ vereinigt sein.

Ist aber $n+1$ eine ungerade Zahl, so wird Σ_{n+1}' symmetrisch gleich sein mit derjenigen Figur, welche von Σ abgegeben wird in den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UVA, $UV\mathfrak{L}_1$, und es existirt eine die UV enthaltende Ebene, mit Bezug auf welche je zwei einander entsprechende Punkte C_{n+1}' und C symmetrisch liegen.

II) Ueber die etwa zu Stande kommende Figur Σ_{n+1}''.

Ist $n+1$ eine gerade Zahl, so wird Σ_{n+2}'' congruent sein mit derjenigen Figur, welche von Σ abgegeben wird in den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UVA, $UV\mathfrak{L}_1$. Genauer: bleibt Σ_{n+1}'' in fester Verbindung mit den zwei Ebenenstücken $UV\mathfrak{B}$, UVR_n, und dreht man dieses System um die Axe UV (in der einen oder andern Richtung, ohne Gleitung) bis UVR_n mit UVA sich vereinigt, so wird jeder Punkt C_{n+1}'' mit dem ihm entsprechenden C der Figur Σ vereinigt sein.

Ist aber $n+1$ eine ungerade Zahl, so wird Σ_{n+1}'' symmetrisch gleich sein mit derjenigen Figur, welche von Σ abgegeben wird in den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UVB, $UV\mathfrak{R}$, und es existirt eine die Axe UV enthaltende Ebene, mit Bezug auf welche je zwei einander entsprechende Punkte C_{n+1}'' und C symmetrisch liegen.

§ 18.

Ist ein Punktsystem Σ (so wie in den zwei vorhergehenden §§ eingeführt, und hat man $180:2\alpha = n+1$, so ist klar, dass von den Bildern $\Sigma_1' \ldots \Sigma_n'$ und $\Sigma_1'' \ldots \Sigma_n''$ keines einen Punkt mit dem andern gemein hat; von diesen Bildern kann also keines irgendwie das andere stören. Aber auch bei den Bildern Σ_{n+1}' und Σ_{n+1}'' trifft letztere Behauptung zu. Da nämlich jeder Punkt P_{n+1}' des einen mit demjenigen Punkt P_{n+1}'' des andern vereinigt ist, welcher denselben Punkt P des Systems Σ abbildet wie jener, so wird durch die Vereinigung der Bilder Σ_{n+1}' Σ_{n+1}'' (innerhalb des todten Raumes) eben dafür gesorgt, dass in diesem ein einziges, nicht bloss ganz eines, sondern sogar in Betreff der Helligkeit begünstigtes Bild von Σ sich zeigt.

Sehen wir dagegen auf irgend einen derjenigen Fälle, wo (wie in § 17.) $180 = n.2\alpha + \omega$, so ist nur von den Bildern $\Sigma_1' \ldots \Sigma_{n-1}'$ und $\Sigma_1'' \ldots \Sigma_{n-1}''$ unbedingt zu sagen, dass keine zwei einander stören. Was dagegen Σ_n' und Σ_n'' betrifft, so sind diese zwar gewiss vollständige Bilder von Σ, aber bei jedem von ihnen ist die Möglichkeit zu berücksichtigen, dass es wenigstens teilweise in den todten Raume falle, auf welche vollends Σ_{n+1}' und Σ_{n+1}'' in ihrer ganzen etwa ergebenden Ausdehnung angewiesen sind. — Ist nun $\mathfrak{T}$ irgend ein Punkt innerhalb des todten Raumes, und fällt nach $\mathfrak{T}$ ein Bild P' von einem dem Σ angehörigen Punkt P, so sieht man leicht, dass $\mathfrak{T}$ kein Ort ist, sei es für ein anderes Bild P', noch für ein Bild P''; namentlich auch kein Ort für ein Bild Q', welches ein von P verschiedener Punkt Q des Σ geben möchte. Dagegen ist immer die Aufgabe zu lösen: man soll innerhalb der Oeffnung des Winkelspiegels einen Punkt Q suchen von solcher Lage, dass er ein Bild Q'' an der beliebig gegebenen Stelle liefere, wo bereits das Bild P' sich befindet,

Um die Auflösbarkeit dieser Aufgabe und die Einzigkeit der Auflösung streng und allgemein zu erweisen, kann man die folgende Betrachtung anstellen, welche wesentlich an den Satz IV a) des § 6. anknüpft.

Man stelle sich der Reihe nach vor die aus Axe UV entspringenden Ebenenstücke UVR_1, $UVR_2 \ldots$ bis zu demjenigen UVR_x, welches als letztes vor $UV\mathfrak{T}$ sich darbieten wird. Nun ist zu Punkt $\mathfrak{T}$ der ihm symmetrische mit Bezug auf Ebene UVR_x zu nehmen, zu diesem abgeleiteten Punkt wieder der ihm symmetrische mit Bezug auf Ebene UVR_{x-1}, zu diesem abgeleiteten wieder der ihm symmetrische

mit Bezug auf Ebene UVR_{x-2} u. s. w. Durch diese Veranstaltung wird offenbar jenseits der schliesslich zu benutzenden Ebene UVR_1, innerhalb der Oeffnung des Winkelspiegels ein solcher von Σ abgeleiteter Punkt gewonnen, an dessen Stelle ein leuchtender Punkt Q gebracht — genau an der vorgeschriebenen Stelle Σ des todten Raumes ein Bild Q'' liefern wird.

Aus dieser Darstellung erhellt, dass und wie immer diejenigen Störungen zu ermitteln sein werden, welche bezüglich der Reinheit der in den todten Raum fallenden Abbildungen eines Systems Σ sich ergeben mögen.

Im übrigen ist gemäss dem zuletzt Vorgetragenen herzorzuheben, dass freilich die besten Leistungen des Winkelspiegels im Sinne der Hervorbringung schöner Bilder eines beliebig ausgedehnten, in seine Oeffnung eingeführten Gegenstandes dann sich ergeben werden, wenn der Oeffnungswinkel ein absoluter Teil von 180^0 ist.

Uebersicht des Inhalts.

Vorwort.

§ 1. Erste Definitionen.

§ 2. Erste Orientirung bezüglich der Bilder eines einzelnen Punktes P; Bezeichnungen; zwei Reihen der Bilder.

§ 3. Zu jeder Reihe zwei Formeln gegeben, wonach die Lage jedes Bildes (gerader oder ungerader) Ordnung sich bestimmt. — Zwei Reihen von Gleichungen entsprechend den zwei Bilderreihen. An sie geknüpft die Frage der Bilderzahl.

§ 4. Lehrsätze, die ihre Lösung vorbereiten; todter Raum.

§ 5. Beweis der Begrenztheit der Bilderzahl für alle Fälle. Entsprechende Lehrsätze und Aufgabe.

§ 6. Lehrsätze über Zahl und Lage der Bilder in jeder Reihe für sich.

§ 7. Optische Bedeutung gewisser im vorigen § eingegangenen Hilfslinien. Durch sie die Abbildungen der zwei Einzelspiegel in einander bestimmt.

§ 8. Genaueres über diese Abbildungen und ihre Bedeutung für die Hauptuntersuchung.

§ 9. Regulirung des Fortgangs der letzteren.

§ 10. Genauere Untersuchung der Bilder eines in der Medianebene liegenden Punktes; vier Fälle.

§ 11. Desgleichen der Bilder eines seitlich von der Medianebene liegenden; zwölf Fälle.

§ 12. Zusammenfassung der Ergebnisse des vorigen § in sechs Hauptsätzen.

§ 13. Gegensatz und Verwandtschaft der Angaben der §§ 11. und 12. Generalregel über die Bestimmung der Gesamtzahl aller Bilder eines beliebig wo innerhalb der Oeffnung eingeführten Lichtpunkts.

§ 14. Weitere Aufklärung über den Ursprung einiger Sätze des § 12.

§ 15. Die möglichen Aenderungen der Bilderzahl eines Punktes, wenn er innerhalb der unveränderlich bleibenden Oeffnung des Winkelspiegels sich bewegt, durch ein charakteristisches Beispiel erläutert.

§ 16. Einführung eines Systems von Punkten in der Oeffnung des Winkelspiegels. Zunächst diejenigen Erscheinungen betrachtet, welche sich ergeben, wenn die Oeffnung ein aiiquoter Teil von 180° ist.

§ 17. Aufklärung der Erscheinungen in den übrigen Fällen.

§ 18. Die unter Umständen sich ergebenden Störungen der Bilder durcheinander.

II.

Zur Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Von

Herrn **Otto Ohnesorge.**

Das Problem, welches in der vorliegenden Abhandlung behandelt wird, ist folgendes:

Es sind sämtliche reelle Functionen u zu bestimmen, von der Beschaffenheit, dass sie der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügen und auf einer gegebenen algebraischen Curve vorgeschriebene Werte annehmen.

Die allgemeine Lösung der obigen Gleichung ist:

$$u = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta),$$

wo $\xi = x + iy$ und $\eta = x - iy$ gesetzt ist. Im allgemeinsten Falle sind χ_1 sowol wie χ_2 vollständig willkürliche Functionen, soll ihre Summe jedoch eine reelle Function von x und y darstellen, so müssen sie einander conjugirt sein.

§. 1.

Ich bestimme zunächst u so, dass es constant ist auf einer gegebenen Curve. Ist dies der Fall, so lautet die Gleichung der Curve $\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) = \alpha$. Die Curve soll jedoch eine algebraische sein, mit-

hin muss durch diese Gleichung eine algebraische Relation zwischen ξ und η ausgedrückt sein. Hieraus folgt sofort die Form der Function χ, wenn die obige Gleichung durch eine algebraische Beziehung zwischen ξ und η für jeden Wert von α erfüllt ist; es kann dies nämlich nur dann stattfinden, wenn χ entweder selbst eine algebraische Function oder aber höchstens ein elliptisches Integral erster Gattung von einer algebraischen Function ist. Besteht aber eine algebraische Gleichung zwischen ξ und η nur für einen bestimmten Wert von α, so können auch transcendente Functionen höherer Ordnung auftreten.

Nach dieser Betrachtung kann man das obige Problem auch auffassen als folgendes:

Es ist eine Function zu bestimmen, deren Additionstheorem gegeben ist.

Ist die algebraische Gleichung, die das Additionstheorem der beiden Functionen χ_1 urd χ_2 herstellt, so beschaffen, dass dieses Problem überhaupt eine Lösung besitzt, so ist diese Lösrng leicht zu finden, da der Weg hierzu schon von Euler gegeben ist.

In der Tat, es sei $\varphi(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung der Curve, so ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} d\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} d\eta = 0.$$

Bestimmt man nun mit Hilfe der Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ ξ als Function von η und η als Function von ξ und ersetzt ia $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$ die η durch die ξ und in $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$ die ξ durch die η, oder auch umgekehrt, so ist entweder

$$\chi_1 = \int \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} d\xi \quad \text{und} \quad \chi_2 = \int \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \partial\eta$$

oder

$$\chi_1 = \int \frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}} d\xi, \quad \chi_2 = \int \frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}} d\eta$$

oder allgemeiner:

$$\chi_1 = \int M \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} d\xi \quad \text{oder} \quad = \int \frac{M}{\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}} d\xi$$

und

$$\chi_2 = \int M \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} d\eta \quad \text{oder} \quad = \int \frac{M}{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}} d\eta$$

wo natürlich auch in M, welches eine willkürliche, jedoch symmetrische Function von ξ und η sein muss, entweder die ξ durch die η oder die η durch die ξ, vermöge der Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ zu ersetzen sind.

Die Gleichung der Curve ist in Bezug auf beide Variable vom n ten Grade, es fragt sich, welche von den n Wurzeln zu nehmen sind. Die Frage erledigt sich dadurch, dass, wenn $\xi = \omega(\eta)$ und $\eta = (\xi)$ ist, dass alsdann $\omega(\tau(\xi)) = \xi$ sein muss. Derartige Wurzeln existiren wie später bewiesen werden wird, stets.

Hat man die Functionen χ so bestimmt, so wird der Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ durch die Beziehung $\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) = \alpha$ Genüge geleistet, bei passender Bestimmung der Constanten α, es bleibt nun noch zu beweisen, dass auch die erhaltenen Functionen χ_1 und χ_2 einander conjugirt sind.

Die Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ ist entstanden aus der algebraischen Gleichung $\psi(x, y) = 0$ dadurch, dass man an Stelle von x $\frac{1}{2}(\xi + \eta)$, und an Stelle von y $\frac{1}{2i}(\xi, \eta)$ gesetzt hat. Da nun $\psi(x, y)$ eine rationale Function von x und y ist, so ergiebt sich sofort, dass, wenn $\varphi(\xi, \eta)$ eine reelle Function von ξ und η ist, sie auch symmetrisch ist in Bezug auf ξ und η: es ist demnach, wenn $\xi = \omega(\eta)$ eine Wurzel der Gleichung ist, auch $\eta = \omega(\xi)$ eine, ferner ist $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ dieselbe Function von ξ und η wie $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ von η und ξ, hieraus folgt, dass χ_1 und χ_2 dieselben Functionen sind.

Ist jedoch $\varphi(\xi, \eta)$ eine complexe Function, so lässt sie sich stets auf die Form bringen $A + i(\xi - \eta)B$, wo A und B rationale und symmetrische Functionen sind. Dieser Ausdruck gleich null gesetzt und die so entstandene Gleichung nach ξ aufgelöst, gebe $\xi = \omega(\eta) + i\tau(\eta)$, es folgt hieraus, dass $\eta = \omega(\xi) - i\tau(\eta)$ ebenfalls eine Wurzel sein muss.

Nun ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial A}{\partial \xi} + iB + i(\xi - \eta)\frac{\partial B}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial A}{\partial \eta} - iB + (\xi - \eta)\frac{\partial B}{\partial \eta}$$

substituirt man hierin für ξ und für η die entsprechenden Functionen

und trennt zu gleicher Zeit die reellen von den imaginären Teilen, (immer berücksichtigend, dass, wenn $B(\omega + i\tau) = F + iG$ ist, $B(\omega - i\tau) = F - iG$), so erhält man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = C + iD + i(F + iG) + i(\xi - \omega + i\tau)(J + iK)$$

(alles Functionen von ξ)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = C - iD - i(F - iG) + i(\omega + i\tau - \eta)(J - iK)$$

(alles Functionen von η), oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = C - G - J\tau - K(\xi - \omega) + i\{D + J - \tau K + (\xi - \omega)J\}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = C - G - J\tau + K(\omega - \eta) - i\{D + J - \tau K + (\eta - \omega)J\}$$

Mithin sind $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ conjugirte Functionen, also auch

$$\chi_1 = \int M \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi \quad \text{und} \quad \chi_2 = \int M \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta$$

da auch M durch die Substitution $\xi = \omega(\eta) + i\tau(\eta)$ und $\eta = \omega(\xi) - i\tau(\xi)$ in zwei conjugirte Functionen verwandelt wird.

Diese Methode lässt sich leicht ausdehnen auf den Fall, wo u auf der gegebenen Curve nicht constant, sondern einer beliebigen Function gleich wird.

Es sei $\tau(\xi . \eta)$ die gegebene Function, so wird die Gleichung der Curve enthalten sein in der Gleichung:

$$\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) = \tau(\xi, \eta),$$

es werden also die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta = 0$$

und

$$\left(\chi_1'(\xi) - \frac{\partial \tau}{\partial \xi}\right) d\xi + \left(\chi_2'(\eta) - \frac{\partial \tau}{\partial \eta}\right) d\eta = 0$$

identisch sein müssen, also

$$\chi_1'(\xi) - \frac{\partial \tau}{\partial \xi} = M \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

und

$$\chi_2'(\eta) - \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = M\frac{\partial \varphi}{\partial \eta},$$

mithin wird

$$u = \int\left(M\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)d\xi + \int\left(M\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial \tau}{\partial \eta}\right)d\eta.$$

Auch hier ist M eine symmetrische Function, und auch hier sind entweder die ξ durch die η, oder die η durch die ξ vermöge der Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ zu ersetzen.

Ist τ ebenfalls eine symmetrische Function oder von der Form $A + i(\xi - \eta)B$, so wird auch u eine reelle Function von x und y sein.

Uebrigens kann man stets eine symmetrische Function herstellen, die auf der gegebenen Curve mit τ übereinstimmt.

In der Tat, es sei A irgend eine symmetrische Function von ξ und η, ersetzt man nun in $\tau(\xi, \eta)$, ξ und η durch t und φ vermöge der Gleichungen $t = t(\xi, \eta)$ und $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$, so wird $\tau(\xi, \eta) = \tau_1(t, \varphi)$, auf der gebenen Curve aber wird $\varphi = 0$, also τ nur eine Function von t, mithin symmetrisch in Bezug auf ξ und η.

Die gefundene Function ist insofern noch willkürlich als M willkürlich ist, M müsste demnach durch vorgeschriebene Stetigkeitsbedingungen bestimmt werden. Diese Aufgabe würde ohne Zweifel äusserst schwieriger Natur sein, doch kann man dieselbe teilweise umgehen, dadurch dass man zu dem oben bestimmten u diejenige allmeinste Function u_1 addirt, die auf der gegebenen Curve gleich null ist. Diese Function kann man, wie in dem nächsten Abschnitte gezeigt werden wird, stets ohne Integrale in endlicher Form darstellen. Die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen bietet alsdann, wenn sie auch allgemein nicht ausführbar ist. in den meisten Fällen keine grossen Schwierigkeiten mehr dar. Nur, wenn endliche Unstetigkeiten, die auf bestimmten Linien stattfinden, zu beseitigen sind, könnte man auf wesentliche Schwierigkeiten stossen.

§. 2.

Die Methode, die wir soeben entwickelt haben, führt nur dann zum Ziel, wenn die Gleichung der gegebenen Curve irreductibel ist, wenn also nur eine einzige algebraische Curve gegeben ist, auf der die Function constant sein soll. In diesem Abschnitte werde ich eine Methode geben, die sich auch auf Curven anwenden lässt, deren Gleichung reductibel ist. Sie ist jedoch insofern beschränkter, als u stets constant sein muss.

Die gesuchte Function u kann in doppelter Form dargestellt werden, nämlich durch

$$u - \alpha = \chi_1(\xi) + \chi_1(\eta)$$

oder durch

$$u - \alpha = \frac{1}{i}\{\chi_1(\xi) - \chi_2(\eta)\}.$$

Ich behandle zuerst den Fall, dass u in der zweiten Form dargestellt wird. In diesem Falle ist $u = \alpha$ auf der Curve $\chi_1(\xi) = \chi_2(\eta)$, auf der gegebenen Curve jedoch sei $\xi = \varphi(\eta, i)$ und $\eta = \varphi(\xi, -i)$, demnach muss sein $\chi_1(\xi) = \chi_2(\varphi(\xi))$. Ist φ eine reelle Function, so ist $\chi_1 = \chi_2$, also $\chi(\xi) = \chi(\varphi(\xi))$.

Zwischen ξ und η jedoch besteht eine symmetrische Gleichung, es ist mithin, wenn $\eta = \varphi(\xi)$ auch $\xi = \varphi(\eta)$, demnach wird stets eine Wurzel existiren, so dass $\varphi(\varphi(\xi)) = \xi$ ist.

Ist nun $\chi(\xi, \varphi(\xi))$ eine symmetrische Function von ξ und $\varphi(\xi)$ und bezeichne ich dieselbe mit $\chi(\xi)$, so ist $\chi(\xi) = \chi(\varphi(\xi))$.

Wir haben also erreicht, dass alle u, die constant sind auf der gegebenen Curve, sich darstellen lassen in der Form:

$$u - \alpha = i\{\chi(\xi, \varphi(\xi)) - \chi(\eta, \varphi(\eta))\},$$

wo $\chi(\xi, \varphi(\xi))$ eine willkürliche, jedoch symmetrische Function von ξ und $\varphi(\xi)$ sein muss.

Ist $\varphi(\xi)$ keine reelle Function von ξ, so ist, wie wir schon im ersten Abschnitte gesehen haben, an Stelle von $\varphi(\xi)$ zu setzen $\omega(\xi) - i\tau(\xi)$ und an Stelle von $\varphi(\xi)$ $\omega(\eta) + i\tau(\eta)$, demnach wird:

$$u - \alpha = i\{\chi(\xi, \omega(\xi) - i\tau(\xi)) - \chi(\xi, \omega(\eta) + i\tau(\eta))\}$$

wo χ wiederum eine reelle und symmetrische Function der beiden Argumente sein muss.

2) u habe die Form: $u - \alpha = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta)$, so erhält man leicht durch ähnliche Betrachtungen wie oben, dass zu setzen ist:

$$u - \alpha = \{\psi(\xi) - \psi(\varphi(\xi))\}\{\chi(\xi, \varphi(\xi)) + \{\psi(\eta) - \psi(\varphi(\eta))\} \cdot \chi(\eta, \varphi(\eta))$$

Es sind hierin die ψ und χ stets reelle, doch willkürliche Functionen.

Dass übrigens, wenn an Stelle von ξ $\varphi(\eta)$ gesetzt wird, die rechte Seite versshwindet, erkennt man leicht, nur muss die Bedingungsgleichung stattfinden

$$\varphi(\varphi(\xi)) = \xi.$$

Derartige Functionen $\varphi(\xi)$ sind aber immer vorhanden. Es ist $\varphi(\varphi(\xi))$ bestimmt als die Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren linke Seite eine symmetrische Function ist in Bezug auf $\varphi(\varphi(\xi))$ und $\varphi(\xi)$: setzt man nun an Stelle von $\varphi(\varphi(\xi))$ ξ ein, so erhält man eine symmetrische Gleichung ξ und $\varphi(\xi)$, die identisch ist mit derjenigen, durch welche $\varphi(\xi)$ als Function von ξ bestimmt wird, diese ist also immer erfüllt, und mithin ist $\varphi(\varphi(\xi)) = \xi$ eine Wurzel der Gleichung.

Diese soeben aufgestellten Functionen u besitzen sämtlich auf der gegebenen Curve den constansten Wert α; im allgemeinen werden sie nicht nur auf dieser einen Curve, sondern noch auf verschiedenen andern gleich α sein, es bietet sich uns jetzt das Problem dar, von diesen Functionen diejenigen heraus zusuchen, die auf mehreren gegebenen algebraischen Curven constant sind. Zunächst ist klar, dass je mehr Curven gegeben sind, desto geringer die Willkürlichkeit der Function χ sein wird.

Es sei nun vorgeschrieben, eine Function zu bestimmen, die auf den beiden algebraischen Curven $\xi = \varphi_1(\eta)$ und $\xi = \varphi_2(\eta)$ gleich α wird.

Diese Function muss sich darstellen durch die beiden Formen:

$$\frac{u-\alpha}{i} = \chi_1(\xi, \varphi_1(\xi)) - \chi_2(\eta, \varphi_1(\eta))$$

und

$$\frac{u-\alpha}{i} = \chi_3(\xi, \varphi_2(\xi)) - \chi_4(\eta, \varphi_2(\eta))$$

diese Gleichungen gehen dann und nur dann in einander über, wenn χ eine symmetrische Function ist nicht nur von ξ und $\varphi_1(\xi)$, sondern auch von $\omega(\xi)$ und $\omega(\varphi_1(\xi))$, wo ω so beschaffen ist, dass $\omega(\varphi_1(\xi)) = \omega(\varphi_2(\xi))$, es wird also sein:

$$\frac{u-\alpha}{i} = \chi_1(\omega(\xi),\ \omega(\varphi_1(\xi))) - \chi_2(\omega(\eta),\ \omega(\varphi_1(\eta)))$$

Dass die rechte Seite verschwindet, wenn man an Stelle von ξ $\varphi_1(\eta)$ oder $\varphi_2(\eta)$, sieht man sofort.

Hätten wir u dargestellt durch die erste Form, also durch die Summe zweier Functionen χ, so würden wir zu derselben Function $\omega(\xi)$ gelangt sein.

Soll u auf den n vorgeschriebenen Curven $\xi = \varphi_1(\xi)$ oder gleich $\varphi_\lambda(\xi)$ (wo $\lambda = 1 \ldots n$) $= \alpha$ sein, so muss die Function ω den Bedingungen genügen:

$$\omega(\varphi_1(\xi)) = \omega(\varphi_2(\xi)) = \ldots \omega(\varphi_n(\xi)).$$

Es fragt sich nun, wie sind derartige Functionen zu bestimmen?

Die Functonalgleichung für ω ist

$$\omega(\varphi_1(\xi)) = \omega(\varphi_2(\xi)),$$

also auch

$$\omega(\xi) = \omega(\varphi_2(\varphi_1(\xi)) = \omega(\tau(\xi))$$

wenn

$$\varphi_2(\varphi_1(\xi)) = \tau(\xi)$$

gesetzt wird.

Ich bilde folgende Functionenreihe:

$$\xi = \tau^0(\xi), \quad \tau^1(\xi) = \tau(\xi)), \quad \tau^2(\xi) = \tau(\tau(\xi)) \ldots \tau^n(\xi) = \tau(\tau^{n-1}(\xi)) \ldots$$
$$\tau^{-1}(\xi), \quad \tau^{-2}(\xi) \ldots \tau^{-n}(\xi) \ldots$$

wo $\tau^{-1}(\xi)$ bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\tau(\tau^{-1}(\xi)) = \xi \quad \text{und} \quad \tau^{-n}(\xi) = \tau^{-1}(\tau^{-n+1}(\xi)).$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, entweder ist die Anzahl der so gebildeten und von einander verschiedenen Functionen eine endliche oder nicht. Damit der erste Fall eintrete, muss irgend eine Gleichung bestehen von der Form

$$\tau^\nu(\xi) = \tau^{-\mu}(\xi),$$

ist dies der Fall, so ist ersichtlich, dass irgend eine symmetrische Function sämtlicher von einander unterschiedenen Functionen τ eine der gesuchten Functionen ω ist, man wird aber unendliche viele algebraische Functionen herstellen können, die der Functionalgleichung genügen.

Ist dies jedoch nicht der Fall, existiren aber unendlich viele von einander verschiedene Functionen τ, so wird man auch hier, um ω zu erhalten, aus diesen unendlich vielen Elementen eine symmetrische und convergente Function bilden müssen. Es werden aber nur transcendente Functionen bestehen, die der Functionalgleichung genügen.

Abgesehen davon, dass man diese Reihe nur anwenden kann, wenn nur einer Functionalgleichung zu genügen ist, wird die Aufstellung derselben schon im allgemeinen unüberwindliche Schwierigkeiten darbieten, da es bei einer wenig complicirten Function schwer, oft unmöglich sein wird, das $n$te Glied der Reihe in independenter Form darzustellen.

Wir verlassen mithin diese Reihe vollständig und suchen aus schon bekannten Functionen die ω darzustellen.

Das Problem ist, eine Function ω so zu bestimmen, dass $\omega(\xi)=\omega(\eta)$ ist, wenn zwischen ξ und η eine algebraische, jedoch nicht symmetrische Gleichung besteht. Ein Mittel hierzu bieten die periodischen Functionen. In der Tat, es ist z. B, $\sin\xi=\sin\eta$, wenn die nicht symmetrische Gleichung besteht $\xi-\eta=2\pi$.

Ist aber χ eine periodische Function mit der Periode α, so ist:

$$\chi(\tau(\xi))=\chi(\tau(\eta)) \quad \text{wenn} \quad \tau(\xi)-\tau(\eta)=\alpha \quad \text{ist.}$$

Soll nun diese Gleichung eine algebraische Relation zwischen ξ und η darstellen, so muss $\tau(\xi)$ entweder selbst eine algebraische Function sein oder ein elliptisches Integral erster Gattung von einer algebraischen Function von ξ; in diesem Falle würde man für jeden Wert von α eine algebraische Beziehung erhalten. Es kann jedoch auch hier τ eine transcendente Function höherer Gattung sein, doch wird man alsdann nur für einen bestimmten Wert von α eine algebraische Gleichung erhalten. Ist die algebraische Gleichung zwischen ξ und η so beschaffen, dass man mit Hülfe dieser Methode zum Ziel kommt, so kann man die im ersten Paragraphen gegebene Methode benutzen.

Diese Functionen sind die einzigen, die man mit Hülfe der einfach periodischen Functionen bilden kann. Benutzt man mehrfach periodische Functionen, so wird man auch Functionen erhalten, die durch mehrere Substitutionen ungeändert bleiben.

Als specielles Beispiel behandele ich den Fall, bei dem zwischen ξ und η eine lineare Gleichung besteht. Es ist aber eine Function ω aufzustellen, so dass

$$\omega(\xi)=\omega\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right)$$

Ich nehme an, ω sei eine Function von

$$\tau(\xi)=\frac{a\xi+b}{c\xi+a}$$

und versuche, ob sich nicht die Constanten a, b, c, d so bestimmen lassen, dass

$$\tau\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right)=\tau(\xi)+\lambda \quad \text{ist.}$$

Es muss demnach sein:

$$\frac{(a\alpha+b\gamma)\xi+a\beta+b\delta}{(c\alpha+d\gamma)\xi+c\beta+d\delta}=\frac{(a+\lambda c)\xi+b+\lambda d}{a\xi+b}$$

also

$$(\alpha - m)c + \gamma d = 0 \qquad \alpha a + \gamma b = m(a + \lambda c)$$
$$\beta c + (\delta - m)d = 0 \qquad \alpha a + \delta b = m(b + \lambda d)$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt zur Bestimmung von m die quadratische Gleichung:

$$(\alpha - m)(\delta - m) - \beta\gamma = 0$$

ferner ist:

$$\frac{c}{d} = -\frac{\gamma}{\alpha - m} = -\frac{\delta - m}{\beta} = \frac{(\alpha - m)a + \gamma b}{\beta a + (\delta - m)b},$$

hieraus folgt zur Bestimmung von a und b:

$$((\alpha - m)^2 + \beta\gamma)a + \gamma(\alpha + \delta - 2m)b = 0$$

oder da

$$\beta\gamma = (\alpha - m)(\delta - m)$$

$$\{\alpha + \delta - 2m\}\{(\alpha - m)a + \gamma b\} = 0.$$

Da nun $\frac{a}{b}$ nicht gleich $\frac{c}{d}$ sein darf, so muss

$$\alpha + \delta - 2m = 0$$

sein, also

$$m = \frac{\alpha + \delta}{2}.$$

Dieser Wert in die Bestimmungsgleichung für m eingesetzt, giebt:

$$(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0.$$

Besteht also zwischen den Coefficienten der Substitution die Gleichung:

$$(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0,$$

d. h. sind die beiden Wurzeln der Gleichung

$$(\alpha - m)(\delta - m) - \beta\gamma = 0$$

einander gleich, so lässt sich stets eine Function $\tau(\xi)$ aufstellen, so dass

$$\tau\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right) = \tau(\xi) + \lambda$$

ist; also ist ω eine Function von $\tau(\xi)$ mit der Periode λ. Diese Periode wird aus den beiden noch vollständig willkürlichen Grössen a und b bestimmt.

2) Diese Bedingungsgleichung finde nicht statt, die Gleichung

$$m^2 - (\alpha + \delta)m + \alpha\delta - \beta\gamma = 0$$

habe also zwei verschiedene Wurzeln m_1 und m_2, so lässt sich stets eine Function

$$\tau(\xi)=\frac{a\xi+b}{c\xi+d}$$

aufstellen, so dass

$$\tau\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right)=\frac{m_1}{m_2}\tau(\xi)\quad\text{ist.}$$

In der Tat, man erhält zur Bestimmung von a, b, c, d die Gleichungen:

$$(\alpha-m_1)a+\gamma b=0 \qquad (\alpha_2-m_2)c+\gamma d=0$$
$$\beta a+(\delta-m_1)b=0 \qquad \beta c+(\delta-m_2)d=0$$

denen immer genügt werden kann.

In diesem Falle ist also ω eine Function von $\log\tau(\xi)$ mit der Periode $\log\frac{m_1}{m_2}$.

Sind m_1 und m_2 reelle Grössen, ist also $(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma>0$, so ist auch $\tau(\xi)$ stets eine reelle Function; sind sie jedoch complex, so muss man das Additionstheorem des Arcustangens anwenden, um reelle Functionen zu erhalten.

Es ist

$$\operatorname{arctg}\tau+\operatorname{arctg}m=\operatorname{arctg}\frac{\tau+m}{1-\tau m},$$

wiederum sei

$$\tau(\xi)=\frac{a\xi+b}{c\xi+d},$$

also

$$\operatorname{arctg}\tau\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right)=\operatorname{arctg}\frac{(a\alpha+b\gamma)\xi+a\beta+b\delta}{(c\alpha+d\gamma)\xi+c\beta+d\delta}$$

und

$$\operatorname{arctg}\tau(\xi)+\operatorname{arctg}m=\operatorname{arctg}\frac{(a+mc)\xi+b+md}{(c-ma)\xi+d-mb},$$

demnach setze ich:

$$\alpha a+\gamma b=\lambda(a+mc)$$

oder geordnet:

$$(\alpha-\lambda)a+\gamma b=m\lambda c \qquad (\alpha-\lambda)c+\gamma d=-m\lambda a$$
$$\beta a+(\delta-\lambda)b=m\lambda d \qquad \beta c+(\delta-\lambda)d=-m\lambda b,$$

hieraus folgt:

$$((\alpha-\lambda)^2+\gamma\beta+m^2\lambda^2)c+(\alpha+\delta-2\lambda)\gamma d=0$$
$$((\alpha-\lambda)^2+\gamma\beta+m^2\lambda^2)a+(\alpha+\delta-2\lambda)\gamma b=0.$$

Wären die Coefficienten dieser Gleichungen von null verschieden, so würde man erhalten $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\tau(\xi)$ würde sich also auf eine Constante reduciren, es ist mithin:

$$(\alpha - \lambda)^2 + \gamma\beta + m^2\lambda^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta)$$

also

$$m\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{-((\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma)}$$

also reell.

Sind m und λ so bestimmt, so lassen sich zwei Gleichungen des Systems aus den beiden anderen ableiten, es bleiben mithin noch 2 übrig, und aus diesen folgt:

$$c = \frac{(\alpha - \delta)a + 2\gamma b}{m(\alpha + \delta)}, \qquad d = \frac{2\beta a + (\delta - \alpha)b}{m(\alpha + \delta)}$$

mithin:

$$\tau(\xi) = \sqrt{-((\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma)} \cdot \frac{a\xi + b}{((\alpha - \delta)a + 2\gamma b)\xi + 2\beta a + (\delta - \alpha)b}$$

Ist $\tau(\xi)$ so bestimmt, so ist

$$\operatorname{arc\,tg} \tau\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right) = \operatorname{arc\,tg} \tau(\xi) + \operatorname{arc\,tg} m.$$

Nimmt man nun irgend eine periodische Function von $\operatorname{arc\,tg} \tau(\xi)$ mit der Periode $\operatorname{arc\,tg} m$, so ist diese Function das gesuchte ω.

Wir haben für $\tau(\xi)$ stets eine lineare gebrochene Function gesetzt, es liegt die Frage nahe, ob es nicht noch gebrochene Functionen höherer Geraden giebt, die den obigen Bedingungen genügen?

Stellt man die Bedingungsgleichung für die Coefficienten einer solchen Function auf, so erkennt man dass allen Bedingungen stets genügt werden kann; eine eingehendere Untersuchung jedoch ergiebt, dass Zähler und Nenner so viele gemeinsame Factoren besitzen, um auch in diesem Falle $\tau(\xi)$ auf eine lineare gebrochene Function zu reduciren.

Teil II. Anwendungen.

Die soeben entwickelte Theorie lässt sich direct und ohne grosse Schwierigkeiten anwenden auf viele Probleme der Analysis und der mathematischen Physik, da bei allen diesen Anwendungen nur darauf zu achten ist, dass auch den Stetigkeitsbedingungen genügt wird.

Sind z. B. Functionen zu bestimmen, die stetig sind in der ganzen unendlichen Ebene mit Ausnahme des Unendlichkeitspunktes und der von einer oder mehreren Curven umgebenen Fläche, so genügt man den Stetigkeitsbedingungen meistenstenteils schon dadurch, dass man von allen Functionen, die constant sind auf den Begrenzungscurven und die die gegebene Unstetigkeit in der Unendlichkeit besitzen, diejenige auswählt, die den bestimmten constanten Wert nur auf diesen Grenzcurven besitzt.

Anders jedoch stellt sich die Sache, wenn Functionen zu bestimmen sind, die den bestimmten constanten Wert auf einer Curve besitzen, in derem Innern sie in bestimmten Punkten unstetig werden sollen. Die Functionen $\varphi(\xi)$ und $\varphi(\eta)$, die wir durch Auflösung einer Gleichung n ten Grades gefunden haben, sind hier, direct wenigstens, meistenteils nicht anzuwenden, da sie gewöhnlich im Innern der Fläche in gewissen Linien oder Punkten endliche Unstetigkeiten besitzen werden, oder vielmehr, da sie im Innern der Fläche gewisse Linien nicht überschreiten dürfen, wenn sie am Rande der Fläche mit dem vorgeschriebenen Werte ankommen sollen. Man wird in diesem Falle zurückgehen müssen auf die im ersten Paragraphen gegebene Methode und versuchen, die Gleichung der Begrenzung darzustellen in der Form:

$$\chi(\xi) + \chi(\eta) = \alpha,$$

bei weiteren Rechnungen sind alsdann nur die Functionen $\chi(\xi)$ und $\chi(\eta)$ anzuwenden.

Als specielle Anwendungen werde ich, um den Umfang dieser Abhandlung nicht zu sehr anwachsen zu lassen, nur zwei Beispiele geben.

§. 1.

Die Gleichgewichtsverteilung der Elektricität auf zwei unendlich grossen Cylindern mit kreisförmiger Basis.

Diese Verteilung ist durch die Potentialfunction vollständig bestimmt. Diese Function muss den bekannten Stetigkeitsbedingungen genügen und constant sein auf der Peripherie beider Kreise.

Die Gleichungen der beiden Kreise seien:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad (x-a)^2 + y^2 = \varrho^2$$

oder in ξ und η ausgedrückt:

$$\xi . \eta = r^2 \quad \text{und} \quad \xi . \eta - a(\xi + \eta) = \varrho^2 - a^2$$

also ist auf der Peripherie

$$\eta = \frac{r^2}{\xi} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{a\xi + \varrho^2 - a^2}{\xi - a}.$$

Demnach ist zunächst eine Function zu bestimmen, die ungeändert bleibt durch die Substitution: $\left| \xi, \frac{r^2\xi - r^2 . a}{a\xi + \varrho^2 - a^2} \right|$. Um unsere früheren Entwickelungen anzuwenden, ist zu setzen:

$$\alpha = r^2, \quad \beta = -ar^2, \quad \gamma = a, \quad \delta = \varrho^2 - a^2,$$

die in m quadratische Gleichung wird mithin:

$$m^2 - (r^2 + \varrho^2 - a^2)m + r^2\varrho^2 = 0$$

also

$$\left.\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\{r^2 + \varrho^2 - a^2 \pm \sqrt{(r^2 + \varrho^2 - a^2)^2 - 4r^2\varrho^2}\}.$$

Diese Gleichung besitzt zwei gleiche Wurzeln, wenn $a^2 = (r \pm \varrho)^2$ ist, wenn sich also die beiden Kreise berühren, schneiden sich die beiden Kreise, so wird die Quadratwurzel imaginär, liegen sie völlig von einander getrennt, so sind die Wurzeln reell.

1) Die beiden Kreise berühren sich, und es sei $a = r + \varrho$.

Es ist zunächst die Function $\tau(\xi)$ aufzustellen, diese möge in der Unendlichkeit gleich null werden und sich durch die Substitution um π vermehren, ich setze also:

$$\tau(\xi) = \frac{r . \varrho . \pi}{r + \varrho} \cdot \frac{1}{\xi - r}$$

ferner wende ich, um u aufzustellen, die Form an:

$$u - \alpha = \chi(\omega(\xi)) - \chi(\omega(\varphi(\xi))) + \chi(\omega(\eta)) - \chi(\omega\varphi(\eta))$$

und setze, da u in der Unendlichkeit unendlich werden soll wie der Logarithmus der Entfernung:

$$\chi(\omega(\xi)) = k \log \sin \tau(\xi),$$

also ist:

$$u - \alpha = k . \log \frac{\sin \tau(\xi), \ \sin \tau(\eta)}{\sin \tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right), \ \sin \tau\left(\frac{r^2}{\eta}\right)}.$$

Nun ist aber

$$\tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right) = -\tau(\xi) - \frac{\varrho}{r + \varrho} . \pi,$$

u wird also gleich α auf den Curven:

$$\sin\left(\tau(\xi)+\frac{\varrho}{r+\varrho}\pi\right)\sin\left(\tau(\eta)+\frac{\varrho}{r+\varrho}\pi\right)-\sin\tau(\xi)\,.\,\sin\tau(\eta)=0.$$

Es besteht aber folgende Gleichung:

$$\sin(x+\alpha)\sin(y+x)-\sin x\,.\,\sin y=\sin\alpha\sin(x+y+\alpha),$$

mithin ist $u=\alpha$ auf dem Curvensystem:

$$\tau(\xi)+\tau(\eta)+\frac{\varrho}{r+\varrho}\pi=n\pi$$

oder x und y eingeführt auf dem Curvensystem:

$$\left(x-\frac{n(r+\varrho)r}{n(r+\varrho)-\varrho}\right)^2+y^2=\left(\frac{r\cdot\varrho}{n(r+\varrho)-\varrho}\right)^2.$$

Da n jede beliebige Zahl sein darf, so stellt diese Gleichung unendlich viele Kreise dar. Die Entfernung der Mittelpunkte vom Nullpunkte sei e_n und die Radien seien R_n, so ist

$$e_0=0 \qquad R_0=r$$

und

$$e_1=r+\varrho \qquad R_1=\varrho$$

diese beiden Kreise sind die gegebenen.

Ferner ist, wenn n positiv:

$$e_n=\frac{n(r+\varrho)r}{n(r+\varrho)-\varrho} \quad \text{und} \quad R_n=\frac{r\,.\,\varrho}{n(r+\varrho)-\varrho}$$

also

$$e_n-R_n=r.$$

Da, wenn $n>1$, $R_n<\varrho$ ist, so liegen diese Kreise sämtlich im Innern des zweiten Kreises, und ihre Peripherien gehen durch den Berührungspunkt.

Ist n negativ, so ist

$$e_n+R_n=r$$

die Mittelpunkte liegen also in dem ersten Kreise und ihre Peripherien gehen ebenfalls durch den Berührungspunkt. Für

$$n=\pm\infty \quad \text{ist} \quad e=r \quad \text{und} \quad R=0.$$

Alle diese Kreise sind also eingeschlossen von den beiden gegebenen; wenn wir mithin die beiden gegebenen Kreise als Grenze des äusseren Raumes auffassen, so ist u im äusseren Raume nur auf der Grenze gleich α.

In der Unendlichkeit wird u unendlich wie der Logarithmus der Entfernung, die übrigen Unstetigkeitspunkte liegen im Innern der Kreise, wenn man den Berührungspunkt, wie es in diesem Falle auch sein muss, zu den inneren Punkten rechnet. Uebrigens kann u in dem Berührungspunkt keinen anderen Wert besitzen als α, dies erkennt man leicht, wenn u durch x und y ausgedrückt wird.

Es ist

$$u - \alpha = k.\log \frac{\cos(\tau(\xi) + \tau(\eta)) - \cos(\tau(\xi) - \tau(\eta))}{\cos\left(\tau(\xi) + \tau(\eta) + \frac{2\varrho\pi}{r+\varrho}\right) - \cos(\tau(\xi) - \tau(\eta))}$$

also

$$u - \alpha = k \log \frac{\cos \mu \frac{x-r}{v} - \frac{1}{2}(e^{\frac{\mu y}{v}} + e^{-\frac{\mu y}{v}})}{\cos \mu \left(\frac{x-r}{v} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2}(e^{\frac{\mu y}{v}} + e^{-\frac{\mu y}{v}})}$$

wo

$$\mu = \frac{2r\varrho\pi}{r+\varrho}; \quad v = (x-r)^2 + y^2$$

Diese Function ist, wie man leicht erkennt, vollständig eindeutig bestimmt bis auf den Berührungspunkt, hier kann u jeden beliebigen Wert annehmen und dieser Wert wird abhangen von dem Wege auf dem man zu dem Berührungspunkte gelangt. Da man aber von einem hinreichend nahen Punkte des äusseren Raumes zu dem Berührungspunkte nur auf der geraden Linie $x = r$ gelangen kann, so wird in ihm die Exponentialgrösse unendlich gross, das Argument des Logarithmus also gleich 1 und mithin $u = \alpha$.

2) Die beiden Kreise liegen von einander getrennt und es sei $a > r + \varrho$.

Die beiden Wurzeln m_1 und m_2 sind reell, mithin ist zu setzen, da für $\xi = \infty$, $\log \tau(\xi) = 0$ werden soll:

$$\tau(\xi) = \frac{a\xi - (r^2 - m_1)}{a\xi - (r^2 - m_2)} = 1 + \frac{m_1 - m_2}{a\xi - (r^2 - m_2)}$$

es wird

$$\tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right) = \frac{ar^2 - (r^2 - m_1)\xi}{ar^2 - (r^2 - m_2)\xi} = \frac{r^2 - m_1}{r^2 - m_2} \cdot \frac{1}{\tau(\xi)}$$

demnach:

$$u - \alpha = k \log \frac{\sin(\nu \log \tau(\xi)) \sin(\nu \log \tau(\eta))}{\sin(\nu \log (h\tau(\xi))) \sin(\nu \log (h\tau(\eta)))}$$

wo

$$\nu = \pi : \log \frac{m_1}{m_2}; \quad h = \frac{r^2 - m_2}{r^2 - m_1}$$

Zunächst erkennt man, dass u in der Unendlichkeit unendlich wird wie der Logarithmus der Entfernung, es wird gleich α auf den Curven:

$$\frac{a\xi-(r^2-m_1)}{a\xi-(r^2-m_2)}\cdot\frac{a\eta-(r^2-m_1)}{a\eta-(r^2-m_2)}=\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^n,$$

es sei

$$\frac{m_1}{m_2}=k$$

so stellt diese Gleichung die unendlich vielen Kreise dar:

$$(x-e_n)^2+y^2=R_n^2$$

wo

$$e_n=\frac{(1-k^n)ar^2}{(r^2-m_2)-k^n.(r^2-m_1)}$$

und

$$R_n^2=e_n^2-\frac{r^2+\varrho^2-a^2}{a}e_n+r^2.$$

Es ist also

$$e_0=0 \quad \text{und} \quad R_0=r,$$

ferner

$$e_1=a \quad \text{und} \quad R_1=\varrho.$$

Dieses sind die beiden gegebenen Kreise, diese schliessen ebenso wie im vorigen Falle sämtliche übrigen ein.

Diese soeben aufgestellte Function u hat denselben constanten Wert auf der Peripherie beider Kreise, das ist offenbar nicht der allgemeinste Fall, es kann auch u auf den Peripherien einen verschiedenen Wert besitzen. Um eine solche Function zu erhalten, ist zu u noch der Ausdruck $A\log\tau(\xi).\tau(\eta)$ zu addiren oder

$$A.\log\frac{(ax-(r^2-m_1))^2+a^2y^2}{(ax-(r^2-m_2))^2+a^2y^2}$$

Dieser Ausdruck ist unstetig nur in den Punkten

$$x=\frac{r^2-m_1}{a},\quad y=0 \quad \text{und} \quad x=\frac{r^2-m_2}{a},\quad y=0,$$

also in Punkten, die innerhalb der beiden Kreise liegen. Ferner wird derselbe auf der Peripherie des ersten Kreises gleich $A.\log\frac{r^2-m_1}{r^2-m_2}$ und auf der des zweiten, also wenn

$$x^2+y^2=\varrho^2-a^2+2ax$$

gesetzt wird, gleich $A.\log\frac{a^2-(r^2-m_1)}{a^2-(r^2-m_2)}$, auf beiden also constant.

In der Unendlichkeit wird er null.

Um nun u im allgemeinsten Falle aufzustellen, setze ich:

$$\frac{(ax-(r^2-m_1)^2+a^2y^2}{(ax-(r^2-m_2))^2+a^2y^2}=\tau$$

und

$$\frac{2(m_2-m_1)y(a(x^2+y^2)-2(r^2-(m_1+m_2))x+ar^2)}{(a(x^2+y^2)-(2r^2-(m_1+m_2))x^2+ar^2)^2-(m_2-m_1)^2y^2}=\omega,$$

so ist

$$u-\alpha=A\log\tau+k\log\frac{\cos(\nu\log\tau)-\frac{1}{2}(e^{\nu\omega_1}+e^{-\nu\omega_1})}{\cos(\nu\log h^2\tau)-\frac{1}{2}(e^{\nu\omega_1}+e^{-\nu\omega_1})}$$

wo

$$\nu=\pi:\log\frac{m_1}{m_2};\quad h=\frac{r^2-m_2}{r^2-m_1};\quad \omega_1=\operatorname{arctg}\omega$$

Die 3 noch willkürlichen Constanten, die in dieser Formel auftreten, werden bestimmt durch die Werte die u auf den beiden Kreisen und in der Unendlichkeit annehmen soll. Ist die Gesamtmasse der Elektricität gleich null, so ist auch $k=0$, also

$$u-\alpha=A\log\tau.$$

Der Ausdruck für u enthält noch zwei vieldeutige Functionen den Logarithmus und den Arcus tangens. Der Logarithmus muss, da u reell ist, ebenfalls reell sein, also ist er eindeutig bestimmt. Anders der Arcus tangens. Zunächst ist klar, dass man an Stelle von $\operatorname{arctg}\omega$ setzen kann

$$2\operatorname{arctg}.\frac{(m_2-m_1)y}{a\left\{\left(x-\frac{r^2+a^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+y^2-\frac{(r^2+a^2-\varrho^2)^2-4a^2r^2}{4a^2}\right\}}$$
$$=2\varphi+2n\pi,$$

wenn φ der Winkel ist, den die beiden Verbindungslinien der Punkte

$$x=\frac{r^2-m_1}{a},\quad y=0\quad\text{und}\quad x=\frac{r^2-m_2}{a},\quad y=0$$

mit dem Punkte xy bilden. Da u in der Unendlichkeit logarithmisch unendlich werden soll, so muss $\operatorname{arctg}\omega=0$ für $\xi=\infty$ sein, hieraus folgt, dass $n=0$ sein muss, mithin ist auch der Arcus tangens eindeutig bestimmt.

Streng genommen, müsste φ in der für y positiven Halbaxe das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, wie in der für y negativen, wir können aber, da der Wert von u hierdurch nicht geändert wird, festsetzen, dass φ stets das positive Vorzeichen besitze.

Ebenso wie ω hat auch τ eine leicht zu übersehende geometrische Bedeutung. Es seien R_1 und R_2 die Entfernungen des Punktes xy von den beiden Punkten

$$x = \frac{r^2 - m_1}{a}, \quad y = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{r^2 - m_2}{a}, \quad y = 0,$$

so ist

$$\tau = \frac{R_1^2}{R_2^2},$$

also lässt sich u schliesslich schreiben:

$$u - \alpha = 2A \log \frac{R_1}{R_2} + k \log \frac{\cos\left(2\nu \log \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{1}{2}(e^{2\nu\varphi} + e^{-2\nu\varphi})}{\cos\left(2\nu \log \frac{R_1}{hR_2}\right) - \frac{1}{2}(e^{2\nu\varphi} + e^{-2\nu\varphi})}$$

Die Unstetigkeitspunkte der Function u liegen sämtlich auf der X Achse und innerhalb der beiden Kreise mit Ausnahme des Unendlichkeitspunktes. Wird $a = r + \varrho$, also $m_1 = m_2$, so geht die Function, wie man sich leicht überzeugen kann, über in die für zwei sich berührende Kreise entwickelte Potentialfunction.

Liegen die beiden Kreise in einander, so lässt sich die Potentialfunction leicht aus der obigen ableiten.

3) Die beiden Kreise mögen sich schneiden, also

$$r + \varrho > a > r - \varrho.$$

Es ist mithin $4r^2\varrho^2 - (r^2 + \varrho^2 - a^2)^2$ eine positive Grösse, sie sei gleich λ^2, ferner sei

$$m = \frac{\lambda}{r^2 + \varrho^2 - a^2},$$

so setze ich, damit für $\xi = \infty$ $\tau(\xi) = 0$ wird:

$$\tau(\xi) = \frac{\lambda}{2a\xi - (a^2 + r^2 - \varrho^2)},$$

also

$$u - \alpha = k \log \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\operatorname{arc\,tg} m} \operatorname{arc\,tg} \tau(\xi)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\operatorname{arc\,tg} m} \operatorname{arc\,tg} \tau(\eta)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\operatorname{arc\,tg} m} \operatorname{arc\,tg} \tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\operatorname{arc\,tg} m} \operatorname{arc\,tg} \tau\left(\frac{r^2}{\eta}\right)\right)}$$

Nun ist

$$\operatorname{arctg} \tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right) = \operatorname{arctg} \frac{\lambda\xi}{2ar^2 - (a^2 + r^2 - \varrho^2)\xi}$$

$$= -\left\{\operatorname{arctg} \tau(\xi) + \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2}\right\}.$$

und

$\operatorname{arctg} \tau(\xi) + \operatorname{arctg} \tau(\eta)$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\lambda(2a(\xi + \eta) - 2(a^2 + r^2 - \varrho^2))}{4a^2\left(\xi - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right)\left(\eta - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right) - \lambda^2}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\lambda\left(x - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right)}{a\left[\left(x - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right)^2 + y^2 - \frac{\lambda^2}{4a^2}\right]}$$

Ferner ist

$\operatorname{arctg} \tau(\xi) - \operatorname{arctg} \tau(\eta)$

$$= -\operatorname{arctg} \frac{4\lambda ay.i}{4a^2\left\{\left(x - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right)^2 + y^2 + \frac{\lambda^2}{4a^2}\right\}}$$

$$= \tfrac{1}{2} i.\log \frac{\left(x - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{\lambda}{2a}\right)^2}{\left(x - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

Es sei nun

$$\tau = \frac{\lambda}{a} \frac{x - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}}{\left(x - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right)^2 + y^2 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}$$

und

$$\omega = \frac{\left(x - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{\lambda}{2a}\right)^2}{\left(x - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

so wird

$$u - \alpha = k \log \frac{\cos(2\nu_1 \operatorname{arctg} \tau) - \frac{1}{2}(e^{\nu_1 \log\omega} + e^{-\nu_1 \log\omega})}{\cos(2\nu_1(\operatorname{arctg} \tau + 2\Delta)) - \frac{1}{2}(e^{\nu_1 \log\omega} + e^{-\nu_1 \log\omega})}$$

wo

$$\nu_1 = \pi : 2 \operatorname{arctg} m; \quad \Delta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2}$$

In der Unendlichkeit wird $\tau = 0$, mithin muss, da der Cosinus gleich 1 werden soll, $\operatorname{arctg} = 0$ für $\tau = 0$ sein. Der Arctg wird sich also, da τ erst unendlich wird auf der Peripherie des Kreises

$\left(x - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{4a^2}$, eines Kreises, der sich nicht im äusseren Raume befindet, stets in dem Intervall $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ befinden. Hieraus ergeben sich auch sofort die Werte, die $\operatorname{arc\,tg} m$ und $\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2}$ anzunehmen haben.

In der Tat, u soll $= \alpha$ sein auf den beiden gegebenen Kreisen; setzt man $x^2 + y^2 = r^2$, so wird $\tau = -\frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2}$; die beiden Cosinuse müssen aber einander gleich werden, dies kann nur dann geschehen, wenn auch $\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2}$ sich in dem Intervalle $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ befindet.

Setzt man

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 + 2ax - a^2,$$

so wird

$$\tau = \frac{\lambda}{a^2 + \varrho^2 - r^2}.$$

Nun ist aber

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + \varrho^2 - r^2} = -\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{r^2 + \varrho^2 - a^2}$$
$$= -\operatorname{arc\,tg} m$$

demnach muss damit in diesem Falle die beiden Cosinuse einander gleich werden $\operatorname{arc\,tg} m$ durch die obige Gleichung bestimmt sein, also ist auch $\operatorname{arc\,tg} m$ eindeutig bestimmt.

Ich gehe nun über zu der geometrischen Bedeutung der in $u - \alpha$ vorkommenden Functionen.

Es ist $\frac{\lambda}{a}$ die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise, die Entfernung des Schnittpunktes dieser Sehne mit der Centralen vom Nullpunkte ist $\frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}$, und seine Entfernung vom Mittelpunkte des zweiten Kreises $\frac{a^2 + \varrho^2 - r^2}{2a}$.

Verbindet man den Punkt xy mit den beiden Schnittpunkten der beiden Kreise, so ist der Winkel, den diese beiden Verbindungslinien miteinander bilden $\varphi = \operatorname{arctg} \tau$, wo φ positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem τ positiv oder negativ ist.

Ferner sei

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2} \quad \text{und} \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{a^2 + \varrho^2 - r^2},$$

so sind α und β die Winkel den die Centrale mit den beiden Linien bildet, die einen der Schnittpunkte mit den beiden Mittelpunkten verbindet; sie müssen immer spitze Winkel sein und haben das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem das Argument ihres Arcus tangens positiv oder negativ ist.

Die Unstetigkeitspunkte, die die Function besitzt, können, wie man leicht besonders unter Zuhülfenahme der geometrischen Anschauung findet, niemals ausserhalb der beiden Kreise liegen, folglich ist auch die Function u selbst in dem allein zu betrachtenden Raume eindeutig und stetig. Natürlich ist hierbei der Unendlichkeitspunkt ausgenommen.

Während die Niveaucurven, also die Curven $u =$ Const bei den bisher betrachteten Functionen stets transcendente Curven sind, können bei dieser Function auch algebraische Curven auftreten, die einzige Bedingung dafür ist die, dass das Verhältniss $\pi : \operatorname{arctg} m$ eine rationale Zahl ist. Der erste hierher gehörende Fall ist der, dass sich die beiden Kreise rechtwinklig schneiden, alsdann ist nämlich $\operatorname{arctg} m = \frac{\pi}{2}$:

Zur weiteren Berechnung wende ich die Formel an bei der x und y noch nicht eingeführt ist.

Es ist in diesem Falle

$$\tau(\xi) = \frac{r\varrho}{a\xi - r^2}$$

ferner ist

$$\sin(2 \operatorname{arctg} \tau(\xi)) = \frac{2\tau(\xi)}{1 + \tau^2(\xi)} = \frac{2r\varrho(a\xi - r^2)}{r^2\varrho^2 + a^2\varrho^2 - 2ar^2\xi + r^4}$$

$$= \frac{2r\varrho(a\xi - r^2)}{\{(a\xi - r^2)\xi + r^2(a - \xi)\}a}$$

da

$$a^2 = r^2 + \varrho^2 \quad \text{ist.}$$

Demnach wird

$$u - \alpha = k \log \frac{(a\xi - r^2)(a\eta - r^2)}{\xi\eta(\xi - a)(\eta - a)}$$

$$= k \log \frac{a^2\left(\left(x - \frac{r^2}{a}\right)^2 + y^2\right)}{(x^2 + y^2)((x - a)^2 + y^2)}$$

Ist $u = \alpha$, so wird die Gleichung der Niveaucurve:

$$a^2(x^2+y^2) - 2ar^2x + r^4 = (x^2+y^2)^2 - 2a(x^2+y^2)x + a^2(x^2+y^2)$$

also

$$((x-a)^2+y^2-(a^2-r^2))(x^2+y^2-r^2) = 0.$$

Diese Gleichung stellt die beiden Kreise dar.

Man hätte übrigens auf diese Function direct auf einem äusserst leichten Wege gelangen können, wenn man sich die Aufgabe gestellt hätte, diejenige Potentialfunction zu bestimmen, deren Niveaucurven Curven vierten Grades sind, die sich jedoch für einen bestimmten Wert von u in zwei Kreise zerlegen.

§. 2.

Die stationäre elektrische Strömung in leitenden Platten.

Es seien $u = \alpha$ die Curven gleichen Potentials und $v = \beta$ die Strömungslinien, so ist das Problem analytisch ausgedrückt folgendes:

Es sind diese Functionen derartig zu bestimmen, dass sie

1) der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügen, dass

2) die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

stattfindet, dass

3) v constant ist auf der Grenze der Platte, und dass

4) u im Innern der Platte mit Ausnahme der Ein- und Ausströmungspunkte eindeutig und stetig ist, in diesen Punkten jedoch unendlich wird wie der Logarithmus der Entfernung.

Es sei

$$\xi = \varphi(\eta) \quad \text{oder} \quad \eta = \varphi(\xi)$$

die Gleichung der Begrenzung, so setze ich:

$$u - \alpha = \chi(\xi) + \chi(\varphi(\xi)) + \chi(\eta) + \chi(\varphi(\eta))$$

dann

$$\frac{v-\beta}{i} = \chi(\xi) + \chi(\varphi(\xi)) - \chi(\eta) - \chi(\varphi(\eta)),$$

so sind die Bedingungen 1), 2); 3) erfüllt.

Um der Bedingung 4) Rechnung zu tragen, sind zunächst die Functionen $\varphi(\xi)$ und $\varphi(\eta)$ zu untersuchen. Diese Functionen sind Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades die auf der Grenze der Platte übergehen müssen in η oder ξ. D. h. wenn

$$\varphi(\xi) = A + iB$$

ist, so muss auf der Grenze der Platte $A = x$ und $B = -y$ werden. Im allgemeinen wird aber dieses nur stattfinden, wenn A und B im Innern der Platte gewisse Linien nicht überschreiten. Bleiben A und B stetig, so werden sie, wenn diese Linien von ihnen überschritten sind, im allgemeinen mit einem andern Werte als dem verlangten an der Grenze ankommen, oder aber sie müssten auf diesen Linien einen Sprung machen, dessen Grösse abhängig ist von dem Orte.

Bei der Ellipse z. B. ist die Brennlinie, oder die Verbindunglinie der beiden Brennpunkte eine solche Unstetigkeitslinie.

Ist dies der Fall, so kann man die Function $\varphi(\xi)$ und also auch die obigen Formeln direct nicht anwenden. Lässt sich jedoch die Gleichnug der Begrenzung schreiben in der Form:

$$\omega(\xi) \,.\, \omega(\eta) + a(\omega(\xi) + \omega(\eta)) + b = 0,$$

wo ω eine rationale Function bedeutet, so kann man setzen:

$$u - \alpha = \Sigma_\lambda m_\lambda \log(\omega(\xi) - \alpha_\lambda)(\omega(\eta) - \alpha_\lambda) \times \left(\frac{b + a\,\omega(\xi)}{a + \omega(\xi)} + \alpha_\lambda\right)\left(\frac{b + a\omega(\eta)}{a + \omega(\eta)} + \alpha_\lambda\right)$$

und:

$$\frac{v-\beta}{i} = \Sigma_\lambda m_\lambda \log \frac{(\omega(\xi) - \alpha_\lambda)\left(\frac{b + a\omega(\xi)}{a + \omega(\xi)} + \alpha_\lambda\right)}{(\omega(\eta) - \alpha_\lambda)\left(\frac{b + a\omega(\eta)}{a + \omega(\eta)} + \alpha_\lambda\right)}$$

Man erkennt leicht, dass diese Functionen allen Bedingungen genügen, auch die Lage der Einströmungspunkte ist leicht zu finden. Zu bemerken ist noch, dass, wenn die Functionen in dieser Form aufgestellt werden, die Einströmungspunkte sich stets auf der X Achse befinden müssen. Sind nur zwei Unstetigkeitspunkte vorhanden, so kann man diets stes erreichen dadurch, dass man die X Achse durch sie hindurchlegt, sind jedoch mehrere vorhanden, so muss man das Problem teilen, immer zwei Einströmungspunkte nehmen und die dazu

gehörigen Functionen aufsuchen, die Summe der so erhaltenen Functionen giebt dann schliesslich die verlangte.

Lässt sich die Gleichung der Begrenzung jedoch nicht in der obigen Form darstellen, so kann man die Functionen $\varphi(\xi)$ auch dann noch benutzen, wenn die endlichen Unstetigkeiten constant sind, d. h. wenn die Differenz der beiden Werte, die A oder B auf beiden Seiten der Unstetigkeitslinie in gegenüberliegenden Punkten besitzt, stets unabhängig vom Orte ist. Die Einführung einer periodischen Function von $\varphi(\xi)$, deren Periode gleich dieser Differenz ist, genügt, um diese Unstetigkeiten zu vernichten.

Sind diese Unstetigkeiten jedoch abhängig vom Orte, so müsste man, um sie fortzuschaffen, eine Function zu bestimmen suchen, die sich nicht ändert, wenn man zu ihrem Argument die Differenz der beiden Unstetigkeitswerte addirt.

Dieses Problem greifen wir nicht direct an, sondern wir versuchen, die Unstetigkeit constant zu machen. Hierzu dient die im ersten Paragraphen entwickelte Methode. Die mit Hülfe dieser Methode gefundenen Functionen sind durch Integration bestimmt, und in der Gleichung

$$\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) = \alpha,$$

die die Gleichung der Begrenzung darstellen soll, tritt α als Integrationsconstante auf, die für einen bestimmten Wert die Gleichung der Begrenzung giebt.

Sind nun χ_1 und χ_2 eindeutige Functionen in der Art, dass sie keine Wurzelgrössen enthalten, so wird auch α eindeutig sein. Ist dies jedoch nicht der Fall, so wird α im allgemeinen ebensoviele verschiedene Werte annehmen, als diese Functionen vermöge der in ihnen auftretenden Wurzelgrössen besitzen, so dass zu jedem Wurzelwerte auch ein bestimmter von α gehört. Die Functionen χ jedoch werden im allgemeinen beim Durchlaufen der Platte in einander übergehen, es wird alsdann auch aus dem einen α ein anderes geworden sein müssen, dies ist jedoch, da α constant ist, unmöglich, wenn es nicht selbst den Sprung $\alpha_\lambda - \alpha_1$ gemacht hat. Diese Unstetigkeiten sind aber constant, und lassen sich stets fortschaffen, dadurch, dass man an Stelle von χ eine periodische Function von χ einführt mit den Perioden $\alpha_\lambda - \alpha_1$ $(\lambda = 1 \ldots n)$, wenn $\alpha_1 \ldots$ die verschiedenen Werte sind, die α annehmen kann. Es sei ω eine solche Function, so wird man zu setzen haben:

$$u - \alpha = \Sigma_\lambda m_\lambda \log\{\omega_\lambda(\chi(\xi)) \cdot \omega_\lambda(\chi(\eta)) \cdot \omega_\lambda(\alpha - \chi(\xi)) \cdot \omega_\lambda(\alpha - \chi(\eta))\}$$

und

$$\frac{v-\beta}{i} = \Sigma \lambda m \lambda \log \frac{\omega\lambda(\chi(\xi)) \,.\, \omega\lambda(\alpha - \chi(\xi))}{\omega\lambda(\chi(\eta)) \,.\, \omega\lambda(\alpha - \chi(\eta))}.$$

Berücksichtigt man jedoch, dass die Functionen χ im allgemeinen Abelsche Integrale sein werden, also auch die Vieldeutigkeiten derselben besitzen, die, da ω im Innern der Platte eindeutig sein muss, auch fortzuschaffen sind, so muss man dem ω auch noch diejenigen Perioden erteilen, die hierzu nötig sind.

Die $\omega\lambda$ in den obigen Formeln unterscheiden sich von einander nur durch ihre Nullpunkte, es soll $\omega\lambda$ in dem Punkte $\beta\lambda$ gleich null werden.

Das einfachste Beispiel, welches dazu dienen kann, das oben Gesagte zu erläutern, ist die Strömung durch eine elliptische Platte.

Die Gleichung der Ellipse sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oder

$$(b^2 - a^2)(\xi^2 + \eta^2) + 2(b^2 + a^2)\xi \,.\, \eta - 4a^2 b^2 = 0,$$

also

$$\eta = \varphi(\xi) = \frac{1}{a^2 b^2} \cdot \{(a^2 + b^2)\xi \pm 2ab\sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}\}$$

hieraus folgt:

$$\{(b^2 - a^2)\xi + (b^2 + a^2)\eta\} d\xi + \{(b^2 - a^2)\eta + (b^2 + a^2)\xi\} d\eta = 0,$$

nun aber ist

$$(b^2 - a^2)\xi + (b^2 + a^2)\eta = \pm 2ab\sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}$$

eingesetzt, ergiebt:

$$\sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)}\, d\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}\, d\eta = 0,$$

demnach ist:

$$\chi(\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}} = \log(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}).$$

Die Gleichung der Begrenzung ist also entweder:

$$(\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)})(\eta + \sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)}) = \alpha_1$$

oder

$$(\xi - \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)})(\eta - \sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)}) = \alpha_2.$$

Es ist α_1 und α_2 zu bestimmen.

Beide Gleichungen mit einander multiplicirt, giebt:

$$(a^2 - b^2)^2 = \alpha_1 . \alpha_2,$$

beide Gleichungen zu einander addirt:

$$\xi . \eta + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)} . \sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)} = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

von einander subtrahirt:

$$\xi\sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)} + \eta\sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)} = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2),$$

diese quadrirt:

$$2\xi^2 . \eta^2 - (a^2 - b^2)(\xi^2 + \eta^2) + 2\xi\eta\sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)} . \sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)} = \tfrac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2,$$

die Wurzel eliminirt:

$$(b^2 - a^2)(\xi^2 + \eta^2) + (\alpha_1 + \alpha_2)\xi . \eta = \tfrac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2$$

Aus dieser Gleichung folgt nun:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2(a^2 + b^2)$$

und

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm 4ab,$$

also ist entweder:

$$\alpha_1 = (a + b)^2$$

oder gleich $(a - b)^2$

und

$$\alpha_2 = (a - b)^2$$

oder gleich $(a + b)^2$.

Im Innern der Platte kann jedoch auch ξ in zwei verschiedenen Punkten den entgegengesetzten Wert erhalten und man kann von dem einen Punkte zu dem anderen immer auf einem Wege gelangen, auf dem die Quadratwurzel nicht null wird, auf dem sie also ihr Vorzeichen behält, mithin geht alsdann die erste Form in die zweite über, und man muss von $\log(\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)})$ eine Function bilden, die die Periode $2\log\frac{a+b}{a-b}$ besitzt, ferner muss diese Function aber auch noch, da der Logarithmus unendlich vieldeutig ist, die Periode $2\pi i$ erhalten, sie wird also eine elliptische Function sein mit den Perioden $2\log\frac{a+b}{a-b}$ und $2\pi i$.

Bei der Aufstellung derartiger Functionen muss man aber stets die einfachsten nehmen, ich setze demnach, wenn

$$z = \log(\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)})$$

ist,

$$\tau = \sin \mathrm{am}(mz, k).$$

Die beiden constanten Grössen m und k sind aus den beiden Perioden zu bestimmen.

Der Modul k ist eindeutig bestimmt durch die Jacobi'sche Grösse

$$q' = e^{-\pi \frac{K}{K'}}$$

da aber

$$4K = 2m . \log \frac{a+b}{a-b}$$

und

$$2K' = 2m\pi$$

ist, so ist

$$q' = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

und

$$m = \frac{K'}{\pi}.$$

Auch K und K' sind durch q' eindeutig bestimmt.

Es werde nun v unstetig in den Punkten $\xi = \xi_\lambda$, $\eta = \eta_\lambda$ und es sei

$$z(\xi) = \log(\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}) - \log(\xi_\lambda + \sqrt{\xi_\lambda^2 - (a^2 - b^2)}),$$

so wird die Gleichung der Begrenzung

$z_\lambda(\xi) + z_\lambda(\eta)$

$$= \log \alpha + \log . (\xi_\lambda + \sqrt{\xi_\lambda^2 - (a^2 - b^2)})(\eta_\lambda + \sqrt{\eta_\lambda^2 - (a^2 - b^2)}) = \beta_\lambda$$

demnach setze ich:

$$u - \alpha = \Sigma_\lambda m_\lambda \log\{\sin \mathrm{am} \frac{K'}{\pi} z_\lambda(\xi) . \sin \mathrm{am} \frac{K'}{\pi} z_\lambda(\eta) \times$$

$$\sin \mathrm{am} \frac{K'}{\pi} (\beta_\lambda - z_\lambda(\xi)) \sin \mathrm{am} \frac{K'}{\pi} (\beta_\lambda - z_\lambda(\eta))\}$$

und also:

$$\frac{v - \beta}{i} = \Sigma_\lambda m_\lambda \log \frac{\sin \mathrm{am} \frac{K'}{\pi} z_\lambda(\xi) . \sin \mathrm{am} \frac{K'}{\pi} (\beta_\lambda - z_\lambda(\xi))}{\sin \mathrm{am} \frac{K'}{\pi} z_\lambda(\eta) . \sin \mathrm{am} \frac{K'}{\pi} (\beta_\lambda - z_\lambda(\eta))}$$

Mit Hülfe der soeben entwickelten Methode ist aber das Problem der elektrischen Strömung vollständig gelöst, wenn die Begrenzung

der Platte durch eine einzige algebraische Gleichung dargestellt werden kann.

Besteht die Begrenzung der Platte aus mehreren algebraischen Curven, so hängt das Problem ab von der Bestimmung einer im Innern der Platte stetigen und eindeutigen Function, die sich nicht ändert, wenn man an Stelle des Arguments eine durch die specielleren Bedingungen des Problems bestimmte Function setzt.

III.

Die Umkehrung des Grundgedankens von Hindenburg's combinatorischer Analysis.

(Fortsetzung).

Von

Friedrich Roth.

---

b) Die weniger gewöhnlichen Combinationen und Variationen.

(Comb. und Var. mit eingeschränkter Wiederholung und Var. zu bestimmten Summen.)

In dem ersten Abschnitte dieser Abhandlung, der auf S. 427—434 abgedruckt worden ist, hatten wir diejenigen Teile der Combinationslehre behandelt, auf die man sich in der Regel bei dem Schulunterricht beschränkt. Es bliebe noch übrig, den Grundgedanken unserer Arbeit, der sich auf dem bisher betrachteten Gebiete so fruchtbar gezeigt hat, auch auf diejenigen Zusammenstellungen gegebener Elemente anzuwenden, welche in unserer Zeit, wo die Zwecke der Schule mehr in den Vordergrund getreten sind, in den meisten Lehrbüchern — (Beckers Arithmetik bildet eine mir bekannte Ausnahme) — keine Beachtung gefunden haben, während sie im vorigen Jahrhundert wegen ihrer Anwendbarkeit auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung von den bedeutendsten Mathematikern der wiederholten Erörterung und Untersuchung für wert gehalten wurden. Dass der angebene Grund wirklich der entscheindende war, erkennt man sofort, wenn man das allgemeine für die Combinatorik als grundlegend geltende Werk, die ars conjectandi, etwas genauer ansieht. Nicht allein, dass in der Vorrede Nikolaus Bernoulli von sich sagt, dass

er zur Herausgabe des Werkes seines Oheims aufgefordert worden sei, weil man von ihm eine Schrift kannte, in welcher er die von dem letzterm ausgebildete Wissenschaft auf Rechtsfragen angewandt hatte, es ist auch der erste Abschnitt des Buches der Berechnung der Wahrscheinlichkeit beim Würfelspiel gewidmet, während der zweite Teil, der die eigentliche Combinatorik enthält, nur als blosse Zutat erscheint, gleichsam als unvermeidliche Beigabe, welche die Hülfsmittel bringt, die man in dem für praktische Bedürfnisse entworfenen ersten Abschnitte gebrauchen soll. Ausserdem wissen wir von Pascal, dass er durch Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Betrachtung der Combinationen geführt worden ist. Nun wird niemand die Wichtigkeit bestreiten, welche die Variationen zu bestimmten Summen, sowie die Combinationen und Variationen mit begrenzter Wiederholung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung besitzen, und es erklärt sich daher, warum die Mathematiker früherer Zeit ihre geistige Kraft mit Vorliebe an diesem Gegenstande übten. Dagegen ist wol der Mangel an Durchbildung und wissenschaftlicher Strenge der einschlägigen Beweise und Formeln daran schuld, dass gerade dieses Gebiet bei dem Unterrichte wenig Beachtung findet. Um so mehr scheint es geboten, gerade hier den Versuch zu wagen, durch neue Auffassung bessere Ableitungen zu schaffen und allgemeine Gesichtspunkte für solche Aufgaben aufzustellen, die bis jetzt nur durch rohes Probiren und durch Ausführung in bestimmten Zahlen gelöst worden sind.

Betrachten wir zunächst die Combinationen mit eingeschränkten Wiederholungen. Hier giebt es schon eine allgemeine Formel, aber nicht für eine bestimmte Classe, sondern für die Anzahl der Complexionen durch alle Classen zusammengenommen, von der ersten aufsteigend bis zu derjenigen, welche durch die Summe allen Wiederholungsexponenten bezeichnet wird. Weingärtner*) leitet merkwürdiger Weise diese Formel gar nicht ab, sondern teilt sie ohne Beweis mit. Er entwickelt nur das Gesetz für die Anzahl der einzelnen Ordnungen, d. h. derjenigen Gruppen der Formen, die dann, wenn die Elemente alphabetisch oder umgekehrt sich folgen, mit je einem gleichen Buchstaben beginnen. Im Uebrigen verweist er auf Jac. Bernoulli. Dieser selbst aber rechnet in der ars conjectandi eigentlich nur ein Beispiel aus, indem er vier Elemente a, b, c, d annimmt und als Dimensionen — wie er treffend die höchtmöglichste Anzahl

*) Johann Christoph Weingärtner, Conrector in Erfurt, Lehrbuch der combinatorischen Analysis nach der Theorie des Professor Hindenburg. Leipzig, bei Gerhard Fleischer dem Jüngeren, 1800.

der Wiederholungen nennt — nur bestimmte und zwar kleine Zahlen wählt. Daraus folgert er ohne weiteres die allgemeine Regel. Dagegen findet sich in dem Exemplar seiner Schrift, das ich aus der Göttinger Universitätsbibliothek erhalten habe, eine lateinische Randbemerkung, in der, allerdings auch nur für vier Elemente, ein Beweis aufgestellt wird, der es mir wert zu sein scheint, dass er der Oeffentlichkeit übergeben werde. Nach einer andern Bemerkung von gleicher Tinte und gleicher Handschrift stammt er vom Jahre 1736, könnte also nicht von Kästner herrühren, da dieser erst zwanzig Jahre später nach Göttingen kam. Der Beweis lautet unter Beibehaltung der Interpunction und der mathematischen Schreibweise seines Urhebers:

Sint inveniendae coniunctiones litterar. $a^m b^r c^t d^q$. Patet solius a dari coniunctiones $m+1$ quarum prima est a^0 ultima a^m. Harum cuivis si accedat b, dantur novae coniunctiones $m+1$, et his novis si addatur aliud b, rursus novae $m+1$, et cum haec additio propter b^r. fieri possit r vicibus, patet accedere novas coniunctiones $r \times \overline{m+1}$. Quare numerus coniunctionum $a^m b^r$ est $m+1+r \times \overline{m+1} = \overline{m+1} \times \overline{r+1}$. His accedere possunt ob c^t coniunctiones $\overline{m+1} \times \overline{r+1} \times t$ in quibus est c. Quare fit numerus coniunctionum $a^m b^r c^t = \overline{m+1} \times \overline{r+1} + \overline{m+1} \times \overline{r+1} \times t = \overline{m+1} \times \overline{r+1} \times \overline{t+1}$ At sic progrediendo patet accedente d^q summam coniunct. esse $\overline{m+1} \times \overline{r+1} \times \overline{t+1} \times \overline{q+1}$.

Ein ganz allgemeiner und strenger Beweis ist meines Wissens noch nicht gefunden; und doch giebt es nichts Leichteres als das, wenn man nur die Hülfsmittel benutzt, die wir im ersten Teile dieser Abhandlung angegeben haben,

Es seien gegeben die n Elemente $a, b, c \ldots m$, die höchste Zahl der erlaubten Wiederholungen sei bzhw. $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$. Dann würde die Aufgabe nach Hindenburg's Ausdrucksweise heissen: Suche die Anzahl der Combinationen für den Zeiger $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots : m^\mu$. Nun haben wir, wenn wir die Nullionen mit rechnen und die einzelnen Complexionen durch ein Pluszeichen verbinden,

als Arten, die nur a enthalten:

$$1+a+a^2+a^3+a^4+ \ldots +a^{\alpha-1}+a^\alpha,$$

als Arten, die nur b enthalten:

$$1+b+b^2+b^3+b^4+ \ldots +b^{\beta-1}+b^\beta,$$

als Arten, die nur c enthalten:

$$1+c+c^2+c^3+c^4+\ldots+b^{\gamma-1}+c^\gamma$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

endlich als Arten, die nur m enthalten:

$$1+m+m^2+m^3+m^4+\ldots+m^{\mu-1}+m^\mu.$$

Mit Ausnahme der 1 soll jedes Glied aus einer dieser n wagrechten Reihen mit einem jeden beliebigen Gliede der anderen Reihen zusammengestellt werden, doch so, dass niemals mehr als ein Summand aus derselben Zeile vorkommt. Es giebt unter den durch solche Zusammenstellung entstehenden Producten auch solche, die weniger denn n Potenzen als Factoren haben. Diese multiplicire ich so oft mal mit 1, dass die Anzahl der Factoren überall n beträgt. Ordne ich dabei die Buchstaben nach dem ABC und füge die Einsern an der Stelle der fehlenden Elemente ein, schreibe also z. B. für ac^2m^4 das Product $a.1.c^2.1.1 \ldots 1.m^4$, so leuchtet jedem, der sich die Regeln der Multiplication vergegenwärtigt, sofort ein, dass die in der Aufgabe geforderten Combinationen weiter nichts sind als die Glieder desjenigen Polynoms, dass ich bekomme, wenn ich die oben stehenden n wagerechten Reihen mit einander multiplicire und dabei den Einzelmultiplicator immer hinter seinen Multiplicanden schreibe. Sollen jedoch die Nullionen nicht mit gezählt werden, so muss ich das 1^n wegnehmen, das durch Multiplication der n ersten unter einander stehenden Summanden entsteht. Wie früher verwandeln wir die Summe des polynomischen Hauptproductes in die Anzahl der Glieder, indem wir jede Potenz der Elemente gleich eins setzen. Dadurch aber wird die erste wagerechte Reihe zu $1+\alpha$, die zweite zu $1+\beta$ u. s. f., mithin die gesuchte Anzahl der Formen

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots(1+\mu^{-1})(1+\mu)-1,$$

wo μ^{-1} den im Alphabet vor μ vorhergehenden Buchstaben bezeichnet.

Ist bei den Combinationen, um die es sich hier handelt, und bei den entsprechenden Variationen die einzelne Classe vorgeschrieben, so hat man, so viel mir bekannt, bisjetzt zur Auffindung der Anzahl der Arten weder eine allgemeine Regel noch eine Formel. Sind die Wiederholungsgrenzen in bestimmten Zahlen gegeben, so lehrt uns Jac. Bernoulli Tabellen entwerfen, mit deren Hülfe man die gesuchte Grösse ableiten kann. Doch ist dieses Verfahren mühselig, weil man die niedrigeren und meistens auch die nächst höheren Classen mit berechnen muss. Betrachtet man dagegen die Elemente einer jeden Complexion als Factoren, so ist nach dem oben Gesagten folgendes unmittelbar klar.

Sollen die n Elemente a, b, c ... t in der angegebenen Weise zur $m$ter Classe zusammengestellt werden, so ist die Anzahl aller Arten der betreffenden Variationen ausgedrückt durch die Summe der Coefficienten der polynomischen Reihe, die durch Ausrechnung von

$$(a+b+c+\ldots+s+t)^m$$

entsteht, unter Weglassung aller derjenigen Glieder, welche eine solche Potenz der ursprünglichen Summanden a, b u. s. f. enthalten, deren Exponent die zugehörige Grenze der Wiederholungen überschreitet. Die Anzahl der übrig bleibenden Glieder giebt uns zugleich die Menge der entsprechenden Combinationen. Ist keine der Dimensionen, die für die Wiederholungen gestattet sind, kleiner als m, so bleibt die Potenz der $n$gliedrigen Summe $\overline{a+b+\ldots t}$ vollständig, und man erhält die bekannten Formeln für die gemeinen Variationen und Combinationen m. W. Man kann also die zuletzt gegebene Regel als den allgemeinen Satz ansehen, unter der die unbeschränkte Wiederholung als besonderer Fall gehört.

Diese Regel, welche die hier zu betrachtenden Zusammenstellungen auf den polynomischen Lehrsatz zurückführt, bietet zunächst eine Erleichterung des Verständnisses bei der Berechnung der Anzahl der Combinationen, wenn nur für ein Element die Wiederholung beschränkt ist.

Sind z. B. unter den n Elementen für t allein w, für alle anderen dagegen m Wiederholungen zulässig, wobei w kleiner als m ist, so fallen in der Reihe für $(a+b+c+\ldots+t)^m$ alle diejenigen Glieder weg, welche Potenzen von t^{w+1} aufsteigend bis t^m enthalten. Von diesen Gliedern sind aber so viele vorhanden, als sich die übrigen $\overline{n-1}$ Buchstaben zu denjenigen Classen mit Wiederholungen combiniren lassen, deren Dimensionen mit den jedesmaligen zwischen $w+1$ und m liegenden Exponenten von t zusammen m ausmachen, ihre Anzahl ist also unter Benutzung von 4): *)

---

*) Anmerkung. Leider ist in dem ersten Teile meiner Abhandlung auf der linken Seite dieser Gleichung ein Druckfehler übersehen worden. Es steht dort ${}^{w}\underset{m}{C}(r)$, wofür selbstverständlich ${}^{w}\underset{m}{C}(n)$ zu setzen ist. Will man übrigens Gleichung 4) mit dem von Bernh. Euler gefundenen Satze, für die ich an jener Stelle auf Baltzer's Elemente verwiesen habe, in Vergleichung bringen, so setze man $n+m-r-1=p$, dann lautet sie:

$$\underset{0}{{}^{w}C}(n-1)+\underset{1}{{}^{w}C}(n-1)+\underset{2}{{}^{w}C}(n-1)+\ldots+\underset{m-w-2}{{}^{w}C}(n-1))+\underset{m-w-1}{{}^{w}C}(n-1)$$
$$=\underset{m-w-1}{{}^{w}C}(n).$$

Für das in der Aufgabe Gesuchte ergiebt sich mithin

$$7)\qquad \underset{m}{{}^{w}C}(n)-\underset{m-w-1}{{}^{w}C}(n)=\binom{m+n-1}{m}-\binom{m+n-w-2}{m-w-1}$$

Der Vorteil, den diese Formel gewährt, tritt besonders dann hervor, wenn die Classenzahl sehr gross ist. Man versuche z. B. die Anzahl der Combinationen zur 100. Classe für die Zeiger $a^{100}b^{100}c^{94}$ mit Hülfe der Bernoulli'schen Tabelle zu berechnen, und man wird bald ermüdet den Arm sinken lassen, während sie nach unserer Vorschrift einfach wird

$$\underset{100}{{}^{w}C}(3)-\underset{5}{{}^{w}C}(3)=\binom{102}{100}-\binom{7}{5}=5151-21=5130.$$

Sollen die Combinationen so ausgeführt werden, dass bei einem Teile der Elemente die Wiederholungen unbeschränkt, bei den andern dagegen vorgeschrieben sind, dergestalt, dass bei diesen nur eine bestimmte Menge gleicher Elemente vorkommen darf, nicht mehr und nicht weniger, so haben wir eine leichte Aufgabe vor uns. Sollen z. B. in der $m$ten Classe von den $k$ten Elementen $a, b \ldots e$ das erste, a nur α mal, b nur β mal u. s. f. zuletzt e nur ε mal gesetzt werden, währeud die andern von den gegebenen n Elementen beliebig oft mal wiederholt werden dürfen, so sind so viel Arten vorhanden, als diese übrigen $n-k$ Elemente zur $\overline{m-\alpha-\beta-\ldots-\varepsilon}$ ten Classe m. W. combinirt werden können.

Bei den entsprechenden Variationen entwickele man die $m$te Potenz der $n$gliedrigen Summe $a+b+c+\ldots+t$ in der Weise, dass man diejenigen Elemente, deren Wiederholung vorgeschrieben ist, einzeln nimmt, während man die übrigen $\overline{n-k}$ aber zu einem einzigen Summanden zusammenfasst. D. h. man rechne $(a+b+\ldots+e+f+g+\ldots+s+t)^m$ nach dem polynomischen Satze für die Glieder a, $b \ldots e$ und $(f+g+\ldots+t)$ aus. Dann enthält dasjenige Glied der

---

$$\binom{p+1}{m}=\binom{p}{m}+\binom{p-1}{m-1}\binom{r}{1}+\binom{p-2}{m-2}\binom{r+1}{2}+\ldots$$
$$+\binom{p-k}{m-k}\binom{r+k-1}{k}+\ldots+\binom{p-m-1}{1}\binom{r+m-2}{m-1}$$
$$+\binom{r+m-1}{m}$$

entstehenden Reihe, in welchem die Potenzen $a^{\alpha} b^{\beta} \ldots e^{\varepsilon}$ vorkommen, die gesuchten Variationen. Ihre Anzahl wird gefunden, indem man unter Beibehaltung des Coefficienten für jeden Buchstaben 1 setzt. Dies giebt, da dann $f+g+\ldots+t$ gleich $n-k$ wird

$$8) \qquad \frac{m!\,(n-k)^{m-\alpha-\beta-\ldots\varepsilon}}{\alpha!\,\beta!\ldots\varepsilon!\,(m-\alpha-\beta-\ldots-\varepsilon)!}.$$

Eine Gruppe von Elementen, die in jeder Art vorhanden sein soll, bezeichnete man früher als den Kopf der Combination (caput combinationis), es würde daher nach dieser Ausdrucksweise die von uns gelöste Aufgabe heissen: Suche die Anzahl der Formen für die Combin. und Var. m. W., die alle den Combinationskopf $a^{\alpha} b^{\beta} \ldots e^{\varepsilon}$ enthalten. Für die Combinationen ohne W. hat schon Weingärtner in dem oben angeführten Buche eine Lösung dieser Aufgabe auf S. 264—5 mitgeteilt.

Mit Hülfe der Formel (8) sind wir nun im Stande, auf bequeme Weise die Anzahl der Variationen mit eingeschränkten Wiederholungen zu berechnen, wenn, wie wir bei den entsprechenden Combinationen angenommen hatten, nur für ein Element eine von der Classenzahl verschiedene Dimension der Wiederholungen gegeben ist. Wenn nämlich, wie oben, die n Elemente $a, b, c \ldots t$ in der $m$ten Classe jedes m mal, t allein aber nur w mal vorkommen darf, so hätten wir in der Potenz $(a+b+c+\ldots+t)^m$, da wir nach dem binomischen Lehrsatze für die beiden Summanden $\overline{a+b+\ldots s}$ und t entwickeln, nur diejenigen Glieder wegzunehmen, welche t in einer höhern als $w$ten Potenz enthalten, und dann unter Beibehaltung der Coefficienten für jeden der Buchstaben $a, b \ldots t$ eins zu setzen. Ist t^r eine solche Potenz, r mithin eine ganze Zahl zwischen w und m, so giebt uns Formel (8) den durch Auslassung von t wegfallenden Summanden, indem wir r für α oder β u. s. f. schreiben und die übrigen der k Grössen $\alpha, \beta \ldots \varepsilon$ null werden lassen. Das Gesuchte ist danach

$$\frac{m!\,(n-1)^{m-r}.1^r}{r!\,(m-r)!} = \binom{m}{m-r}(n-1)^{m-r}.$$

Die Anzahl der Variationen für den Zeiger $a^{100} b^{100} c^{96}$ in der hundersten Classe würde sich demnach bestimmen als

$$(2+1)^{100} - \left(1 + \frac{100}{1}2^1 + \frac{100\,.\,99}{1.2}2^2 + \frac{100.99.98}{1.2.3}2^3\right)$$
$$= 3^{100} - (1+200+19800+1293600) = 3^{100} - 1313601,$$

ein Ausdruck, der mit Hülfe der Logarithmen weiter auszurechnen wäre.

Ist dagegen m gleich 6 und der Zeiger $a^6 b^6 c^6 d$, so erhielten wir für die Anzahl der Complexionen

$$\overline{3+1}^6 - \left[1 + \binom{6}{1}3^1 + \binom{6}{2}3^2 + \binom{6}{3}3^3 + \binom{6}{4}3^4\right]$$
$$= 4096 - (1 + 18 + 135 + 540 + 1215)$$
$$4096 - 1909 = 2187 = 3^7.$$

Bleibt die Classe dieselbe, aber der Zeiger wird $a^6 b^6 d$, so ändert sich in der letzten Gleichung nur n, und man bekommt

$$3^6 - \left[1 + \frac{6}{1}2^1 + \frac{6.5}{1.5}2^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}2^3 + \frac{6.5}{1.2}2^4\right]$$
$$= 729 - (1 + 12 + 60 + 160 + 240) = 729 - 473 = 256 = 2^8.$$

Wie wir schon in der Einleitung zu diesem Abschnitte angedeutet haben, war eine der bekanntesten Aufgaben, an der manche bedeutende Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts ihre Kräfte versucht haben, die, zu bestimmen, wie viel Fälle möglich sind, in denen mit einer gewissen Anzahl von Würfeln eine verlangte Summe von Augen geworfen werden kann. Diese Aufgabe, die Jac. Bernoulli durch Entwerfung einer Tafel gelöst hat, in der er das Gesuchte, schrittweise zu einer immer grösseren Menge von Würfeln fortschreitend, durch Zusammenzählen einer Reihe lotrecht unter einander stehender Zahlen berechnet, führte zu der Behandlung der Variationen zu gegebenen Summen. Die Anzahl der Formen in jeder einzelnen Classe hiefür durch eine allgemeine Formel auszudrücken, gelang erst Hindenburg. Seine Ableitung ist nach Weingärtner die, dass er die erste Zahl der Complexion von 1 an wachsen lässt so hoch als möglich und jedesmal die Möglichkeit der Variationen den übrig bleibenden Elemente untersucht. Indem er dieses Verfahren für die ersten Classen, von der ersten aufsteigend bis zur vierten durchführt, ergeben sich figurirte Zahlen, deren Eigenschaften er ohne weiteres verallgemeinert, ohne den Euler'schen Schluss von m auf $m+1$ zu machen. Abgesehen von dem Mangel an wissenschaftlicher Strenge und von seiner Weitläufigkeit hat dieser Beweis noch den Nachteil, dass man nicht recht einsicht, wo eigentlich die Binomialcoefficienten herkommen bei einer Weise der Zusammenstellungen, die doch scheinbar mit den Combinationen ohne W. nichts zu tun haben. Sein Urheber ahnte nicht, dass in dem Grundgedanken seiner combinatorischen Analysis, nämlich darin, dass man die Elemente in den Formen der Combinationen m. W. als Factoren betrachtet, eine viel ein-

fachere und ganz allgemeine Ableitung des fraglichen Satzes verborgen liegt.

Aufgabe. Wie gross ist die Anzahl der Arten der Variationen m. W. in der $m$ten Classe zur Summe n?

Auflösung. Ich schreibe m Buchstaben: $a, b, c \ldots t$ immer in derselben Reihe hin und setze die zu variirenden Ziffern als Exponenten derselben, so erhalte ich die Abkürzungen für die Combinationen m. W. der m Elemente a, b, c u. s. f. zur $m$ten Classe, jedoch nicht vollständig, da kein Buchstabe verschwinden darf. Denn dann würde eine jener Ziffern null werden, was nach dem Begriffe der geforderten Variationen nicht erlaubt ist. So würden wir bei dem in Stahl's *) Grundriss der Combinationslehre auf S. 169 ausgeführten Beispiele schreiben

in der ersten Form		statt	1117	$a^1 b^1 c^1 d^7$
„	22.	„	1441	$a^1 b^4 c^4 d^1$,
„	43.	„	2341	$a^2 b^3 c^4 d^1$,
„	64.	„	3511	$a^3 c^5 c^1 d^1$.

Sondere ich nun in dem allgemeinen Falle aus jeder Complexion das m Factoren enthaltende Product $a.b.c \ldots t$ als Coefficient ab, so ist der übrig bleibende Factor von der $\overline{n-m}$ten Dimension, und es ist in ihm der Wiederholung der Elemente nach keiner Seite hin eine Beschränkung auferlegt. Er ist also die Abkürzung für je eine Art der gemeinen Combinationen mit Wiederholungen von m Elementen zur $\overline{n-m}$ten Classe, mithin bezeichnet durch die Formel

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+\overline{n-m}-1)}{1.2.3.4\ldots(n-m-1)(n-m)},$$

wofür man bekanntlich auch schreiben kann

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-2)(n-1)}{1.2.3\ldots(m-3)(m-2)(m-1)}.$$

In dem letzten Bruche brauchen wir nur den Zähler rückwärts zu lesen, um darin sofort den Hindenburg'schen Ausdruck zu erkennen

$$9) \qquad \overset{n}{\underset{(1,2,3,4\ldots)}{M}} = \binom{n-1}{m-1}.$$

---

*) Stahl, Conr. Dietrich Martin, Professor in Jena, Grundriss der Combinationslehre nebst Anwendung derselben auf die Analysis. Jena und Leipzig 1800. Herrn Wolfgang Göthe gewidmet.

der für die **Variationen m. W.** in der $m$ten **Classe zur Summe n gültig ist.** Dabei haben wir nur die ältere Bezeichnung der Binomialcoefficienten in die jetzt übliche umgeändert.

Unsere Ableitung hat ausser dem Vorzuge der Kürze noch den, dass wir durch sie wiederum, wie es oben bei den gemeinen Combinationen mit und denen ohne Wiederholungen der Fall war, die verschiedenen Teile des von uns betrachteten Gebietes der Mathematik unter einen Gesichtspunkt vereinigen und so für Lehrer und Lernende die Arbeit bedeutend verringern. Die Variationen zu bestimmten Summen brauchen jetzt nicht mehr abgesondert und in gleicher Betonung mit den andern Zusammenstellungen behandelt, sondern nur anhangsweise als Beispiel bei den Combinationen m. W. betrachtet zu werden.

Ausserdem bietet der Gedankengang unseres Beweises von selbst die Lösung der Aufgabe, die Zahl der Variationen zu bestimmten Summen dann zu finden, wenn der Wert der Elemente nicht unter eine gewisse Ziffer heruntergehen soll. Denn, ist diese k, und setzen wir wiederum die Ziffernelemente als Exponenten der m Buchstaben $a, b, c \ldots t$, so können wir jetzt aus allen Producten der Potenzen den Coefficienten $a^k b^k c^k \ldots t^k$ absondern, sodass die Dimension der nach der Absonderung bleibenden Producte $n - km$ wird. Es sind deren also so viele vorhanden, als sich m Grössen zur $\overline{n - km}$ten Classe mit unbeschränkten Wiederholungen combiniren lassen. Nun ist nach dem schon vorhin erwähnten Satze

$$\underset{n-km}{{}^{w}C(m)} = \underset{m-1}{{}^{w}C(n - km + 1)} = \binom{\overline{n - km + 1} + \overline{m - 2}}{m - 1},$$

folglich nach vollzogener Vereinfachung

$$10)\qquad \underset{(k,\, k+1,\, k+2 \ldots)}{{}^{n}M} = \binom{n - 1 - m(k - 1)}{m - 1},$$

eine Gleichung, die sich bei $k = 1$ in (9) verwandelt.

Zählen wir in den hier betrachteten Zusammenstellungen diejenigen Complexionen, in denen dieselben Elemente, aber in anderer Reihenfolge vorkommen, immer nur einmal, so erhalten wir die Combinationen zu bestimmten Summen. Setze ich wieder die Ziffernelemente als Exponenten von Potenzen, deren Grundzahlen m Buchstaben sind, die in gewisser Anordnung hinter einander stehen, so würde es jetzt gleichgültig sein, welchen der Buchstaben bestimmte Exponenten zukommen, wenn diese letzteren überhaupt nur in einer gewissen Auswahl vorhanden sind. So würde z. B. bei den

Combinationen der 4. Classe zur Summe 10 die Formen a^6b^2cd, a^2b^6cd, abc^2d^6 u. ä. nur als eine gerechnet werden. Setzen wir nun im allgemeinen Falle aus der durch die Potenzen der Buchstaben a, $b \dots t$ gebildeten Producten, die wir uns durch ein Pluszeichen verbunden denken, $abc \dots t$ (im eben besprochenen Beispiele $abcd$) heraus, so leuchtet ein, dass die in der Klammer befindlichen Summanden weiter nichts sind als die Gattungen der gemeinen Combinationen m. W. von m Elementen zur $\overline{n-m}$ten Classe, und dass ihre Anzahl gleich ist der gesuchten Anzahl der Combinationen zur Summe n in der $m$ten Classe. Denn die Gattung (genus) umfasst ja eben alle solche Arten der Combinationen, in denen zwar verschiedene Elemente, aber mit denselben Verhältnissen der Wiederholungen vorkommen. D. h. bei 3 Elementen in der 4. Classe würden a^3b, a^3c, ab^3, ac^3, b^3c, bc^3 nur eine Gattung der gemeinen Combinationen m. W. bilden. Eine allgemeine Formel für die Combinationen zu bestimmten Summen ergiebt sich hieraus nicht; doch kann man nun umgekehrt die für letztere von Euler entworfenen Tabellen dazu benutzen, um die Anzahl der Gattungen einer jeden Classe bei den Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung zu finden, wenn man nur die oben dargelegten Beziehungen zwischen Classe, Anzahl der Elemente und Summen, wie sie unter den beiden Combinationsarten bestehen, zu benutzen gelernt hat.

So bedeutend der Fortschritt auch war, der durch die Aufstellung der Formel für die Variationen zu bestimmten Summen gemacht wurde, so genügt er doch noch nicht, um die Aufgabe vom Würfelspiel, die ich oben als die Veranlassung zu den Untersuchungen über diese Art der Zusammenstellungen gemacht hatte, vollständig zu lösen. Denn dieser Formel liegt die Annahme zu Grunde, dass die Ziffern, die zusammen gleich der verlangten Summe sind, den höchstmöglichen Wert annehmen können, den überhaupt die gegebene Classe gestattet. Bei den Würfeln dürfen dieselben aber nicht über 6 hinausgehen. Auch dann, wenn man mehrstellige Zahlen sucht, deren Quersumme eine gewisse Grösse haben soll, kann man den Hindenburg'schen Ausdruck nur dann brauchen, wenn durch diese Grösse und die Exponenten der Classe die Möglichkeit ausgeschlossen wird, dass eine Ziffer über 9 hinaus wächst. Unter Benutzung der Umwandlungen, welche den wichtigsten Teil unserer letzten Entwickelungen ausmachten, würde man hingegen die endgültige Lösung dieser Aufgaben erreicht haben, wenn es gelänge, eine Regel darüber aufzufinden, wieviel Complexionen bei den Combinationen mit gleichmässig beschränkten Wiederholungen in jeder beliebigen Classe möglich sind. Diesem Ziele führt uns aber der unserer ganzen Arbeit zu grunde liegende Gedanke um einige Schritte näher.

Wie im ersten Abschnitte behufs Ableitung der Gleichung 5) entwickeln wir auch jetzt die $m$te Potenz desselben n gliedrigen Polynoms nach dem binomischen Lehrsatze für die beiden Summanden $\overline{a+b+\ldots s}$ und t. Von den $m+1$ Gliedern der entstehenden binomischen Reihe können wir nun aber, wenn er die Grenze der erlaubten Wiederholungen bezeichnet, nur diejenigen brauchen, die solche Potenzen von t enthalten, deren Exponenten zwischen 0 und r liegen. Die fallenden Potenzen des ersten $\overline{n-1}$ gliedrigen Summanden würden bei einer vollständigen Reihe mit dem Exponenten m beginnen, nach der jetzigen Voraussetzung können sie aber im günstigsten Falle erst bei $(a+b+\ldots+s)^{(n-1)r}$ anfangen, und sie müssen, da ihre Exponenten sich mit denen von t zu m ergänzen, mit der $\overline{m-r}$ten Potenz abschliessen. Ist daher $m<(n-1)r$, so besteht die brauchbare Reihe aus $r+1$ Gliedern, von $(a+b+\ldots+s)^m$ bis $(a+b+\ldots+s)^{m-r}.t^r$ ist aber m grösser als $(m-1)r$, so hat sie, da die ersten Glieder wegfallen, eine geringere Ausdehnung nur bei $m=nr$, endlich ist nur eine Stelle brauchbar, nämlich die letzte, weil alle vorhergehenden solche Potenzen des $\overline{n-1}$ gliedrigen ersten Summanden enthalten, deren Exponenten über $(n-1)r$ steigen. Erlauben wir uns nun, damit unsere Darstellung nicht gar zu schleppend wird, für die Anzahl der Combinationen von x Elementen zur $k$ten Classe, wenn jedes der letzteren höchstens r mal vorkommen darf, dass Zeichen ${}^rC_k(x)$ einzuführen, so würden unsere Schlüsse unter Anwendung der in dieser Abhandlung zur Genüge erörterten Sätze zu der Folgerung führen:

$$
11)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\text{Wenn } m>\overline{n-1}.r,\quad {}^rC_m(n) = {}^rC_{m-r}(n-1)+{}^rC_{m-r+1}(n-1)+\ldots \\
\qquad +{}^rC_{(n-1)r-1}(n-1)+{}^rC_{(n-1)z}(n-1 = \Sigma^r_{m-r \text{ bis } (n-1)r} C(n-1), \\
\\
\text{,,}\quad m<\overline{n-1}.r,\qquad = {}^rC_{m-r}(n-1)+{}^rC_{m-r+1}(n-1)+.., \\
\qquad +{}^rC_{m-1}(n-1)+{}^rC_m(n-1) = \Sigma^r_{m-r \text{ bis } m} C(n-1).
\end{array}
\right.
$$

Dieser Satz führt also die zu lösende Aufgabe auf dieselbe Aufgabe, aber mit einer um eins geringeren Zahl der Elemente zurück. Er giebt uns dadurch den Fingerzeig, von der niedrigsten Zahl der letzteren auszugehen und stufenweise fortschreitend zu den höhern aufzusteigen. Dass für ein Element in jeder Classe, wenn m gleich r, nur eine Complexion möglich ist, bedarf keiner Erwähnung. Sind zwei zu combinirende Grössen a und b gegeben, so sind die brauchbaren Arten, in Potenzform ausgedrückt, folgende:

$$a^r c^{m-r}, \quad a^{r-1} b^{m-r+1}, \quad a^{r-2} b^{m-r+2}, \ \ldots \ a^{m-r+1} b^{r-1}, \quad a^{m-r} b^r.$$

Verbinden wir diese Complexionen durch das Pluszeichen, so können wir aus der dadurch entstehenden algebraischen Summe den Factor $a^{m-r} b^{m-r}$ heraussetzen; der Exponent des ersten, die Reihe in der Klammer beginnenden a wird dann $r-(m-r)$, d. i. $2r-m$, und da die Exponenten der folgenden a immer um eins fallen, die von b dagegen in derselben Weise steigen bis zu b^{2r-m}, so leuchtet ein, dass die Klammer diejenigen Einzelproducte enthält, welche — abgesehen von den Coefficienten — die Glieder des durch Ausrechnung von $(a+b)^{2r-m}$ sich ergebenden Polynomes bilden. Die Anzahl dieser Glieder ist aber bestimmt durch ${}^{w}\underset{2r-m}{C}(2)$, folglich haben wir unter Anwendung der oben von uns angenommenen Bezeichnungsweise:

$$12) \qquad {}^{r}\underset{m}{C}(2) = {}^{w}\underset{2r-m}{C}(2) = {}^{w}\underset{1}{C}(2r-m+1) = 2r-m+1.$$

Ist r kleiner als $\frac{1}{2}m$, m also grösser als $2r$, so ist gar keine Combination von der geforderten Eigenschaft möglich.

Gehen wir zu drei Elementen über, so lehrt uns Gleichung 11), dass wir den Fall, wo $m > 2r$, unterscheiden müssen von dem, wo m unter diesen Wert herabsinkt. Nehmen wir zunächst den ersten Fall und setzen m gleich $2r+x$, wo x eine ganze positive Zahl bedeutet, die kleiner als r oder ihm gleich ist. Dann ist das Gesuchte nach dem ersten Teile von 11) eine Reihe, welche anfängt mit ${}^{r}\underset{r+x}{C}(2)$ und aufhört bei ${}^{r}\underset{2r}{C}(2)$, während die Ausdehnung (dimensio) der Classe immer um eins steigt. Nun ist der erstere Ausdruck nach der letzten Gleichung gleich der Anzahl der Combinationen mit unbeschr. Wiederholung von 2 Elementen zur $(2r-\overline{r+x})$ten, die zur $\overline{r-x}$ten Classe, und das letzte Glied der Reihe wird nach demselben Satze zu ${}^{w}\underset{0}{C}(2)$, während für die dazwischen liegenden Stellen in der entsprechenden ebenfalls aus (12) abgeleiteten Formel die Classe immer um eins niedriger wird. Lesen wir die Reihe umgekehrt, setzen für x seinen Wert $m-2r$ ein, wodurch sich $r-x$ in $3r-m$ verwandelt, so erhalten wir unter Benutzung von (4) oder (5):

$$13\text{a}) \quad \text{Wenn } m \geqq 2r, \quad {}^{r}\underset{2r}{C}(3) = 1 + {}^{w}\underset{1}{C}(2) + {}^{w}\underset{2}{C}(2) + {}^{w}\underset{3}{C}(2) + \ldots$$
$$+ {}^{w}\underset{3r-m-1}{C}(2) + {}^{w}\underset{3r-m}{C}(2) = {}^{w}\underset{3r-m}{C}(3).$$

Ist dagegen der Classenexponent m kleiner als $2r$, so setze man

zunächst m gleich $2r-q$ und entwickele nach dem binomischen Lehrsatze die Potenz $(\overline{a+b}+c)^m$ für die beiden Summanden $\overline{a+b}$ und c. Die für uns brauchbaren Glieder sind dadurch bestimmt, dass der Exponent von c nur bis r steigen kann, sie sind also

$$(a+b)^{2r-q}+(a+b)^{2r-q-1}c^1+\ldots+(a+b)^r c^{r-q}+(a+b)^{r-1}c^{r-q+1}+\ldots$$
$$+(a+b)^{r-q+1}c^{r-1}+(a+b)^{r-q}c^r.$$

In dieser Reihe liegt eine Grenzscheide bei $(a+b)^r$. Denn, während bei den folgenden niedrigeren Potenzen von $a+b$ nur von unbeschränkter Wiederholung der Summanden a und c die Rede sein kann, fallen die vorhergehenden unter Formel (12). Das dritte Element c kann, weil seine Potenzen immer nur eine Stelle geben, keinen Einfluss auf die Anzahl der Complexionen ausüben, die jedem einzelnen Gliede obiger Binomialreihe zukommen. Da nun $2r \;\; q$ gleich m ist, so beträgt nach 12)

bei $(a+b)^{2r-q}$	die	Anzahl	der	braucharen	Formen	${}^{w}\underset{2r-m}{C}(2)$,
„ $(a+b)^{2r-q-1}$	„	„	„	„	„	${}^{w}\underset{2r-m+1}{C}(2)$,
	⋮			⋮		⋮

zuletzt bei

$(a+b)^r$	„	„	„	„	„	${}^{w}\underset{r}{C}(2)$.

Bilden wir die Summe und zählen zu ihr $\underset{0 \text{ bis } 2r-m-1}{\Sigma^w C}(2)$ einmal positiv und einmal negativ hinzu und verwandeln die dadurch gebildeten Reihen nach 4), so erhalten wir für die Gesamtzahl aller hier in Betracht kommenden Combinationen

$$\text{(I)} \qquad \underset{0 \text{ bis } r}{\Sigma^w C}(2)-\underset{0 \text{ bis } 2r-m-1}{\Sigma^w C}(2)={}^{w}\underset{r}{C}(3)-{}^{w}\underset{2r-m-1}{C}(3).$$

Wir haben nun in obiger Binomialreihe noch diejenigen Potenzen zu betrachten, deren Exponenten unter r herabgehen. Hierbei ist die Gesamtzahl der Complexionen leicht zu bestimmen als eine Reihe, die mit ${}^{w}\underset{r-q}{C}(2)$ beginnt und bei ${}^{w}\underset{r-1}{C}(2)$ abschliesst. Zu dieser zähle ich wiederum eine mit 1 beginnende und mit ${}^{w}\underset{r-q-1}{C}(2)$ aufhörende gleichartige Reihe einmal positiv und einmal negativ hinzu, setze für q seinen Wert $2r-m$ ein, schreibe demgemäss für $r-q-1$ das gleiche $m-r-1$ und wende 4) an, so kommt

$$\text{(II)} \qquad \underset{0 \text{ bis } r-1}{\Sigma^w C}(2)-\underset{0 \text{ bis } m-r-1}{\Sigma^w C}(2)={}^{w}\underset{r-1}{C}(3)-{}^{w}\underset{m-r-1}{C}(3).$$

Bevor wir nun (I) und (II) zusammen nehmen, machen wir von der schon auf S. 90 zur Ableitung von 9) benutzten Umwandlung Gebrauch, so dass wir haben:

$$\text{Wenn } 2r \geqq m > r, \quad {}^{r}\underset{m}{C}(3) = {}^{w}\underset{2}{C}(r+1) + {}^{w}\underset{2}{C}(r) - {}^{w}\underset{2}{C}(2r-m) - {}^{w}\underset{2}{C}(m-r).$$

Die beiden ersten Summanden lassen sich noch durch Zusammenziehen vereinfachen, indem man die bekannten Werte für sie einführt, dann $r+1$ heraussetzt und seine Coefficienten $2r+2$ durch 2 hebt. Dann gestaltet sich das Gesuchte zu:

$$\text{13b)} \quad \text{Wenn } 2r \geqq m > r, \quad {}^{r}\underset{m}{C}(3) = (r+1)^2 - {}^{w}\underset{2}{C}(2r-m) - {}^{w}\underset{2}{C}(m-r).$$

Solange nicht mehr als drei Elemente gegeben sind, können wir jede Aufgabe über die Combinationen mit gleichmässig beschränkter Wiederholung lösen. Will ich z. B. wissen, wie oft mal mit 3 Würfeln 13 Augen geworfen werden können, so betrachte ich die Würfel als Stellen einer Variation m. W. zur Summe 13. Denke ich mir nun die zu summirenden Ziffern einzeln als Exponenten von a, b und c, so verwandle ich durch Absonderung des Factors abc die Aufgabe in die andere: Wie oft mal lassen sich 3 Elemente zur 10. Classe combiniren, wenn jedes nur 5 mal vorkommen darf? Gleichung 13a) gibt uns darauf die Antwort:

$${}^{w}\underset{2.5-5}{C}(3) = {}^{w}\underset{5}{C}(3) = {}^{w}\underset{2}{C}(6) = \frac{6.7}{1.2} = 21.$$

Ebenso nach 13b):

$$(5+1)^2 - {}^{w}\underset{2}{C}(0) - {}^{w}\underset{2}{C}(5) = 36 - 0 - \frac{5.6}{1.2} = 21.$$

Wie man sieht, gelten beide Formeln 13a) und b). Es muss dies auch so sein, da nach unsern Annahmen nichts im Wege steht, x sowol als y null werden zu lassen.

Sollen mit derselben Würfelzahl 12 Augen geworfen werden, so erhalte ich die Lösung:

$${}^{5}\underset{9}{C}(3) = 6^2 - {}^{w}\underset{2}{C}(1) - {}^{w}\underset{2}{C}(4) = 36 - \frac{1.2}{1.2} - \frac{4.5}{1.2} = 25.$$

Diese Ergebnisse stehen in Uebereinstimmung mit der erwähnten Bernoulli'schen Tabelle, das letzte auch mit Beckers Arithmetik, 2. Buch, § 29 Beispiel 2. Doch besitzt unsere Formel den Vorzug der Allgemeinheit, während jene Tafel für jede andere Wiederholungsgrenze neu entworfen werden muss, und in dem letztern Buche die Variationen wirklich ausgeführt werden. Der Vorteil, den der von uns vorgeschagene Weg bietet, tritt besonders dann hervor, wenn die gegebenen Grössen sehr grosse Zahlen sind. Würden wir z. B. die Frage zu beantworten haben, auf wieviel verschiedene Weisen man 1000 Mark so unter 3 Personen verteilen könne, dass jede nicht weniger als 100, aber nicht mehr als 600 M. erhielte, so würde für Entwerfung jener Tabelle das Papier und das Auge nicht ausreichen. Denn man hätte 501 Einsen neben einander zu schreiben, dann diese Reihe, indem man immer eine Stelle nach rechts rückt, noch 500 mal darunter zu setzen, um die Summe zu bilden. Wenn man dies nun auch durch die aufsteigenden und nieder fallenden natürlichen Zahlen ersetzen würde, so hätte man immer noch die entstehenden 1001 Ziffern 501 mal schief unter einander zu schreiben und die lotrechten Reihen zusammenzuzählen. Wir dagegen denken uns die drei Anteile als Exponenten der Buchstaben a, b und c, sondern $a^{100}b^{100}c^{100}$ überall als Factor ab und können so die gesuchte Anzahl der möglichen Fälle ausdrücken durch 13b). Es ist $r = 500$, $m = 700$, m also kleiner als $2r$. Danach ergiebt sich als Lösung:

$$\underset{700}{{}^{500}C}(3) = 501^2 - \underset{2}{{}^{w}C}(300) - \underset{2}{{}^{w}C}(200) = 251001 - 45150 - 20100$$
$$= 185751.$$

Wenn wir nun die Zahl der Elemente von 3 an immer um eins steigen liessen, so würde uns die Gleichung 11) die Mittel an die Hand geben, die betreffende Formel für jede Zahl der Elemente und bei jeder beliebigen Classe abzuleiten. Doch würde uns das zu weit führen. Wir beschränken uns darauf zu zeigen, wie durch die Anwendung des Grundgedankens dieser Abhandlung noch eine einfache Beziehung und die Verallgemeinerung zweier schon für engere Grenzen entwickelten Sätze aufgefunden werden können.

Man denke sich nämlich alle Formen der Combinationen der n Buchstaben $a, b, c \ldots t$, von denen ein jeder nur r mal gesetzt werden darf, in der $m$ten Classe wirklich ausgeführt, betrachte die Elemente als Factoren und teile mit einer jeden Complexion der Reihe nach in $a^r b^r c^r \ldots t^r$: dann geben die Quotienten die verschiedenen Formen der gleichartigen Zusammenstellungen in der $\overline{nr - m}$ten Classe. Und zwar sind diese letzteren vollständig vorhanden. Denn jeder $x$ten Dimension eines Elementes in den ursprünglichen Combi-

nationen entspricht immer eine $\overline{r-x}$te Dimension desselben Buchstabens in den Quotienten. Wenn x von 0 bis r steigt, fällt $r-x$ von r bis 0. Nun entstehen soviele Quotienten, als Divisoren da sind, mithin ist

$${}^{r}C_{m}(n) = {}^{r}C_{nr-m}(n),$$

oder in Worten ausgedrückt: **Es sind immer gleichviel Arten in je zwei solchen Classen vorhanden, deren Dimensionen gleich weit von 0 und von nr abstehen.**

Ist nun m grösser als $(n-1)r$ oder ihm gleich, so ist $nr-m$ kleiner als r oder ihm gleich; die Combinationen zur $\overline{nr-m}$ten Classe haben also dann, auch wenn jedes Element höchstens r mal vorkommen darf, unbeschränkte Wiederholung, folglich nach der letzten Gleichung:

14) $$\text{Wenn } m > (n-1)r, \quad {}^{r}C_{m}(n) = {}^{\infty}C_{nr-m}(n),$$

eine Verallgemeinerung und Bestätigung von 12) und 13a).

Wenden wir dies auf die öfters erwähnte Aufgabe vom Würfelspiel an und fragen: „Wieviel Fälle sind möglich, dass man mit 6 Würfeln 32 Augen werfe“, so wäre bei den ensprechenden Combinationen mit gleichmässig beschr. W. $r = 5$, $n = 6$, $nr = 30$, $m = 32-6.1 = 26\,(> 5.5)$, mithin das Gesuchte

$${}^{5}C_{26}(6) = {}^{\infty}C_{4}(6) = \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} = 126.$$

Dasselbe kommt heraus, wenn m gleich 4 ist, oder wenn $6+4$, d. i. 10 Augen geworfen werden sollen, Ergebnisse, die durch die Bernoulli'sche Tafel bestätigt werden.

Denke ich mir 5 regelmässige Dodekaeder und bei einem jeden auf den 12 Seitenflächen der Reihe nach 1, 2, 3 u. s. f. bis 12 Punkte eingravirt, so finde ich für die Anzahl der Fälle, in denen die oben auf liegenden Flächen zusammen 50 Augen zeigen, unter Berechnung der von uns gegebenen Vorschriften

$${}^{11}C_{45}(5) = {}^{\infty}C_{10}(5) = {}^{\infty}C_{4}(11) = 1001.$$

Hätten wir ferner die Frage zu beantworten, wieviel Zahlen unter einer Million zur Quersumme 37 haben, so lassen wir bei den zur Summe 37 zu variirenden Ziffern die Null zu. Solche Complexionen, bei denen vorne Nullen hinter einander stehen, geben uns diejenigen

Zahlen, die weniger als 5 Stellen haben. Bei den zugehörigen Combinationen mit gleichm. beschränkten Wiederh. ist jetzt

$$m = 37, \quad n = 5, \quad r = 9, \quad nr - m = 8,$$

das Gesuchte also:

$$\underset{37}{{}^9C}(5) = \underset{8}{{}^wC}(5) = \underset{4}{{}^wC}(9) = 495.$$

Obgleich es bis jetzt immer von Erfolg begleitet war, wenn wir die Variationen zu bestimmten Summen auf die Combinationen mit entsprechenden Wiederholungen zurückführten, so will ich doch den Versuch machen, den bei der Ableitung der bekanntesten Combinationsformeln von mir gebrauchten Kunstgriff noch einmal zum Schlusse bei der Lösung der Aufgabe anzuwenden: Wie gross ist die Anzahl aller Variationen zu einer bestimmten Summe aller Classen, von der ersten aufsteigend bis zur höchstmöglichen?

Wir bilden uns nun das Product aus den n Factoren

$$a(b+\alpha_1)(c+\alpha_2)(d+\alpha_3) \ldots (r+\alpha_{n-3})(s+\alpha_{n-2})(t+\alpha_{n-1}),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ Grössen von der Eigenschaft bezeichnen, dass sie die Gestalt desjenigen Summanden des unmittelbar vorhergehenden Factors annehmen, an welchen sie bei der Multiplication angefügt werden. α_1 wird also dann zu a, α_2 zu b oder α_1, α_3 zu c oder α_2 u. s. fort. Führen wir nun die Multiplication, wie im ersten Teile dieser Abhandlung S. 429—31 in der Weise aus, dass wir den Einzelfactor in einem späteren Binome immer hinter dem betreffenden Gliede des unmittelbar vorhergehenden Binoms anfügen, so erhalten wir die wiederholt auftretenden Buchstaben überall neben einander stehend, durch kein von ihnen verschiedenes Element von einander getrennt.

Denken wir uns zweitens die Variationen m. W. zur Summe n so entstanden, dass wir eine Reihe von n Einsen neben einander hinschreiben, und dann eine bestimmte Menge der letzteren zu den Elementen der Variation zusammenfassen, so kann dies gar nicht anders bewerkstelligt werden, als dass wir neben einander liegende Einsen zusammen nehmen.

Schreiben wir nun in der angegebenen Multiplication die in dem Gesammtproducte vorkommenden Potenzen in ihrer ursprünglichen Gestalt, d. h. als Producte gleicher Factoren, von denen jeder die erste Potenz eines der Elemente a, b, c u. s. w. ist, so tritt eben-

7*

falls an die Stelle des Zahlenexponenten eines einzelnen Buchstaben eine Reihe von neben einander stehenden Einsen.

Die Vergleichung beider Darstellungsweisen zeigt unzweideutig, dass die Potenzexponenten in den bei obiger Multiplication entstehenden Einzelproducten die Elemente der Variation zu einer bestimmten Summe vorstellen, dass folglich die Anzahl dieser Producte gleich ist der gesuchten Menge der Complexionen der fraglichen Variationen durch alle Classen. Die Einzelproducte sind aber die Glieder der polynomischen Reihe, welche durch Ausmultipliciren des Productes

$$a(b+\alpha_1)(c+\alpha_2)\ \dots\ (s+\alpha_{n-2})(t+\alpha_{n-1})$$

erzeugt wird. Die Summe der ganzen Reihe verwandelt sich aber in die Anzahl ihrer Summanden, wenn wir einen jeden derselben gleich eins setzen; und dies erreichen wir dadurch, dass wir für jeden Buchstaben 1 schreiben. Auf diese Weise erhalten wir für die in unsrer Aufgabe gesuchte Grösse:

$$15)\qquad 1.(1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Man wird mir vielleicht einwenden, dass dieses Ergebnis ja viel schneller so herzuleiten gewesen wäre, dass man, wie es bei Weingärtner geschehen ist, in der für die $m$te Classe geltenden Formel 9) die Menge (m) der an einander zu fügenden Ziffern von 1 bis n wachsen lässt und dann die Binomialcoefficienten zusammenzählt. Wozu also, wird man vielleicht fragen, dieser Aufwand von Arbeit und von Nachdenken, wenn die Sache doch einfacher zu machen ist? Dagegen erwidere ich, dass es mir in dieser Abhandlung gerade darauf ankam zu zeigen, wie durch die Anwendung der Regeln der Multiplication eine jede Formel der Combinationslehre selbständig gefunden werden kann, ohne dass man eine der andern zu kennen braucht. Es ist ja allerdings bequemer, über einen Fluss mit dem Boote zu fahren, als ihn zu durchschwimmen, aber das Vergnügen der Kraftleistung geht dann verloren. Ebenso mögen diejenigen, welche die Vorzüge des in dieser Schrift angewandten Beweisverfahrens nicht anerkennen wollen, meine Entwickelungen als eine Art geistigen Turnens betrachten, meinetwegen nur als ein anziehendes Spiel, bei dem es darauf ankam zu zeigen, wieviel Goldkörner in dem Grundgedanken der combinatorischen Analysis Hindenburg's verborgen liegen, wenn man dieselbe überhaupt als die innige Verwandtschaft auffasst, die zwischen der Combinationslehre und der Multiplication mehrstelliger Grössen besteht.

Buxtehude im April 1884.

VI.

Miscellen.

1.

Ein Beitrag zur Schattenlehre.

Werden die Tangenten zur Selbstschattengrenze der schiefen Schraubenfläche bei parallelen Lichtstrahlen construirt, so bedient man sich gewöhnlich des Dufun'schen Theorems*). Ob zwar die dazu nötige Construction genug einfach ist, kann man sie dennoch ohne Benutzung des genannten Theorem's dadurch vereinfachen, indem man den, zur Construction der Selbstschattengrenze nötigen, Linien eine andere Bedeutung gibt.

In der Figur sind die horizontalen Projectionen der Axe A der schiefen Schraubenfläche, und der, im bestimmten Sinne sich bewegenden, Erzeugenden P dieser Fläche dargestellt. Die Erzeugende P schneidet die Axe im Punkte a und die Entfernung ihrer horizontalen Spur m von der Axe gibt den Parameter r der horizontalen Spur der Schraubenfläche an. Die Gerade L, welche den Punkt a enthält, und ihre Spur im Punkte m' hat, bestimmt die Richtung der parallelen Lichtstrahlen.

Um eine vorteilhafte Vereinfachung der weiteren Construction zu erreichen, setzt man gewöhnlich voraus, dass die Projections-Ebene sich mit der Erzeugenden P bewegt. Wir werden uns aber, dieser Voraussetzung entgegen, denken, dass sich die Erzeugende in

---

*) „Traitè de géométrie“ descriptive“ par Jules de la Gournerie. Troisième partie, art. 994, 1012.

jeder ihrer Lagen, samt ihrer Berührungsebene in der normalen Richtung zur Projections-Ebene so weit bewegt, bis sie den Punkt a enthält. Dann bilden alle Geraden P ... eine Kegelfläche K (den Richtungskegel), und ihre Spurpunkte befinden sich in einem Kreise K, als der Spur dieser Fläche.

Die Geraden P und L bestimmen eine Ebene B, die zu den Lichtstrahlen parallel ist. Um den Berührungspunkt d dieser Ebene mit der Schraubenfläche zu bestimmen, errichten wir zu der Projection der Erzeugenden P eine Senkrechte, und tragen auf diese in bestimmter Richtung mittelst des Kreises K den Parameter r über. Vom so erhaltenen Punkte f ziehen wir eine zweite Senkrechte auf die, durch die Punkte m und m' bestimmte Spur M der Ebene B. Diese Senkrechte ist die horizontale Projection einer Geraden des grössten Falles F (in der Ebene B), welche die Gerade P in dem gesuchten Berührungspunkte d schneidet. Ihre Spur befindet sich im Punkte h.

Die Projectionen aller dieser Geraden des grössten Falles F.. schneiden sich in einem Punkte t, der auf einer, in der Projection des Punktes a zu der Projection der Geraden L errichteten Senkrechten liegt, und dessen Entfernung von der Axe A der Entfernung der Spur m' von derselben Geraden gleich ist. Darum bilden die Geraden F... ein einschaliges Hyperboloid H, dessen Leitlinien: die Gerade L, die horizontal-projicirende Gerade Z und der Kreis H (welcher die Spuren aller Geraden F... enthält), als dessen horizontale Spur, sind.

Die zu construirende Selbstschattengrenze S können wir als die Schnittcurve dieses Hyperboloids mit der Kegelfläche K betrachten und auf Grund dessen ihre Tangenten als den Schnitt der beiden, im Punkte a zu beiden Flächen construirten Berührungsebenen, bestimmen. Die Tangente im Punkte m zu dem Kreise K ist die horizontale Spur der betreffenden Berührungsebene der Kegelfläche. Die Berührungsebene des Hyperboloids im Punkte d ist durch die Geraden F des einen und G des zweiten Systems bestimmt. Durch die Spurpunkte h und h' dieser Geraden geht die Spur dieser zweiten Berührungsebene. Der Schnittpunkt p der Spuren beider Ebenen bestimmt mit dem Punkte d die gesuchte Tangente T. —

Diese Construction der Selbstschattencurve so wie ihren Tangenten hat volle Geltung auch für die g e r a d e S c h r a u b e n f l ä c h e als einem Specialfalle der schiefen Schraubenfläche.

Die Kegelfläche K geht in eine mit der Projectionsebene paral-

lele Ebene über. Diese Ebene schneidet das Hyperboloid H in einem Kreise, in dessen Projection sich auch die Selbstschattencurve dieser Schraubenfläche projicirt.

F. Procházka.

2.

Bemerkung zu einem Satze von Craig.

In Johns Hopkins University Circulars, Baltimore 1882 p. 178. findet sich der folgende interessante Satz ohne Beweis aufgestellt.

„Zieht man parallel allen Hauptnormalen einer geschlossenen Curve vom Mittelpunkte einer Kugel Radien, so teilt die Curve der Endpunkte die Oberfläche in zwei gleiche Teile.“

Da die sphärische Curve geschlossen sein muss um einen Kugelflächenteil zu begrenzen, so setzt der Satz offenbar Stetigkeit der Urcurve mindestens bis auf 2. Ordnung voraus.

Sei, zur Prüfung des Satzes, der Kugelmittelpunkt Anfang der xyz, der Radius $= c$. Dann ist, wenn (xyz) einen Punkt irgend einer geschlossenen sphärischen Curve bezeichnet, und

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tg}\varphi$$

gesetzt wird, der Kugelflächenteil zwischen der Curve und der yz Ebene (Aequator)

$$\Omega = c\int_0^{4k\text{R}} x\,\partial\varphi$$

wo k ganze Zal, und die Flächen auf negativer Seite des Aequators negativ zu rechnen sind.

Bezeichnen fgh, $f'g'h'$, lmn die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale der Urcurve s, dann verlangt nach Substitution von cf', cg', ch' für xyz der Satz, dass

$$\Omega = c^2\int_0^{4k\text{R}} f'\partial\varphi = 0; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{h'}{g'} \tag{1}$$

sei. Aus der letztern Gleichung findet man, wenn $\partial\tau$, $\partial\vartheta$ die Contingenzwinkel der Tangente und Krümmungsaxe bedeuten:

$$\partial\varphi = \frac{g'\partial h' - h'\partial g'}{g'^2 + h'^2} = \frac{g'(n\partial\vartheta - h\partial\tau) - h'(m\partial\vartheta - g\,\partial\tau)}{g'^2 + h'^2}$$

$$= \frac{f\partial\vartheta + l\,\partial\tau}{1 - f'^2}$$

daher

$$f'\partial\varphi = \frac{-f\partial l + l\partial f}{f^2 + l^2} = \partial \operatorname{arctg}\frac{f}{l} \tag{2}$$

und

$$\Omega c^{-2} = 2k_1 R$$

wo die ganze Zahl k_1 zunächst unbekannt bleibt. Ihr Wert hängt von der Anzahl der Vorzeichenwechsel von f und l ab. Da l für sich nur eine gerade Anzahl Wechsel erfahren kann, so muss k_1 gerade sein und sei $= 2k_2$. Dann zeigt die erste Gl. (1), dass (wofern nicht f' constant $= 1$ ist)

$$-k < k_2 < k$$

sein muss. Macht also die Hauptnormale nur einen Umlauf um die x Axe, so dass $k = 1$ wird, so ist $k_2 = 0$ und der Satz richtig.

Gehe ferner μ_1 und ν_1 mal l bei positivem f, μ_2 und ν_2 mal bei negativem f vom $+$ zum $-$ und vom $-$ zum $+$ über, dann ist

$$k_1 = \mu_1 - \nu_1 - \mu_2 + \nu_2$$

Es muss aber sein

$$0 = \mu_1 - \nu_1 + \mu_2 - \nu_2$$

folglich ist

$$k_1 = 2(\mu_1 - \nu_1) = -2(\mu_2 - \nu_2)$$

oder

$$k_2 = \mu_1 - \nu_1 = -(\mu_2 - \nu_2) \tag{3}$$

Da ferner

$$\partial \operatorname{arctg}\frac{f}{l} = -\partial \operatorname{arctg}\frac{l}{f}$$

ist, so lässt sich bei Bestimmung von k_2 auch die Tangente mit der Binormale vertauschen, während k_2 nur sein Vorzeichen wechselt.

Ausreichende und notwendige Bedingung des Satzes ist also, dass der Winkel zwischen der Binormale und einer beliebigen Geraden, in Intervallen wo der Winkel zwischen der Tangente und jener Geraden spitz ist, ebenso oft aus einem spitzen in einen stumpfen übergeht als umgekehrt.

Ist diese Bedingung für eine Gerade erfüllt so ist sie es für jede. Ueberdies ist sie dann mit vertauschten Rollen von Tangente und Binormale erfüllt und umgekehrt.

Gleichwol möchte dieser weitesten Ausdehnung des Satzes eine engere Begrenzung vorzuziehen sein. Er umfasst nämlich auch Fälle, wo zu seiner Verification Flächenstücke auf der einen Seite doppelt, auf der andern negativ gerechnet müssen, und verliert durch diese notwendigen Interpretationen seine Einfachheit. Solche Fälle können indes nur stattfinden, wo die sphärische Curve Doppelpunkte hat. Schliessen wir aber Doppelpunkte aus, so tritt das erstgenannte Kriterium in Kraft; denn dann kann die sphärische Curve einen Punkt der Kugelfläche nur einmal umlaufen. Mit den Doppelpunkten werden dann zugleich die mehrmals durchlaufenen Curven ausgeschlossen, für welche der Satz nie richtig ist. Letzterer würde nun lauten:

Ein Kugelradius in gleicher Richtung mit der Hauptnormale einer geschlossenen und bis auf 2. Ordnung stetigen Curve geführt zeichnet auf der Kugelfläche eine geschlossene Curve, die, wenn sie keine Doppelpunkte hat, die Kugelfläche in zwei gleiche Teile teilt.

Das Vorstehende lässt es ungewiss erscheinen, ob es geschlossene Curven gibt, für welche die Bedingungen des Satzes nicht erfüllt sind, für welche also k_2 nicht null ist. Den einfachsten Beweis für deren Existenz geben aber die Curven cyklischer Torsion *). Denn deren Hauptnormale hat constante Neigung $< R$ gegen eine feste Axe, so dass die sphärische Curve ein nichtgrösster Kreis wird. Ihre specifische Gleichung ist

$$\tau^2 + \vartheta^2 = \cot^2\alpha \quad (\alpha \text{ constant})$$

woraus sich

$$f' = \sin\alpha; \quad \Omega = 4k\mathrm{R}\sin\alpha$$

ergibt. Setzt man $\sin\alpha$ gleich einem rationalen Bruch und s proportional der Krümmungsbreite λ, so schliesst sich die Urcurve stets nach einer Variation von λ um ein Vielfaches von 4R, und k erweist sich als beliebige, durch $\sin\alpha$ darstellbare Zahl. Die Kugelfläche wird beliebig rational geteilt.

Da ein Beispiel zum Beweise genügt, sei

$$\sin\alpha = \tfrac{1}{2}; \quad s = a\lambda$$

dann wird

$$x = -\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\lambda; \quad y = \frac{a}{4}(3\sin\lambda + \tfrac{1}{3}\sin 3\lambda)$$

$$z = -\frac{a}{4}(3\cos\lambda + \tfrac{1}{3}\cos 3\lambda)$$

---

*) Hoppe, Analytische Geometrie §. 60. Grun. Arch. LVI. S. 65.

Diese Curve schliesst sich nach Variation von λ um 4R und hat in diesem Intervalle keinen Doppelpunkt. Ihre Hauptnormale hat die Richtungscosinus:

$$f' = \tfrac{1}{2}; \quad g' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\lambda; \quad h' = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\lambda$$

woraus

$$\varphi = 2\lambda + R$$

daher wird der sphärische Kreis zweimal durchlaufen. Zwischen ihm und dem Aequator liegt die Zone

$$\tfrac{1}{2}\Omega = 2Rc^2 = \frac{c^2}{2}.8R\sin\alpha$$

daher ist $k = 2$. Ferner findet man:

$$f = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\lambda; \quad l = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\lambda$$

woraus man leicht erkennt, dass

$$\mu_1 = 1; \quad \nu_1 = 0; \quad k_2 = 1$$

Demnach wird dio Kugelfläche im Verhältniss 1:3 geteilt, was die Allgemeingültigkeit des Craig'schen Satzes augenfällig widerlegt.

R. Hoppe.

3.

Ein Satz über Determinanten.

Es soll folgender Satz bewiesen werden:

Die Determinante von 4 Determinanten, deren je 2 in einer Reihe stehende nur eine ungleiche Verticalreihe haben, ist gleich dem Product der 2 Determinanten, die man aus den erstern durch die allein noch übrigen Combinationen der 2 ungleichen Reihen erhält.

Bezeichnen wir abkürzend durch $|abef\ldots|$ die Determinante eines Systems, dessen Horizontalreihen aus der Reihe $abef\ldots$ durch Hinzufügung von Indices hervorgehen; so behauptet der Satz, dass

$$\begin{vmatrix} |ace\ldots| & |ade\ldots| \\ |bce\ldots| & |bde\ldots| \end{vmatrix} = |abe\ldots|.|cde\ldots|$$

sei.

Zuerst ist nämlich leicht zu beweisen, dass jeder der 2 Factoren der Rechten Factor der Linken ist. Denn lässt man den Factor $abe \ldots |$ verschwinden, so ist

$$\begin{aligned} a &= b\beta + e\varepsilon + f\zeta + \ldots \\ a_1 &= b_1\beta + e_1\varepsilon + f_1\zeta + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

und nach Einsetzung dieser Werte verschwindet die Linke. Das gleiche gilt vom Factor $| cde \ldots |$.

Ferner ersieht man auch sogleich, dass beide Factoren der Rechten unter einander keinen Factor gemein haben, wenn alle verschieden bezeichnete Elemente unabhängig sind. Denn betrachtet man den erstern und den letztern als lineare Function der Unabhängigen $a, a_1, \ldots,$ bzhw. $c, c_1, \ldots,$ so würde jeder gemeinsame Factor beider gemeinsamer Factor von allen Coefficienten dieser Unabhängigen d. i. von ihren entsprechenden Unterdeterminanten sein müssen. Ein solcher müsste dann irgend welche Elemente beider Systeme enthalten, und diese Elemente müssten in allen Unterdeterminanten vorkommen. Dies ist nicht der Fall; denn jedes Element fehlt in irgend einer Unterdeterminante.

Aus beiden Ergebnissen folgt nun, dass die ganze Rechte. d. i. ein Ausdruck von gleichem Grade mit der Linken, Factor der Linken ist, so dass beide Seiten der Gleichung bis auf einen numerischen Factor gleich sein müssen.

Um letztern zu bestimmen, setze man alle Elemente der Rechten ausser den Diagonalen

$$ab_1e_2 \ldots \quad \text{und} \quad cde_2 \ldots$$

null, dann wird die Linke

$$\begin{vmatrix} 0 & ad_1e_2 \ldots \\ -b_1ce_2 \ldots & 0 \end{vmatrix} = ab_1e_2 \ldots cd_1e_2 \ldots$$

also der Rechten gleich, und der Quotient $= 1$, der Beweis des anfänglichen Satzes folglich vollständig.

R. Hoppe.

4.

Ueber die Grenze der Stabilität eines longitudinal comprimirten geraden elastischen Stabes.

In einem Aufsatze über Biegung prismatischer Stäbe, Poggendorff Ann. CII. S. 227—245, 1857, habe ich (S. 237) bewiesen, dass ein gerader elastischer Stab durch Longitudinalcompression erst dann gebogen werden kann, wenn dieselbe eine gewisse endliche Grenze überschreitet, und diese Grenze bestimmt. Eine abweichende Ansicht war mir damals nicht bekannt. Später bin ich aber wiederholt der auf Rechnung gestützten Ansicht, die ich für die gewöhnliche halten muss, begegnet, dass ein gerader Stab bei der geringsten Compression sich zu biegen anfängt. Der Grund der Abweichung liegt nicht in Principien und Voraussetzungen, sondern in der Rechnung; ihn zu zeigen ist der Zweck des Folgenden.

Unveränderlichkeit des Normalschnitts ist gemeinsame Annahme der beiderseitigen Rechnungen; ihre Zulässigkeit kann wol hier, wo es sich um keine oder eben beginnende Biegung handelt, nicht in Frage kommen. Die Curve der Mittellinie (d. i. Ort des Querschnitts-Schwerpunktes) war eben. Auf beliebige einzelne Punkte derselben wirkten Kräfte in dieser Ebene. Aus der Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten ergaben sich die 2, von den Grenzbedingungen unabhängigen Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(1-\frac{1}{\sigma'}\right)x'+by'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\varrho\sigma'}\right)\right\}=0 \\ \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(1-\frac{1}{\sigma'}\right)y'-bx'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\varrho\sigma'}\right)\right\}=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wo σ den ungespannten, s den actuellen Bogen der Mittellinie bis zum Punkte (xy), der Accent die Differentiation nach s, ϱ den Krümmungsradius von s, f den Querschnitt, bf sein Trägheitsmoment für die Biegungsaxe bezeichnet. Auch diese Gleichungen finden sich noch überall in Uebereinstimmung.

Hier setzt nun die gewöhnliche Rechnung, mit Vernachlässigung höherer Potenzen der Transversalverschiebungen, vor der Integration

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{(wo die } y \text{ transversal gerichtet sind)} \tag{2}$$

und behandelt die Gleichungen als lineare. Lässt man sie aber, indem man sie als genau geltend betrachtet, unverändert, so sind sie ohne alle Vernachlässigung in geschlossener Form integrabel. Das

letztere ist in meiner Rechnung geschehen. Es zeigte sich, dass der Bogen zwischen 2 successiven Angriffspunkten stets ein Stück der Curve eines freien Stabes ist, auf dessen Enden entgegengesetzte Kräfte in der Richtung der Sehne wirken, einer Curve deren Pfeil jede beliebige Grösse haben kann. Die Sehne zur x Axe genommen, ergab sich als Integral der Gl. (1):

$$x = \frac{\sqrt{b}}{2\sin^2\beta}\int\limits_0 \left\{\cos^2\beta - 2z\sin^2\gamma\sin^2\beta - 2(1-z)\sin^2\gamma\right\}\frac{\partial z}{N}$$

$$y = 2\sqrt{b}\,\frac{\sin\gamma}{\sin^2\beta}\sqrt{z}\sqrt{\cos^2\beta - z\sin^2\gamma}$$

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt{b}\int\limits_0 (\cos^2\beta - 2z\sin^2\gamma)\,\frac{\partial z}{N}$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\sqrt{b}\cos 2\gamma\int\limits_0 \frac{\partial z}{N} \tag{3}$$

$$N^2 = z(1-z)(\cos^2\beta - z\sin^2\gamma)(\sin^2\beta - (1-z)\sin^2\gamma)$$

wo z durch Gl. (3) bestimmt wird, und β, γ Integrationsconstanten bedeuten. Die Kräfte sind

$$p = fE\,\frac{\sin^2\beta}{\cos 2\gamma}$$

E Elasticität des Stoffes.

Vermindert man p, bis der Stab gerade wird, so verschwindet mit y die Constante γ, und man hat, wenn der Index 1 sich auf die Mitte der Curve bezieht:

$$x_1 = s_1 = \mathrm{R}\sqrt{b}\cot\beta; \quad y_1 = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{\mathrm{R}\sqrt{b}}{\sin\beta\cos\beta}$$

$$x : s : \sigma = x_1 : s_1 : \sigma_1$$

$$p = fE\sin^2\beta$$

und nach Elimination von β:

$$p = fE\left(1 - \frac{s_1}{\sigma_1}\right) = \frac{\mathrm{R}^2 fEb}{s_1\,\sigma_1} \tag{4}$$

Die Verkürzung

$$2(\sigma_1 - s_1) = \frac{2\mathrm{R}^2 b}{s_1}$$

nahezu $= 2\mathrm{R}^2 b : \sigma_1$ also unabhängig vom Material.

Die so bestimmte endliche Compression ist diejenige, in deren Grenzen die gerade Gestalt des Stabes stabil, eine Biegung unmöglich ist.

Wendet man gegen die Geltung dieses Resultats ein, dass eine Berücksichtigung der höhern Potenzen der Transversalverschiebung illusorisch sei, sofern sie die Grenzen der Elasticitätstheorie übersteige, so kann man aus diesem Gesichtspunkt höchstens die Genauigkeit des gefundenen Stabilitätsintervalls in Zweifel ziehen, nicht aber folgende Consequenzen bestreiten.

Ist das auf die lineare Form der Differentialgleichungen gestützte Ergebniss in Bezug auf Transversalverschiebung, Gestalt der Biegungscurve, Spannung u. s. w. das Aeusserste, was die Elasticitätstheorie zu leisten vermag, so ist die weitere Folgerung auf ein Stabilitätsintervall $= 0$ eine Ueberschreitung ihrer Competenz, weil sich das Resultat als abhängig von den als unbekannt vernachlässigten Elementen erwiesen hat, und ein Rechnungsfehler. Die auf diesem Fehler beruhende gewöhnliche Ansicht hat gegenüber der vorstehenden Aufstellung keinen Anspruch auf Geltung.

Das Vorstehende will ich noch in Vergleich stellen mit dem, was Grasshof in seinem Werke: „Festigkeitslehre 1866“ über den angeregten Punkt sagt. Er nennt gleichfalls die Methode, welche zu einem Stabilitätsintervall $= 0$ führt, die gewöhnliche und erklärt ebenso das irrige Resultat durch die in der Substitution (2) begangene Vernachlässigung. Uebereinstimmend ist auch das durch Berücksichtigung der Differenz von ihm berechnete Stabilitätsintervall (abgesehen von der unmerklichen Abweichung, dass in Gl. (3) s_1^2 statt $s_1 \sigma_1$ steht). Seine Rechnung selbst hingegen ist ganz verschieden: eine genaue Integration vollzieht er nicht, sondern leitet den gesuchten Wert approximativ mit elementaren Mitteln her.

Die Vergleichung liefert mir manche willkommene Rechtfertigung. Zunächst kann ich mich auf Grasshof's weiter reichende Erfahrung berufen, indem ich jene irrige Ansicht die gewöhnliche genannt habe. Ist sie nun 9 Jahre nach ihrer Berichtigung trotzdem die gewöhnliche geblieben, so bürgt nichts dafür, dass sie es nicht auch heute noch ist, und kann die hier behandelte Frage durch ihr Alter nicht gegenstandslos geworden sein.

R. Hoppe.

5.

Zur harmonischen Teilung.

Jakob Steiner stellt (ges. Werke I. 400.) u. A. die Aufgabe: man soll die gegenseitige Lage der 16 (oder 8) Punkte untersuchen, aus welchen sich 4 harmonische Punkte einer Geraden durch ein gegebenes harmonisches Büschel projiciren lassen. Wir werden im folgenden versuchen sie zu erledigen.

Um zunächst zu den 16 Punkten zu gelangen, aus welchen eine harm. Punktreihe $ABCD$ sich durch ein gegebenes harm. Büschel projiciren lässt, haben wir nur über den conjugirten Strecken der Punktreihe Kreise zu beschreiben, welche Winkel fassen, die gleich den Winkeln α, β der conjugirten Strahlen des Büschels sind. Dies gibt 8 Kreise. Jeder Punkt nun, in dem ein den Winkel α fassender Kreis einen den Winkel β fassenden trifft, ist ein Punkt, welcher die erwähnte Eigenschaft besitzt. Dies gibt uns 16 Punkte, welche sich symmetrisch zur Geraden AD verteilen. Sind nun ferner M, N die Halbirungspunkte zu den conjugirten Strecken AC, BD, und ist MN in P, Q so geteilt, dass

$$PM : PN = QM : QN = AC : BD$$

so finden wir ohne Schwierigkeit, dass wenn wir irgend einen der 16 Punkte mit irgend einem der 4 Punkte M, N, P, Q verbinden, diese Verbindungslinie noch durch einen zweiten der 16 Punkte geht. Das gleiche findet statt für den Punkt R, für welchen $RA \,.\, RB = RC \,.\, RD$ ist; jedoch liegen die Punktepare nicht mehr auf derselben Seite von AD.

Ferner finden wir, dass wenn z. B. V und W 2 der 16 Punkte sind, welche auf einer Linie mit einem der 5 Punkte M, N, P, Q, R sich befinden, für diesen Punkt, etwa Q, stets $QV \,.\, QW =$ const ist. Aus letzterem Umstande folgt aber, dass jeder durch V und W und einen dritten der 16 Punkte gelegte Kreis notwendigerweise noch durch einen vierten gehen muss. Berücksichtigen wir dies in Bezug auf 8 auf einer Seite von AD gelegene Punkte, so ergibt sich hieraus mit Hülfe der Punkte M, N, P, Q, dass alle 8 Punkte auf einem Kreise liegen müssen. Fassen wir diese Resultate zusammen, so finden wir folgenden Satz.

Die 16 Punkte, aus welchen eine gegebene harmonische Punktreihe sich durch ein gegebenes harmonisches Büschel projiciren lässt, liegen zu je 8 auf 2 Kreisen; die 8 Punkte eines jeden Kreises

liegen überdies parweise mit jedem der 4 harmonischen Punkte M, N, P, Q auf AD in einer Geraden, und jeder der Punkte des einen Kreises liegt mit einem Punkte des andern und einem festen Punkt R auf AD in einer Geraden.

Betrachten wir ferner die 8 Punkte eines jeden der beiden Kreise, so finden wir, dass wenn wir den Kreis in einem bestimmten Sinne durchlaufen, die Verbindungslinien des 1. und 5ten, 2. und 6ten, 3. und 7ten, 4. und 8ten Punktes sich in einem Punkte, dem Pole der Linie AD in Bezug auf dem Kreis, schneiden. Der 1., 3., 5., 7te und ebenso der 2., 4., 6., 8te Punkt bilden überdies auf den Kreisen harmonische Würfe.

Weingarten, im October 1884.

B. Sporer.

V.

Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten.

Von

Herrn **P. H. Schoute,**

Professor in Groningen.

Erster Abschnitt.

Einleitende Sätze.

1. „Sind CX und CY (Fig. 1.) die Asymptoten und P und Q zwei Punkte einer gleichseitigen Hyperbel, und construirt man auf PQ als Diagonale ein Rechteck, dessen Seiten zu den Asymptoten parallel laufen, so geht die zweite Diagonale RS dieses Rechtecks durch den Mittelpunkt C der Hyperbel. Und haben umgekehrt die Punkte P und Q in Bezug auf die senkrecht auf einander stehenden Geraden CX und CY eine solche Lage, dass die zweite Diagonale des auf PQ mittelst Parallelen zu CX und CY beschriebenen Rechtecks durch C geht, so sind P und Q Punkte einer gleichseitigen Hyperbel mit den Asymptoten CX und CY“.

Dieser Satz, der bei Ersetzung vom Rechteck durch Parallelogramm ganz allgemein für ungleichseitige Hyperbeln gilt, ist überbekannt. Man kann ihn geometrisch beweisen mittelst Anwendung des Pascal'schen Satzes auf das eingeschriebene Sechseck $XXPYYQ$, wenn unter X und Y die unendlich fernen Punkte der Asymptoten verstanden werden.

Zur Abkürzung werde ich die gleichseitige Hyperbel, welche CX und CY zu Asymptoten hat und durch die Punkte P, Q ... hindurch geht, durch das Symbol $H(CX, CY; P, Q \ldots)$ andeuten. Weiter mag das mittelst Parallelen zu CX und CY auf der Sehne PQ als Diagonale beschriebene Rechteck als „das Asymptotenrechteck PQ" der Hyperbel bezeichnet werden. Und endlich werde ich zwei Gerade, die wie die Diagonalen PQ und RS dieses Asymptotenrechtecks nach verschiedenen Seiten mit jeder der Aymptoten gleiche Winkel bilden, in Bezug auf CX und CY „antiparallel" zu einander nennen [1]).

2. „Die Tangente der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P)$ im Punkte P ist antiparallel zu CP in Bezug auf die Asymptoten".

Wenn man den Punkt Q (Fig. 1.) der Hyperbel entlang dem Punkte P fortwährend näher treten lässt, so werden PQ und RS immer antiparallel zu einander bleiben in Bezug auf die Asymtoten, PQ in die Tangente der Hyperbel in P, RS in CP übergeführt werden. Es ist also dieser ebenfalls sehr bekannte Satz eine Folge des Vorhergehenden [2]).

3. „Wenn man (Fig. 2.) die Seiten PR und PS des Asymptotenrechtecks PQ der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P, Q)$ um

1) Wenn man den besonderen Charakter der von den conjugirten Durchmessern der gleichseitigen Hyperbel gebildeten quadratischen Involution, nach welchem die Asymptoten die Teilstrahlen sind von den von irgend einem Paare conjugirter Durchmesser gebildeten Scheitelwinkeln, als bekannt annimmt, so wird oben stehender Satz auch bewiesen mittelst der Bemerkung, dass die Gerade, welche C mit der Mitte der Strecke PQ verbindet, als zu der Sehne PQ conjugirter Durchmesser antiparallel zu PQ ist in Bezug auf die Asymptoten und die deshalb mit der zweiten Diagonale des Asymptotenrechtecks PQ zusammenfällt. Da eine geometrische Behandlung des Lehrstoffes den Pascal'schen Satz unmittelbar an die projectivische Erzeugung der Kegelschnitte festknüpft, so habe ich es vorgezogen, den diesem Satze entnommenen Beweis anzudeuten.

In seiner allgemeinen Form führt der Satz zur Construction einer Hyperbel, von welcher drei Punkte und die Richtungen der Asymptoten gegeben sind („Leçons de géométrie analytique" de Briot et Bouquet, dixième édition. livre 3, chapitre 9, exercice 4 et livre 3, chap. 3, exerc. 14).

2) Auch dieser Satz folgt aus dem besonderen Charakter der von den conjugirten Durchmessern gebildeten Involution. Nach diesem wird auch die Verbindungslinie der Mitten zweier einander unter einem gegebenen Winkel schneidenden Sehnen der gleichseitigen Hyperbel aus dem Mittelpunkte dieser Curve immer unter dem nämlichen Winkel gesehen („Traité de géométrie analytique" de Piquet, tome I, § 167, exercice 8).

ihre eigene Länge bis in T und U verlängert, die neuen Endpunkte T und U mit C verbindet und die Schnittpunkte V und W von CT mit SQ und von CU mit RQ bestimmt, so hat man in V und W zwei Punkte der Tangente in P an $H(CX, CY; P, Q)$ erhalten. Und umgekehrt liegt Q auf der Hyperbel $H(CX, CY; P)$ und ist PVW die Tangente dieser Curve in P, wenn die auf der angegebenen Weise aus P, Q und den senkrecht auf einander stehenden Geraden CX und CY hervorgehenden Punkte V und W auf einer durch P gehenden Gerade liegen".

Ist Q ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P)$, so geht nach Artikel 1. die wegen der Umkehrung des Satzes in der Figur nicht angegebene zweite Diagonale RS des Asymptotenrechtecks PQ durch C. Wird nun CP von den Seiten QS und QR in V_1 und W_1 getroffen, so folgt aus $PR = RT$ und $PS = SU$ unmittelbar $V_1S = SV$ und $W_1R = RW$. Und diese Relationen zeigen, dass PV und PW nach Artikel 2. mit der Tangente der Hyperbel in P zusammenfallen.

Ist umgekehrt wol bekannt, dass die auf die angegebene Weise aus P, Q, CX, CY abgeleiteten Punkte V, W mit P in einer Geraden liegen, nicht aber dass Q ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P)$ und PVW die Tangente dieser Curve in P ist, so kann man wie folgt verfahren. Die Geraden VU und TW sind parallel, da sie wegen der Relationen $PS = SU$ und $PR = RT$ antiparallel zu PVW sind in Bezug auf die Asymptoten. Deshalb ist $CU : CW = CV : CT$ und da auch $CV : CT = CV_1 : CP$ ist, so ergiebt sich $CU : CW = CV_1 : CP$, d. h. die Geraden UV_1 und WP sind parallel. Also ist das Viereck $PVUV_1$ und ebenso das Viereck W_1TWP eine Raute; ausserdem sind diese Vierecke ähnlich und ähnlich liegend mit dem Punkte C als Aehnlichkeitspunkt und liegen deshalb ihre einander entsprechenden Mittelpunkte R und S mit C in einer Geraden, d. h. es geht die gleichseitige Hyperbel $H(CX, CY; P)$ nach Artikel 1. durch Q. Offenbar sind dann endlich auch die Geraden CP und PVW antiparallel in Bezug auf die Asymptoten und ist PVW also die Tangente der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P, Q)$ in P.

Mit dem Auge auf Artikel 2. brauche ich kaum hervorzuheben, dass ich mit dem Satze dieses Artikels nicht die Anweisung einer Construction der Tangente in einem Punkte der gleichseitigen Hyperbel beabsichtige. Vielmehr wird er uns im Folgenden die Erkennung einer bestimmten Geraden als Tangente einer bestimmten gleichseitigen Hyperbel in einem bestimmten Punkte erleichtern [3]).

---

3) Man vergleiche den dritten Abschnitt, Artikel 31.

4. „Eine gleichseitige Hyperbel ist für irgend eins ihrer Paare von einander gegenüberliegenden Punkten P_1, P_2 (Fig. 3.) der Ort der Punkte P, für welche die Geraden PP_1 und PP_2 antiparallel sind in Bezug auf die Asymptoten".

Da die Büschel der in Bezug auf die zwei einander senkrecht schneidenden Geraden CX und CY antiparallel zu einander durch P_1 und P_2 gelegten Geraden P_1P und P_2P projectivisch sind, so ist der Ort der Punkte P ein durch P_1 und P_2 gehender Kegelschnitt. Ist P_1P zu CX, resp. CY parallel, so ist P_2P es auch; also ist der erzeugte Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel mit zu CX und CY parallelen Asymptoten. Endlich sind die Tangenten dieser Curve in den Punkten P_1 und P_2 beide antiparallel zu P_1P_2, also zu einander parallel, d. h. der Mittelpunkt C der Strecke P_1P_2 ist Mittelpunkt der Curve, und diese Curve also auch die gleichseitige Hyperbel $H(CX, CY; P_1, P_2)$ [4]).

5. „Bewegen die Geraden PQ und RS sich antiparallel zu einander in Bezug auf irgend eine feste Gerade CV, und ist dies mit den Geraden PQ und TU in Bezug auf irgend eine andere feste Gerade CW der Fall, so ist der von RS und TU gebildete Winkel von unveränderlicher Grösse.

Sind PQ und RS antiparallel in Bezug auf die Asymptoten, PQ und TU antiparallel in Bezug auf die Achsen einer gleichseitigen Hyperbel, so stehen RS und TU auf einander senkrecht".

Lassen wir im ersten Teil des Satzes an die Stelle der gegebenen Geraden PQ, RS, TU ihre durch den Schnittpunkt C von CV und CW (Fig. 4.) geführte Parallelen CL, CM, CN treten, so ist Wkl. $MCL = 2$ Wkl. VCL und Wkl. $NCL = 2$ Wkl. WCL,

---

4) Die Bemerkung, dass die Verbindungslinien P_1P und P_2P von P_1 und P_2 mit irgend einem Punkte P der Curve $H(CX, CY; P_1, P_2)$ supplementäre Sehnen dieser Curve sind, wenn P_1 und P_2 einander diametral gegenüberliegen, führt in Verbindung mit dem besonderen Charakter der Involution der conjugirten Durchmesser ebenfalls zum Beweise des Satzes, welcher in dem bekannten mechanischen Probleme der Laterne, die mittelst eines über zwei nicht eben hoch liegende Punkte gespannten Seils gehoben wird, eine illustrirte Einkleidung gefunden hat. Da der geometrische Weg eher zum oben gegebenen Beweise führt, habe ich diesen vorgezogen.

Man vergleiche „Jacob Steiner's gesammelte Werke", erster Band, Seite 442, Satz 18, links b)

also nach Subtraction auch Wkl. $MCN = 2$ Wkl. VCW[5]). Und im zweiten Teile des Satzes ist Wkl. $VCW = 45^0$, also Wkl. $MCN = 90^0$.

6. „Die vier Schnittpunkte eines Kreises mit irgend einem Kegelschnitte K liegen dreimal auf zwei in Bezug auf die Achsen von K zu einander antiparallelen Geraden.

Der Krümmungskreis irgend eines Punktes P (Fig. 5.) einer gleichseitigen Hyperbel bestimmt in dieser Curve eine zum Durchmesser CP des Punktes P senkrechte Sehne PQ. Diese Bemerkung führt zu einer einfachen Construction des Krümmungskreises, indem der Krümmungsmittelpunkt M_p und C das eine Paar und P und die Mitte M von PQ das andere Paar Gegenecken eines Parallelogrammes bilden [6])".

Den bekannten ersten Teil des Satzes beweist man geometrisch am leichtesten mittelst der von den beiden Curven auf der unendlich fernen Gerade g_∞ bestimmten Involution. Man erblickt nämlich unmittelbar, dass die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Achsen von K die Doppelpunkte dieser Involution sind. Denn diese Doppelpunkte sind erstens auf g_∞ harmonisch getrennt von den unendlich fernen Punkten von K, also auf g_∞ conjugirte Punkte in Bezug auf K, d. h. Schnittpunkte von g_∞ mit conjugirten Durchmessern von K. Aber ebenso sind die Doppelpunkte zweitens Schnittpunkte von g_∞ mit conjugirten Durchmessern des Kreises, d. h. die Doppelpunkte liegen in auf einander senkrecht stehenden Richtungen auf g_∞, sind also die unendlich fernen Punkte der senkrecht auf einander stehenden Durchmesser, der Achsen von K. Und hieraus folgt dann weiter, dass jeder Kegelschnitt des von K und dem Kreise gebildeten Büschels g_∞ in zwei Punkten schneidet, deren Verbindungslinie mit irgend einem Punkte im Endlichen in Bezug auf die Achsen von K zu einander antiparallel sind; was dann auch gilt für die drei in Geradenpaare zerfallenden Kegelschnitte des Büschels [7]).

---

5) Hieraus folgt auch, dass die zwei Durchmesser von irgend zwei gleichseitigen Hyperbeln, welche einer nämlichen Richtung conjugirt sind, einander unter einem nicht von dieser Richtung abhangenden Winkel schneiden (Picquet a. a. O., tome I, § 167, exercice 9).

6) Schon als ich diese Construction längst gefunden hatte, bemerkte ich, dass sie vorkommt in A. Milinowski's „Elementar-synthetische Geometrie der gleichseitigen Hyperbel", Seite 55, Artikel 84.

7) Der analytische Beweis des Satzes folgt aus der Bemerkung, dass die Gleichung $F \equiv \varphi + k\psi = 0$ der Kegelschnitte durch die Schnittpunkte des gegebenen Mittelpunktskegelschnittes $\varphi \equiv Ax^2 + By^2 + C = 0$ mit irgend

Nach dem nun bewiesenen ersten Teile des Satzes ist die Sehne PQ, welche der Krümmungskreis im Punkte P von irgend einem Kegelschnitte in dieser Curve bestimmt, antiparallel zu der Tangente in P in Bezug auf die Achsen des Kegelschnittes, was dann auch schon Steiner zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes verwendet hat [8]). Aber bei der gleichseitigen Hyperbel führt die Anwendung des zweiten Teiles des vorhergehenden Satzes auf die oben angedeutete Lage der Sehne PQ. Ist nun weiter M die Mitte von PQ, so ist CM als zu der Sehne PQ conjugirter Durchmesser antiparallel zu PQ in Bezug auf die Asymptoten und also auch, da CP auf PQ senkrecht steht, antiparallel zu CP in Bezug auf die Achsen. Ebenso ist CP antiparallel zu der Normale PM_p in Bezug auf die Achsen, da CP antiparallel ist zu der Tangente in P in Bezug auf die Asymptoten. Also sind CM und PM_p beide antiparallel zu CP in Bezug auf die Achsen und deshalb zu einander parallel. Da nun der Punkt M_p offenbar der Schnittpunkt ist von der Normale PM_p mit der in M auf PQ errichteten Senkrechten MM_p, so ist ebenfalls CP zu MM_p parallel und $PCMM_p$ ein Parallelogramm.

Ist nun von H ausser den Asymptoten nur der Punkt P gegeben, so findet man den Krümmungsmittelpunkt folgendermaassen. Man errichtet in P eine Senkrechte auf die Verbindungslinie von P mit C, sucht die Mitte M der von den Asymptoten auf dieser Senkrechten bestimmten Strecke P_xP_y und macht die Strecke MM_p gleich und parallel zu CP.

Die von Steiner gegebene Construction des Krümmungsmittelpunktes wird illusorisch, wenn P einer der Scheitel der gleichseitigen

---

einem Kreise $\psi = x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$ offenbar kein Glied xy enthält. Denn wenn die das Glied xy nicht enthaltende Gleichung $F = 0$ in die Gleichungen $m_1x + n_1y + p_1 = 0$ und $m_2x + n_2y + p_2 = 0$ zerfällt, hat man $m_1n_2 + m_2n_1 = 0$, d. h. die beiden Geraden $mx + ny + p = 0$ sind antiparallel in Bezug auf die Achsen.

Einen anderen Beweis giebt Salmon („A treatise on conic sections", sixth edition, Art. 244).

Aus dieser Quelle fliesst auch die Lösung des Problemes, welches aussagt, dass die Teilstrahlenpaare der von den Gegenseitenpaaren eines Kreisvierecks gebildeten Scheitelwinkel drei zu drei parallel sind (Briot et Bouquet a. a. O., livre 2, chapitre 3, exercice 17, oder in der ursprünglichen Fassung: Steiner, a. a. O., erster Band, Seite 128, Satz 7).

Man vergleiche auch „Die Geometrie der Lage" von Dr. Th. Reye, 2te Auflage, 1. Abteilung, Seite 184, Aufgabe 119.

8) Steiner, a. a. O., zweiter Band, Seite 17, Satz 6).

Hyperbel ist. Für diesen Fall ergibt meine Construction, dass der Krümmungsradius dem Radius Vector CP gleich ist.

Durch irgend einen Punkt Q von H gehen drei ihrer Krümmungskreise. Denn der auf CQ als Durchmesser beschriebene Kreis schneidet H ausser Q noch in drei Punkten.

7. „Die Betrachtung der Ellipse als Projection des Kreises und der ungleichseitigen Hyperbel als Projection der gleichseitigen Hyperbel führt zur Kenntniss der Krümmungshalbmesser des Mittelpunktskegelschnittes in seinen Scheiteln".

Ist E (Fig. 6.) die gegebene Ellipse, Kr der über ihrer grossen Achse AB als Durchmesser beschriebene Kreis, sind P_e und P_k einander entsprechende sich in P auf AB projicirende Punkte dieser Curven und schneidet der durch P_e gelegte Kreis, welcher E in A berührt, die Achse zum zweiten Male in Q, so hat man $AP.PQ = PP_e^2$ und $AP.PB = PP_k^2$, also durch Division, wenn a und b wie gewöhnlich die Halbachsen von E andeuten, $\frac{PQ}{PB} = \frac{b^2}{a^2}$. Ersetzt man nun die Punkte P_e und P_k durch einander entsprechende Punkte von E und Kr, deren gemeinsame Projection P dem Scheitel A immer näher rückt, so findet man an der Grenze für den Krümmungshalbmesser R_a der Ellipse E in A den Wert $\frac{b^2}{a}$. Ebenso findet man mittelst des auf der kleinen Achse von E als Durchmesser beschriebenen Kreises, wobei man allerdings den Kreis als die Projection der Ellipse zu betrachten hat, für den Krümmungshalbmesser R_b der Ellipse in den Endpunkten der kleinen Achse den Wert $\frac{a^2}{b}$.

Für die reellen Scheitel der Hyperbel findet man mittelst der Bemerkung am Schlusse des vorhergehenden Artikels auf ganz gleiche Weise die Relation $R_a = \frac{b^2}{a}$. Dabei hat man die ungleichseitige Hyperbel als Projection der gleichseitigen Hyperbel mit gleicher reellen Achse zu betrachten oder umgekehrt die gleichseitige Hyperbel als Projection der ungleichseitigen, je nachdem diese letztere Curve innerhalb der scharfen oder innerhalb der stumpfen Scheitelwinkel ihrer Asymptoten enthalten ist [9]).

---

9) Einen mehr allgemeinen Satz findet man schon in Dupin's „Développements de géométrie" (page 29).

8. „Die Fusspunkte der Normalen, welche man von einem gegebenen Punkte P auf einen gegebenen Mittelpunktskegelschnitt K fällen kann, sind die Schnittpunkte von K mit einer durch P, die unendlich fernen Punkte A und B der Achsen von K und den Mittelpunkt C von K gehenden gleichseitigen Hyperbel. Und umgekehrt schneidet jede gleichseitige Hyperbel durch A, B, C den gegebenen Kegelschnitt K in vier Punkten, wofür die auf K errichteten Normalen durch einen Punkt gehen".

Dieser dem Apollonius von Perga (247 v. Chr.) zugeschriebene Satz wird leicht geometrisch bewiesen. Ist nämlich PQ (Fig. 7.) irgend eine Gerade durch P und CQ der Durchmesser von K, welcher in K dem senkrecht auf PQ stehenden Durchmesser conjugirt ist, so bilden die Strahlen PQ und CQ zwei projectivische Büschel, und ist der Ort des Schnittpunktes Q von PQ und CQ also ein durch P und C gehender Kegelschnitt, der, wie man unmittelbar erblickt, auch durch die unendlich fernen Punkte A und B geht. Diese Curve ist also eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten zu den Achsen von K parallel sind. Und die Schnittpunkte dieser Curve mit K sind offenbar die Fusspunkte der von P an K möglichen Tangenten [10]).

Umgekehrt schneidet jede gleichseitige Hyperbel durch A, B, C die gegebene Curve K in vier Punkten, wofür die auf K errichteten Normalen durch einen Punkt gehen. Ist nämlich P der Schnittpunkt der Normalen an K in zwei der vier Schnittpunkte von K mit dieser gleichseitigen Hyperbel, so hat die dem Punkte P zukommende Hyperbel des Apollonius schon fünf Punkte mit der angenommenen gleichseitigen Hyperbel gemein, und fallen also die beiden Curven zusammen [11]).

---

10) Eine merkwürdige Ableitung dieser Hyperbel gab Poncelet („Traité des propriétés projectives des figures", 2me édition, tome I, art. 492).

Jede Hyperbel des Apollonius ist dem uneigentlichen Poldreieck ABC von K umgeschrieben und enthält also die Eckpunkte einer einfach unendlichen Anzahl von Poldreiecken von K (Reye, a. a. O., 1. Abteilung, Seite 122; Picquet, a. a. O., tome I, § 209—216). Die Seiten dieser Poldreiecke umhüllen eine Parabel, die Polarfigur der Hyperbel von Apollonius in Bezug auf K („Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte" von A. Milinowski, Sätze und Aufgaben, Nr. 90—95).

11) Die den verschiedenen Punkten P der Ebene zukommenden Hyperbeln des Apollonius bilden ein Netz mit drei Basispunkten, den Punkten A, B, C. Dieses Netz ist bekanntlich zum ebenen Systeme der Punkte P projectivisch, und es ändert sich und seine Verwandtschaft zum ebenen Systeme der Punkte

9. „Die Punkte Q einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel H mit dem Mittelpunkte C (Fig. 8.), für deren jeden die Tangente q zu der durch einen gegebenen Punkt P geführten Geraden QP antiparallel ist in Bezug auf irgend einen Durchmesser CR, sind die Schnittpunkte von H mit einem durch C und P gehenden Kreise. Und umgekehrt schneidet jeder durch C gehende Kreis die Curve H in vier Punkten Q, für welche die zu den Tangenten q in Bezug auf CR antiparallel durch Q gelegten Geraden durch einen bestimmten Punkt dieses Kreises gehen".

Sind CX und CY (Fig. 9.) die Asymptoten der gegebenen gleichseitigen Hyperbel H, ist P der gegebene Punkt und CR der gegebene Durchmesser, so suchen wir den Ort des Schnittpunktes Q von jeder durch P gehenden Geraden PQ mit dem Durchmesser CQ von H, welcher dem zu PQ in Bezug auf CR antiparallelen Durchmesser CS von H conjugirt ist. Nun findet man leicht, dass der Winkel PQC constant ist, denn da PQ und CS antiparallel sind in Bezug auf CR, CS und CQ antiparallel sind in Bezug auf CX, so ist nach Artikel 5. immer Wkl. $PQC = 2$ Wkl. RCX. Also ist der Ort der Punkte Q ein durch C und P gehender Kreis [12]). Da nun die Schnittpunkte von H mit diesem Kreise nach der Entstehungsweise von diesen offenbar die in dem Satze angedeuteten Punkte Q sind, und umgekehrt jeder Punkt Q des Satzes dem gefundenen Kreise angehören muss, ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Und die Umkehrung wird ganz so behandelt wie jene des vorhergehenden Satzes [13]).

Zur Abkürzung nennen wir die durch den Punkt Q von H (Fig. 8.) in Bezug auf CR zu der Tangente q von H in Q antiparallele Gerade QP die „Anti-Normale" von H in Q für CR. Und die Curve, welche von dieser Anti-Normale eingehüllt wird, wenn Q die gleichseitige Hyperbel H durchläuft, möge hiermit in Uebereinstimmung die „Anti-Evolute" von H für CR heissen [14]). Diese Anti-

---

P nicht, wenn man die Achsen von K in dem nämlichen Maasse vergrössert oder verkleinert. Man vergleiche Steiner's Abhandlung „Ueber algebraische Curven und Flächen", a. a. O., zweiter Band, Seite 627).

12) Wenn man auf das Zeichen der Winkel achtet, so sieht man unmittelbar, dass die an verschiedenen Seiten von CP liegenden Kreissegmente, welche man erhält, wirklich einen Vollkreis bilden.

13) Die den verschiedenen Punkten P der Ebene zukommenden Kreise bilden ebenfalls ein dem ebenen Systeme der Punkte P projectivisches Netz, das sich und seine Verwandtschaft zu diesem ebenen Systeme nicht ändert, wenn man die gleichseitige Hyperbel H vom Centrum C aus in irgend einem Maasse vergrössert oder verkleinert.

14) Obgleich diese Anti-Normale und Anti-Evolute einen besonderen Fall

Evoluten können nach Artikel 5. offenbar auch betrachtet werden als die Einhüllenden der Geraden, welche die centralen Radien Vectoren von den Punkten von H in diesen Punkten unter bestimmten und im bestimmten Sinne gezählten Winkeln schneiden.

10. „Die Anti-Evoluten von H in Bezug auf ihre verschiedenen Durchmesser CR sind concentrische und einander ähnliche Curven".

Ist CR (Fig. 10.) irgend ein Durchmesser und CD eine Achse von H, sind Q und Q' zwei an einander grenzende Punkte dieser Curve, QR_1 und $Q'R_1$ die Anti-Normalen von H in Q und Q' für CR, und sind QD_1 und $Q'D_1$ die Anti-Normalen von H in Q und Q' für CD, so liegen einerseits die Punkte C, Q, Q', R_1 auf einem Kreise, da Wkl. $R_1QC =$ Wkl. $R_1Q'C (= 2$ Wkl. $RCX)$ ist, und andererseits die Punkte C, Q, Q', D_1, da Wkl. $D_1QC =$ Wkl. $D_1Q'C (= 2$ Wkl. $DCX)$ recht ist. Beim Grenzübergange des Zusammenfallens der Punkte Q und Q' liegen also die dem Punkte Q von H entsprechenden Punkte R_1 und D_1 der Anti-Evoluten für CR und CD so auf einem durch C und Q die H in Q berührenden Kreise, dass die Kreisbögen CR_1 und CD_1 in Graden fortwährend die nämlichen Werte beibehalten, wenn Q sich der H entlang bewegt; denn man findet unmittelbar Bog. $CR_1 = 4$ Wkl. RCX und Bog. $CD_1 = 4$ Wkl. $DCX = 180^0$ Und hieraus folgt, dass die Anti-Evolute für CR aus jener für CD abgeleitet wird, indem man diese letztere um C über einen Winkel $= 2\ DCR$ dreht und zur selben Zeit ihre von C ausgehenden Radien Vectoren durch Multiplication mit $\cos 2$ Wkl. DCR verkleinert [15]).

Die Anti-Evolute von H in Bezug auf die Achse CD ist nach ihrer Entstehungsweise die erste negative Fusspunktencurve von H in Bezug auf den Centrum C. Also ist die Anti-Evolute von H in Bezug auf CR die erste negative Fusspunktencurve von der gleichseitigen Hyperbel, die man durch Drehung von H um C über den Winkel $= 2\ DCR$ und Verkleinerung der Durchmesser mittelst Multiplication mit $\cos 2$ Wkl. DCR erhält ebenfalls in Bezug auf das Centrum C.

---

bilden von der Quasi-Normale und Quasi-Evolute („Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven" von G. Salmon, deutsch von Dr. W. Fiedler, 2te Auflage, Art. 10b), so achte ich mich der Merkwürdigkeit des besonderen Falles wegen doch berechtigt einen neuen Namen einzuführen.

15) Ueber die Anwendung dieser Multiplication vergleiche man Julius Petersen's in fast alle modernen Sprachen übersetztes Werkchen „Methoden und Theorien".

Der Kürze wegen deuten wir im Folgenden die Curve, welche aus einer gegebenen Mittelpunktscurve Φ durch Drehung um den Mittelpunkt im Sinne der Uhrbewegung über den Winkel α und Multiplication der centralen Radien Vectoren mit m abgeleitet wird, mittelst des Symboles $\Phi(\alpha, m)$ an. Es ist dann die so eben gefundene gleichseitige Hyperbel als $H(2 \text{ Wkl. } DCR, \cos 2 \text{ Wkl. } DCR)$ zu bezeichnen.

Die Anti-Evolute von H in Bezug auf die Achsen ist in Fig. 11. vorgestellt; sie hat in der Richtung von jeder der beiden Asymptoten von H einen parabolischen Ast von besonderer Beschaffenheit; wir kommen im folgenden Abschnitte auf diese merkwürdige Curve zurück [16].

11. „Ersetzt man eine ungerade Anzahl der Schnittpunkte von einem Mittelpunktskegelschnitte K mit irgend einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten zu den Achsen von K parallel sind, durch die ihnen in K diametral gegenüber liegenden Punkte, so erhält man vier Punkte eines Kreises.

Ersetzt man eine ungerade Anzahl der Schnittpunkte von einer gleichseitigen Hyperbel H mit irgend einem Kreise durch die ihnen in H diametral gegenüber liegenden Punkte, so erhält man vier Punkte, die so mit einander zusammenhangen, dass jeder von ihnen der Höhenschnittpunkt ist des von den drei anderen bestimmten Dreiecks".

Ist von den vier Fusspunkten N_1, N_2, N_3, N_4 (Fig. 12.) der aus irgend einem unbekannten Punkte auf K zu fällenden Normalen nur die Verbindungslinie p von zwei aus ihnen gegében, so findet man, nach den schönen Untersuchungen Joachimsthals [17]), die Verbindungslinie p' der beiden anderen, wenn man zum Pole P von p für K den in Bezug auf das Centrum C symmetrisch liegenden Punkt P_1' bestimmt und die senkrechten Projectionen dieses Punktes auf die Achsen von K mit einander verbindet. Dabei ist dann die supplementäre Sehne $N_1'N_2$ von N_1N_2 parallel zu $P_1'C$, also antiparallel zu N_3N_4

---

16) Mit Verweisung auf Artikel 27. bemerke ich hier nur noch, dass die in den Richtungen der Asymptoten von H liegenden Berührungspunkte der unendlich fernen Geraden mit der Anti-Evolute Rückkehrpunkte dieser Curve sind, was sich dadurch verrät, dass die beiden einer nämlichen Asymptote von H zukommenden Aeste in entgegengesetzten Richtungen in's Unendliche verschwinden.

17) „Ueber die Normalen der Ellipse und des Ellipsoids" (Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Band XXVI, Seite 172).

in Bezug auf die Achsen von K, und sind deshalb die Punkte N_1', N_2, N_3, N_4 nach Artikel 6. vier Punkte eines Kreises. Und dies bleibt offenbar der Fall, wenn man noch zwei der Punkte N_2, N_3, N_4 durch die ihnen diametral gegenüber liegenden Punkte von K ersetzt.

Dieser bekannte Joachimsthal'sche Satz ist aber einer Erweiterung fähig. Was nach dem Obigen von den vier Schnittpunkten des Mittelpunktskegelschnittes K mit irgend einer seiner Hyperbeln des Apollonius gilt, das kann auch von den vier Schnittpunkten von K mit irgend einer wohl durch die unendlich fernen Endpunkte A und B der Achsen von K, nicht aber durch das Centrum C von K gehenden gleichseitigen Hyperbel behauptet werden. Zum Beweise dieser Verallgemeinerung bemerke ich, dass die gleichseitigen Hyperbeln des von den Punkten A, B, N_3, N_4 als Basispunkte bestimmten Büschels in K eine quadratische Involution von Punkten N_1, N_2 einschneiden, welche auch von den parallelen Strahlen eines Strahlenbüschels mit unendlich fernem Scheitel getragen wird. Indem nämlich jede quadratische Involution auf K von einem Strahlenbüschel erzeugt werden kann, so enthält dieser Büschel in unserem Falle die unendlich ferne Gerade, da diese mit der Geraden N_3N_4 eine Curve des Büschels bildet. Es führt also die Ersetzung der durch N_3 und N_4 bestimmten Hyperbel des Apollonius durch irgend eine Curve des von A, B, N_3, N_4 bestimmten Büschels nur zu einer parallelen Verschiebung der Geraden p und also auch nur zu einer parallelen Verschiebung der Geraden $N_1'N_2$, was nach Artikel 6. die Lage der vier Punkte N auf einem Kreise nicht aufhebt.

Sind weiter N_1, N_2, N_3, N_4 (Fig. 13.) die Schnittpunkte der gegebenen gleichseitigen Hyperbel H mit irgend einem Kreise, so sind die Sehnen N_1N_2 und N_3N_4 nach Artikel 6. antiparallel in Bezug auf die Achsen von H und ist dies mit den supplementären Sehnen N_1N_2 und $N_1'N_2$ nach Artikel 4. in Bezug auf die Asymptoten von H der Fall. Also sind nach Artikel 5. die Sehnen $N_1'N_2$ und N_3N_4 zu einander senkrecht. Und da dies von den Sehnenpaaren $N_1'N_3$ und N_2N_4, $N_1'N_4$ und N_2N_3 ebenso bewiesen werden kann, haben die vier Punkte N_1', N_2, N_3, N_4 die im Satze angegebene merkwürdige Lage.

12. „Wenn eine gleichseitige Hyperbel einem Dreieck umgeschrieben ist, so geht sie auch durch den Schnittpunkt seiner Höhen. Ist das Dreieck rechtwinklig, so berühren also die umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln im Eckpunkte des rechten Winkels alle die von diesem Punkte auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte".

Dieser bekannte Satz [18]) ist eine unmittelbare Folge des zweiten Teiles des vorhergehenden. Es liegt nämlich in Fig. 13.) der dem Punkte N_1 der gleichseitigen Hyperbel H diametral gegenüber liegende Punkt N_1' ebenfalls auf H, und dieser Punkt ist der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks $N_2N_3N_4$.

Beiläufig bemerke ich, dass diese Betrachtungen für den Ort der Mittelpunkte der einem Dreieck umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln den Neunpunktskreis dieses Dreiecks liefern.

13. „Die Polarfigur einer gleichseitigen Hyperbel H in Bezug auf irgend eine andere concentrische gleichseitige Hyperbel H_1 ist wieder eine concentrische gleichseitige Hyperbel H_2. Die reelle Achse von H_2 ist antiparallel zu der reellen Achse von H in Bezug auf die Achsen von H_1, und ihre Grösse a_2 ist an jene a und a_1 der reellen Achsen von H und H_1 gebunden durch die Gleichung $aa_2 = a_1^2$. Ist $H_1 = H(\alpha, m)$, so ist $H_2 = H_1(\alpha, m) = H(2\alpha, m^2)$. Und bei diesem Uebergange von H zu H_2 mittelst Drehung und Multiplication entspricht dem Berührungspunkte irgend einer Tangente von H wirklich der auf H_2 liegende Pol dieser Tangente in Bezug auf H_1.

Nimmt man bei einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel H noch die beiden Curven an, in welche H übergeht, wenn man sie in positivem und negativem Sinne um ihr Centrum C um den Winkel von 60^0 dreht, so erhält man drei Curven, die zu einander in der besonderen Beziehung stehen, dass jede von ihnen in Bezug auf irgend eine der beiden übrigen die Polarfigur der dritten ist [19])".

Ist die Polarfigur eines Kegelschnittes K in Bezug auf einen anderen Kegelschnitt K_1 im Allgemeinen wieder ein Kegelschnitt K_2 [20]), so folgt hier aus radialer Symmetrie in Bezug auf das gemeinschaftliche Centrum C von H und H_1 (Fig. 14.), dass die Polarfigur ein mit H und H_1 concentrischer Kegelschnitt ist. Nun sind aber die Asymptoten CX und CY von H in Bezug auf H_1 die Polaren der unendlich fernen Punkte dieser Polarfigur, d. h. CX und CY sind in Bezug auf H_1 die den Asymptoten der Polarfigur conjugirten Durchmesser. Also sind die Asymptoten der gesuchten Curve

---

18) Man vergleiche Reye, a. a. O., 1. Abteilung, Seite 183, Aufgabe 113 und Salmon's „Conics", Artikel 228, Problem 1 und Artikel 315, Problem 2.

19) Einen analytischen Beweis dieses Satzes enthält meine „Notiz über die Lemniskate" (Sitzungsberichte d. k. Akad. der Wissensch. zu Wien, Band LXXXIX, 2te Abteilung, Seite 1264).

20) Reye, a. a. O., 1. Abteilung, Seite 82.

in Bezug auf die Asymptoten CX_1 und CY_1 von H_1 antiparallel zu CX und CY und stehen sie deshalb auch senkrecht auf einander, d. h. die gesuchte Curve ist ebenfalls eine gleichseitige Hyperbel H_2. Und dann sind auch die Achsen von H_2 antiparallel zu den Achsen von H in Bezug auf die Achsen von H_1.

Ist P ein Scheitel von H, also $CP = a$ und p seine Polare in Bezug auf H_1, so erkennt man, dass (nach Artikel 5.) p senkrecht steht auf der Achse CD_2 von H_2; denn CD, die den Scheitel P enthaltende Achse von H, ist antiparallel zu p in Bezug auf die Asymptoten von H_1 und CD und CD_2 sind es in Bezug auf die Achsen von H_1. Also ist p eine Scheiteltangente von H_2, der Schnittpunkt P_2 von CD_2 und p ein Scheitel von H_2 und $CP_2 = a_2$. Hieraus folgt im Vorübergehen, dass die Achse von H_2, welche antiparallel ist zu der reellen Achse CD von H in Bezug auf die Achsen von H_1, ihre reelle Achse ist. Ist weiter Q einer der beiden Schnittpunkte von CD mit H_1 und P' der Schnittpunkt von CD mit p, so ist $CP.CP' = CQ^2$; denn die in Bezug auf H_1 zu einander conjugirten Punkte P, P' gehören einer auf CD liegenden Involution an, welche C zum Centralpunkte und Q zu einem der Doppelpunkte hat. Aber wenn Q_0 der Schnittpunkt ist von CD_2 mit der zu p parallelen Tangente q von H_1 in Q, so hat man auch $CP_2 : CP' = CQ_0 : CQ$ und diese Proportion giebt mit der angeführten Gleichung unmittelbar die Relation $CP.CP_2 = CQ.CQ_0$. Sind nun endlich Q_x und Q_y die Schnittpunkte von q mit den Asymptoten CX_1 und CY_1 von H_1, so hat man nach einander $CQ.CQ_0 = QQ_x.CQ_0 = \frac{1}{2}CQ_x.CQ_y$ und deshalb, da nach einem bekannten Satze der gleichseitigen Hyperbel [21]) $\frac{1}{2}CQ_x.CQ_y = a_1^2$ ist, auch $aa_2 = a_1^2$ [22]).

Ist $H_1 = H(\alpha, m)$, so ist deshalb $\alpha =$ Wkl. DCD_1 und $m = \frac{a_1}{a}$.

Aber wir finden Wkl. $D_2CD_1 =$ Wkl. DCD_1 und $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1}{a}$; also ist $H_2 = H_1(\alpha, m) = H(2\alpha, m^2)$. Und hierbei ist es, wie der Satz oben angiebt, bemerkenswert, dass der Uebergang von H zu H_2 durch Drehung und Multiplication ein beliebig auf H gewählter Punkt R von H (Fig. 15.) in den Punkt R_2 von H_2 überführt, dessen Polare in Bezug auf H_1 die Tangente von H in R ist. Ist nämlich r die Tangente von H in R und R_2 der Pol von r in Bezug auf H_1, so ist die Tangente r antiparallel zu CR in Bezug auf CY und zu CR_2

---

21) Reye, a. a. O., 1. Abteilung, Seite 94.

22) Aus diesen metrischen Relationen beweist man ohne Mühe, dass die gleichseitige Hyperbel, wie Herr Brocard mir brieflich mitteilte, ihre eigene Polarfigur ist in Bezug auf den sie doppelt berührenden concentrischen Kreis.

in Bezug auf CY_1; also ist nach Artikel 5. der Winkel $RCR_2 =$ 2 Wkl. $YCY_1 = 2\alpha$, u. s. w. [23]).

Der zweite Teil des Satzes ist eine unmittelbare Folge des ersten.

14. „Wenn man von den zwei Curven C_1^n und C_2^n, welche man mittelst Drehung einer gegebenen Curve C^n um irgend einen Punkt M in positivem und negativem Sinne um den Winkel von 60^0 erhält, jene Elemente einander entsprechen lässt, welche sich aus einem nämlichen Elemente von C^n entwickelt haben, so ist die Enveloppe der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte von C_1^n und C_2^n die von M aus halbirte erste negative Fusspunktencurve von C^n für M und der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Tangenten von C_1^n und C_2^n die von M aus verdoppelte erste positive Fusspunktencurve von C^n für M."

Ist in Fig. (16.) der Punkt M der Drehpunkt, und sind P, P_1, P_2 entsprechende Punkte der drei Curven C^n, C_1^n, C_2^n, so steht die Verbindungslinie P_1P_2 in der Mitte von MP auf MP senkrecht, was den ersten Teil des Satzes beweiset. Sind weiter p, p_1, p_2 die entsprechenden Tangenten der Curven in diesen Punkten, und bezeichnet man den Schnittpunkt von p mit MP_1 als Q, von p_1 mit MP_2 als Q_1 und von p_2 mit MP als Q_2, so ist Wkl. $MP_1Q_1 =$ Wkl. MP_2Q_2. Deshalb liegt der Schnittpunkt P' von p_1 und p_2, dessen Ort wir in dem zweiten Teil des Satzes angegeben haben, auf dem durch M, P_1 und P_2 gehenden Kreise, ist der Winkel $P_1P'P_2$ als das Supplement vom Winkel $P_2MP_1 = 60^0$ und wird von der durch die Mitte M des Kreisbogens P_2MP_1 gehenden Gerade $P'M$ halbirt. Aber da P offenbar der Mittelpunkt des durch M, P_1, P_2 und P' gehenden Kreises ist, und p mit p_1 und p_2 ein gleichseitiges Dreieck bildet, so steht p in der Mitte Q' von MP' auf MP' senkrecht, und ist hiermit der zweite Teil des Satzes bewiesen.

Ist C^n die gleichseitige Hyperbel von Artikel 13. und sind also C_1^n und C_2^n die dort auftretenden Curven H_1 und H_2, so ist die

---

23) Wenn H durch den Scheitel P_1 von H_1 geht, so geht H_1 aus Aehnlichkeitsgründen durch den Scheitel P_2 von H_2 und berührt nach der letzten Bemerkung des Textes die Scheiteltangente von H, welche dem Punkte P zukommt, ebenfalls die H_2 in P_2. Also ist der Ort der Scheitel P von den gleichseitigen Hyperbeln H mit einem gemeinschaftlichen Durchmesser P_1P_1' als die erste positive Fusspunktencurve der gleichseitigen Hyperbel H_1 für ihren Mittelpunkt C eine Lemniskate (Steiner, a. a. O., zweiter Band, Seite 414).

Enveloppe der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte von H_1 und H_2 als die von M aus halbirte erste negative Fusspunktencurve von H für M die von C aus halbirte Curve von Fig. 11., also die Anti-Evolute von der von C aus halbirten gleichseitigen Hyperbel H in Bezug auf die Achsen. Und der Ort des Schnittpunktes der entsprechenden Tangenten von H_1 und H_2 ist als die von M aus verdoppelte erste positive Fusspunktencurve von H für M, d. h. als die erste positive Fusspunktencurve der von M aus verdoppelten gleichseitigen Hyperbel H für M eine Lemniskate von leicht angeblicher Lage.

Ersetzt man den Winkel von 60^0 durch irgend einen Winkel α, so wird die Enveloppe die aus M mit $\cos\alpha$ multiplicirte erste negative und der Ort die aus M mit $\sec\alpha$ multiplicirte erste positive Fusspunktencurve von C^n für M. Indem dieses Resultat für die Enveloppe unmittelbar einleuchtet, findet man in Bezug auf den Ort, dass $MP_2P'P_1$ wie oben ein Kreisviereck ist und der Winkel $P_1P'P_2$ von $180^0-2\alpha$ durch MP' gehälftet wird. Deutet man dann weiter Wkl. $MPQ =$ Wkl. $MP_1Q_1 =$ Wkl. MP_2Q_2 durch β an, so hat man Wkl. $MQP = 180^0-(\alpha+\beta)$ und Wkl. $Q'MP = (\alpha+\beta)-90^0$, und steht also QQ' senkrecht auf MP'. Und endlich folgt aus den Relationen $MQ' = MQ\sin(\alpha+\beta)$ und $MP'\cos\alpha = MQ\sin(\alpha+\beta)$ noch $MQ'\sec\alpha = MP'$ [24]).

24) Für die Anwendung des zweiten Teiles dieses allgemeineren Satzes auf den Fall einer gleichseitigen Hyperbel vergleiche man meine „Notiz über die Lemniskate" (a. a. O., Seite 1265).

VI.

Erweiterung des Aoust'schen Problems der Curventheorie.

Von

R. Hoppe.

Die in Rede stehende, zuerst von Aoust untersuchte und in T. LXVI. S. 386. von mir aufs neue behandelte und gelöste Aufgabe ist: Eine Curve derart zu finden, dass die Einhüllende der Krümmungsaxe der Einhüllenden ihrer Krümmungsaxe der Urcurve congruent sei.

Die Einhüllende der Krümmungsaxe ist nur eine unter den abgeleiteten Curven, die zum System der Tangente, Haupt- und Binormale einer Urcurve in definirter Beziehung stehen. Man würde also auch Curven von andrer Beziehung, z. B. die Evolvente, in die Aufgabe einführen können. Doch verspricht es wol bessern Erfolg, wenn wir die Beziehung sogleich allgemein auffassen. Die Bedingung bleibe dieselbe: die zweite Ableitung soll der Urcurve congruent sein; dagegen behalten wir uns die Entscheidung vor, ob sie durch die Urcurve, wie vorhin, oder durch die Beziehung erfüllt werden soll, was auf den Anfang der Untersuchung keinen Einfluss hat.

Die Bezeichnungen seien dieselben wie in der citirten Abhandlung: es bedeuten fgh, $f'g'h'$, lmn die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale, $\partial\tau$ und $\partial\vartheta$ die Contingenzwinkel der consecutiven Tangenten und Krümmungsaxen, s den Bogen der Curve, der Accent bezeichne die Differentiation nach τ, die Indices an obigen Buchstaben unterscheiden die Zugehörigkeit zu verschiedenen Curven.

Ist nun der die Curve s_1 erzeugende Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ relativ zum begleitenden Axensystem (Tangente, Hauptnormale, Binormale) der

Curve s bestimmt, so sind die Relationen der Coordinaten in der Form gegeben:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + pf + qf' + rl \\ y_1 &= y + pg + qg' + rm \\ z_1 &= z + ph + qh' + rn \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hieraus gehen die Relationen der Richtungscosinus der begleitenden Axen hervor:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= af + bf' + cl;\; g_1 = ag + \dots \\ f_1' &= a_1f + b_1f' + c_1l;\; g_1' = a_1g + \dots \\ l_1 &= a_2f + b_2f' + c_2l;\; m_1' = a_2g + \dots \end{aligned}\right\} \text{etc. mit gleichen Coefficienten.} \quad (2)$$

und zugleich das Bogenelement ∂s_1 und die Contingenzwinkel $\partial\tau_1, \partial\vartheta_1$.

Ueber das Bogenelement ∂s_1 kann man, wie ich in meiner Curventheorie gezeigt habe, noch beliebig verfügen und die Coordinaten $x_1 y_1 z_1$ dadurch berechnen, nachdem alle Grössen, die keine Linearausdehnung enthalten, der Aufgabe gemäss bestimmt sind. Daher würde jeder andre Weg unnötige Complicationen schaffen als der, welcher von der Gl. (2) ausgeht und erst nach deren Erledigung die Lineargrössen zuzieht.

In den Gl. (1)(2) sind alle Grössen als Functionen einer Variabeln anzusehen (ohne constante Werte auszuschliessen).

Wir nennen nun die Darstellung einer Curve s_1, die gemäss den Gl. (1) oder (2) in Beziehung zur Curve s steht, eine **Ableitung** von derselben nach einem durch die Coefficienten ausgedrückten **Princip**.

Diese Erklärung lässt indes noch zweierlei Auffassung zu. Sind alle Grössen Functionen eines Parameters φ, so kann man φ entweder zum Princip oder zur Curve rechnen. Der Unterschied zeigt sich, wenn man von verschiedenen Curven nach demselben Princip ableiten will. Im ersten Fall bleiben a, b, c immer dieselben Functionen von φ, während τ, ϑ in andre Functionen von φ übergehen. Im letztern Falle muss nicht nur φ mit Veränderung der Curve mit verändert werden, sondern es müssen auch a, b, c derart definirt sein, dass die veränderte Abhängigkeit vom veränderten Parameter substituirt werden kann. Sei z. B. τ selbst Parameter,

$$\vartheta = \vartheta(\tau);\; a = a(\tau, \vartheta(\tau));\; \text{etc.}$$

dann wird bei Anwendung desselben Princips auf eine neue Curve im ersten Falle

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(\tau_1);\ \tau_1 = \tau_1(\tau);\ a = a(\tau,\ \vartheta(\tau));\ \text{etc.}$$

im letztern

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(\tau_1);\ \tau_1 = \tau_1(\tau);\ a = a(\tau_1,\ \vartheta_1(\tau_1));\ \text{etc.}$$

Dementsprechend hat insbesondere die Widerholung einer Ableitung verschiedenen Sinn, und die zu untersuchende Aufgabe ist im zweiten Falle eine andre als im ersten.

Das Folgende behandelt nur die Aufgabe im erstern Sinne, d. i. die leichtere. Es werden bei Ableitung erst von s, dann von s_1 aus die a, b, c als dieselben Functionen vom ursprünglichen τ betrachtet.

§. 2. Bestimmung der Richtungen.

Nehmen wir an, dass die zweite Ableitung von s nicht nur congruent, sondern auch von gleicher Stellung mit s sei, so sind in den entsprechenden Punkten die begleitenden Axen beider Curven gleichgerichtet, und man hat:

$$\left.\begin{aligned} f &= af_1 + bf_1' + cl_1 \\ f' &= a_1f_1 + b_1f_1' + c_1l_1 \\ l &= a_2f_1 + b_2f_1' + c_2l_1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dies verglichen mit dem System (2) gibt als ausreichende Bedingungen:

$$b_2 = c_1;\quad c = a_2;\quad a_1 = b \tag{4}$$

Die erste gibt:

$$c_1 = \begin{vmatrix} c\,c_1 \\ a\,a_1 \end{vmatrix}$$

das ist

$$ca_1 = (1+a)\,c_1 \tag{5}$$

Das Product der zwei letzten gibt:

$$\begin{aligned} ca_1 = \begin{vmatrix} b\,b_1 \\ c\,c_1 \end{vmatrix} b &= b^2c_1 - bcb_1 \\ &= (1-a^2-c^2)\,c_1 + c(aa_1+cc_1) \\ &= (1-a^2)\,c_1 + aca_1 \end{aligned}$$

das ist

$$(1-a)\,[ca_1 - (1+a)\,c_1] = 0$$

eine Gleichung, die schon durch (5) erfüllt ist. Ferner gibt die Quadratsumme der 2 letzten Gl. (4):

$$b^2 + c^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2$$

Beide Seiten sind bedingungslos $= 1-a^2$, folglich sind alle 3 Bedingungen erfüllt, wenn es die erste ist.

Sei nun

$$a = \cos 2\alpha; \quad b = \sin 2\alpha \cos\beta; \quad c = \sin 2\alpha \sin\beta \tag{6}$$

also

$$f_1 = f\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\,(f'\cos\beta + l\sin\beta) \tag{7}$$

Dies differentiirt gibt nach Vergleichung der 2 Ausdrücke von f_1'

$$\left.\begin{aligned}
a_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau} &= -\sin 2\alpha\,(2\alpha' + \cos\beta) \\
b_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau} &= \cos 2\alpha\cos\beta\,(2\alpha' + \cos\beta) - \sin\beta\,[(\beta' + \vartheta')\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\sin\beta] \\
c_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau} &= \cos 2\alpha\sin\beta\,(2\alpha' + \cos\beta) + \cos\beta\,[(\beta' + \vartheta')\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\sin\beta]
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Nach Einsetzung dieser Werte wird Gl. (5):

$$\begin{aligned}
0 &= 2\cos^2\alpha\,\{\sin\beta\,(2\alpha' + \cos\beta) + \cos\beta\,[(\beta' + \vartheta')\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\sin\beta]\} \\
&= 4\cos^2\alpha\,\{\alpha'\sin\beta + \sin\alpha\,[(\beta' + \vartheta')\cos\alpha + \sin\alpha\sin\beta]\cos\beta\}
\end{aligned}$$

Die eine Lösung ist $\cos\alpha = 0$. Hier ist

$$f_1 = -f; \quad f_1' = \mp f'; \quad l_1 = \pm l; \quad \tau_1 = \pm\tau$$

die andre erfordert die Integration der Gleichung:

$$\partial\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\,[\partial(\beta + \vartheta)\cos\alpha + \partial\tau\sin\alpha\sin\beta] = 0 \tag{9}$$

Wird nun für gegebenes Ableitungsprincip die Curve gesucht, so hat man:

$$\partial\vartheta = -\partial\beta - \partial\tau\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\beta - \frac{\partial\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\alpha\cos\alpha} \tag{10}$$

wo α und β in τ gegeben sind. Durch ϑ als Function von τ ist die Curvenclasse bestimmt, doch hängt ihre Darstellung von der Integration einer linearen Gleichung 2. Ordnung ab, ist daher im allgemeinen nicht ausführbar.

Ferner gibt es einzelne Werte von α, β, welche die Gleichung unabhängig von ϑ erfüllen, so dass die Curve willkürlich bleibt. Hiervon später.

Sucht man hingegen das Ableitungsprincip für beliebig gegebene Curve, also für gegebene Relation zwischen τ und ϑ, so ist Gl. (9) linear in $\cot\alpha$, und man findet:

$$\cot\alpha = -\frac{1}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial\vartheta}\right)^2}}\int\frac{\partial k}{\vartheta'}; \quad \cot\beta = -\frac{\partial k}{k\,\partial\vartheta} \tag{11}$$

wo k willkürliche Function von τ oder ϑ ist.

Eliminirt man jetzt $\beta'+\vartheta'$ mittelst der Gl. (10), so werden die Gl. (8), deren Quadratsumme den Wert von $\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau}$ ergibt;

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sin 2\alpha\cos\beta \\ b_1 &= 2\sin^2\alpha\cos^2\beta-1 \\ c_1 &= 2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$-\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau}=\frac{2\alpha'}{\cos\beta}+1 \qquad (13)$$

woraus in Verbindung mit den Gl. (6):

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \sin 2\alpha\sin\beta \\ b_2 &= 2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta \\ c_2 &= 2\sin^2\alpha\sin^2\beta-1 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Differentiirt man die dritte Gl. (2), so erhält man, analog (8):

$$\begin{aligned} -a_1\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\tau} &= a_2'-b_2 \\ &= 2\alpha'\cos 2\alpha\sin\beta+\beta'\sin 2\alpha\cos\beta-2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta \end{aligned}$$

woraus:

$$\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\tau}=-2\alpha'\cot 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta-\beta'+\mathrm{tg}\,\alpha\sin\beta \qquad (15)$$

das ist nach Gl. (10)

$$\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\tau}=\vartheta'+2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta(\alpha'+\cos\beta) \qquad (16)$$

§. 3. Bestimmung der Lineargrössen.

Damit die neue Ableitung von s_1 nach dem Princip (1) der Urcurve s congruent und von gleicher Stellung mit ihr sei, muss sein

$$x+\mathrm{const}=x_1+pf_1+qf_1'+rl_1;\ \text{etc.} \qquad (17)$$

Differentiirt man die Gl. (1) und (17) und vergleicht die Coefficienten bzhw. von f, f', l und f_1, f_1', l_1, so ergeben sich die 6 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a\partial s_1 &= \partial s+\partial p-q\partial\tau \\ b\partial s_1 &= \partial q+p\partial\tau-r\partial\vartheta \\ c\partial s_1 &= \partial r+q\partial\vartheta \\ \partial s_1 &= a\partial s-\partial p+q\partial\tau_1 \\ 0 &= b\partial s-\partial q-p\partial\tau_1+r\partial\vartheta_1 \\ 0 &= c\partial s-\partial r-q\partial\vartheta_1 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

woraus durch Elimination von ∂p, ∂q, ∂r:

$$\left.\begin{aligned}(1+a)(\partial s_1-\partial s) &= q(\partial\tau_1-\partial\tau)\\ b(\partial s_1-\partial s) &= -p(\partial\tau_1-\partial\tau)+r(\partial\vartheta_1-\partial\vartheta)\\ c(\partial s_1-\partial s) &= -q(\partial\vartheta_1-\partial\vartheta)\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Eliminirt man q, so kommt:

$$\frac{\partial\vartheta_1-\partial\vartheta}{\partial\tau_1-\partial\tau}=-\frac{c}{1+a} \tag{20}$$

wie auch Gl. (13) und (16) ergeben. Eliminirt man die Differentiale, so erhält man:

$$(1+a)p+bq+cr=0 \tag{21}$$

Die Gl. (18) lassen sich jetzt vertreten durch die 3 letzten derselben und die Gl. (19); letztere wieder durch

$$\partial s_1=\partial s+q\frac{\partial\tau_1-\partial\tau}{1+a} \tag{22}$$

und durch die Gl. (20) (21). Eliminirt man noch ∂s_1, so hat man im ganzen die 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}-(1-a)\partial s &= \partial p-q\frac{a\partial\tau_1+\partial\tau}{1+a}\\ b\,\partial s &= \partial q+p\,\partial\tau_1-r\partial\vartheta_1\\ c\,\partial s &= \partial r+q\partial\vartheta_1\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

woraus, nach Multiplication mit $1+a$, b, c und Addition:

$$0=(1+a)\partial p+b\partial q+c\partial r+bp\partial\tau_1-q(a\partial\tau_1+\partial\tau-c\partial\vartheta_1)-br\partial\vartheta_1$$

das ist nach Gl. (21)

$$p\partial a+q\partial b+r\partial c=bp\partial\tau_1-q(a\partial\tau_1+\partial\tau-c\partial\vartheta_1)-br\partial\vartheta_1$$

Diese Gleichung zeigt sich nach Einführung der Werte (6) (13) (15) für a, b, c, $\partial\tau_1$, $\partial\vartheta_1$ identisch mit (21), folglich ist jede der Gl. (23) eine Folge der beiden andern. Durch Verbindung der 2 letzten erhält man:

$$\begin{aligned}(1-a^2)\partial s &= \partial(bq+cr)+bp\partial\tau_1+(cq-br)\partial\vartheta_1-q\partial b-r\partial c\\ 0 &= \partial(cq-br)+cp\partial\tau_1-(bq+cr)\partial\vartheta_1-q\partial c+r\partial b\end{aligned}$$

Führt man die Werte (6) ein und setzt

$$q=u\cos\beta-v\sin\beta;\qquad r=u\sin\beta+v\cos\beta \tag{24}$$

so werden die beiden Gleichungen:

$$\partial s \sin 2\alpha = \partial u - u \partial \tau_1 \operatorname{tg} \alpha \cos \beta - v(\partial \vartheta_1 + \partial \beta)$$
$$0 = \partial v \,.\, \sin 2\alpha + u[2\partial \tau_1 \sin^2 \alpha \sin \beta + (\partial \vartheta_1 + \partial \beta) \sin 2\alpha]$$

und nach Substitution der Werte (13) (15) von $\partial \tau_1$ und $\partial \vartheta_1$:

$$\partial s \sin 2\alpha = \partial u + u \operatorname{tg} \alpha (2\partial \alpha + \partial \tau \cos \beta) + v\left(\frac{2\partial \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} 2\alpha} - \partial \tau \operatorname{tg} \alpha \sin \beta\right) \quad (25)$$

$$0 = \partial v \,.\, \sin 2\alpha - 2u \partial \alpha \operatorname{tg} \beta \quad (26)$$

Ist nun ∂s gegeben, so findet man zuerst v durch Integration der linearen Gleichung 2. Ordnung, welche aus der Elimination von u hervorgeht, und dann u, hieraus q und r nach (24), dann p vermittelst der Gl. (21), d. i.

$$p \cos \alpha + (q \cos \beta + r \sin \beta) \sin \alpha \quad (27)$$

mithin das Ableitungsprincip aus gegebener Urcurve.

Da sich jedoch die verlangte Integration nicht allgemein ausführen lässt, so bleibt uns allein folgende Aufgabe als allgemein lösbar übrig.

Es sind die Richtungsgrössen einer Curve f, g, h gegeben, man soll deren Bogen und das Ableitungsprincip finden, nach dessen zweimaliger Anwendung eine der Urcurve congruente Curve entsteht.

Die Lösung enthält 2 willkürliche Functionen k und v. Aus f, g, h findet man zuerst τ und ϑ. Als Parameter, d. h. unabhängige Variabeln, mit dessen Variation die Urcurve s erzeugt wird, sei τ angenommen. Nach den Gl. (11) ergeben sich α und β. Aus α, β, v ergibt sich nach (26)

$$u = \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\sin 2\alpha}{2 \operatorname{tg} \beta}$$

Die Gl. (24) (21) ergeben p, q, r, und ∂s findet man in Gl. (25), dann ∂s_1 in Gl. (19) dargestellt. Ausserdem sind f_1, g_1, h_1 durch Gl. (2) bekannt, woraus die Werte

$$x_1 = \int f_1 \partial s_1, \quad y_1 = \int g_1 \partial s_1, \quad z_1 = \int h_1 \partial s_1$$

hervorgehen.

§. 4. Beispiele.

Gl. (9) wird unabhängig von ϑ erfüllt, wenn α constant, und $\cos \beta = 0$ ist, ferner für $\sin \alpha = 0$. Hier haben die Gl. (13) (16) keine Gültigkeit.

Im Falle $\sin \alpha = 0$ wird $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, und die Richtungsgrössen von s und s_1 einander gleich. Da alsdann auch $\partial \tau_1 = \partial \tau$

wird, so muss nach der ersten Gl. (9) $\partial s_1 = \partial s$ sein, mithin beide Curven identisch werden. Eine Ableitung ist nicht möglich.

Für den Fall $\cos\alpha = 0$, wo β willkürlich ist, braucht man nur $\cos\beta = 0$ zu setzen; dann ist er auch in dem erst genannten Falle enthalten. Man findet dann:

$$f_1 = -f; \quad f_1' = -f'; \quad l_1 = l$$
$$\partial\tau_1 = \partial\tau; \qquad \partial\vartheta_1 = -\partial\vartheta$$

und nach Einsetzung der Werte $a = -1$, $b = c = 0$ in die Gl. (19):

$$q = 0; \qquad r = 0$$

dann nach der zweiten Gl. (18) auch $p = 0$. Auch hier sind die Curven s und s_1 congruent.

Sei α constant, $\beta = R$, also

$$\begin{aligned} f_1 &= f\cos 2\alpha + l\sin 2\alpha \\ f_1' &= -f' \\ l_1 &= f\sin 2\alpha - l\cos 2\alpha \\ \tau_1 &= -\tau\cos 2\alpha + \vartheta\sin 2\alpha \\ \vartheta_1 &= \tau\sin 2\alpha + \vartheta\cos 2\alpha \end{aligned}$$

Hier zeigt sich die Abweichung von den Gl. (13) (16).

Die Gl. (19), deren erste und dritte übereinstimmen, geben:

$$\left.\begin{aligned} \partial s_1 - \partial s &= q(\partial\vartheta\,\mathrm{tg}\,\alpha - \partial\tau) \\ 0 &= (p\cos\alpha + r\sin\alpha)(\partial\vartheta\,\mathrm{tg}\,\alpha - \partial\tau) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Entweder ist also

$$\vartheta' = \cot\alpha; \qquad \partial s_1 = \partial s$$

oder

$$p\cos\alpha + r\sin\alpha = 0 \tag{29}$$

Nimmt man hierzu die 3 letzten Gl. (18), und eliminirt p und ∂s_1, so werden die 4. und 6te identisch, und es bleibt:

$$\partial s\sin 2\alpha = \partial r + q(\partial\tau\sin 2\alpha + \partial\vartheta\cos 2\alpha) \tag{30}$$
$$\partial q = r(\partial\tau\,\mathrm{tg}\,\alpha + \partial\vartheta) \tag{31}$$

Setzt man

$$\eta = \tau\sin\alpha + \vartheta\cos\alpha$$

so wird

$$r = \frac{\partial q}{\partial\eta}\cos\alpha \tag{32}$$

$$\frac{\partial s}{\partial\eta}\sin 2\alpha = \frac{\partial^2 q}{\partial\eta^2}\cos\alpha + q\left(\frac{\partial\tau}{\partial\eta}\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\right) \tag{33}$$

Letztere Gleichung ist unter andern integrabel für Urcurven constanter Steigung, wo

$$\frac{\vartheta}{\tau} = \operatorname{tg}\lambda$$

constant ist. Hier wird

$$\tau = \sigma\cos\lambda;\quad \vartheta = \sigma\sin\lambda;\quad \eta = \sigma\sin(\lambda+\alpha)$$

und die Gleichung (30) lautet:

$$2\frac{\partial s}{\partial\sigma}\sin\alpha\sin(\lambda+\alpha) = \frac{\partial^2 q}{\partial\sigma^2} + \mu^2 q \tag{34}$$

wo

$$\mu^2 = \frac{\sin(\lambda+\alpha)\sin(\lambda+2\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\lambda+3\alpha)}{2\cos\alpha}$$

Ihr Integral ist

$$q = \frac{2}{\mu}\sin\alpha\sin(\lambda+\alpha)(\sin\mu\sigma\int\partial s\cos\mu\sigma - \cos\mu\sigma\int\partial s\sin\mu\sigma)$$

daher erhält man nach Gl. (32) (29):

$$r = 2\sin\alpha\cos\alpha(\cos\mu\sigma\int\partial s\cos\mu\sigma + \sin\mu\sigma\int\partial s\sin\mu\sigma)$$
$$p = -2\sin^2\alpha(\cos\mu\sigma\int\partial s\cos\mu\sigma + \sin\mu\sigma\int\partial s\sin\mu\sigma)$$

Die Gleichungen der Urcurve sind:*)

$$x = s\sin\lambda;\quad y = \cos\lambda\int\partial s\cos\sigma;\quad z = \cos\lambda\int\partial s\sin\sigma$$

Zufolge den Gl. (1) sind dann nach Einsetzung der bekannten Werte die Gleichungen der ersten Ableitung:

$$x_1 = s\sin\lambda + 2M\sin\alpha\cos(\lambda+\alpha)$$

$$y_1 = \cos\lambda\int\partial s\cos\sigma - 2\sin\alpha\sin(\lambda+\alpha)(M\sin\sigma + \frac{N}{\mu}\sin\sigma)$$

$$z_1 = \cos\lambda\int\partial s\sin\sigma - 2\sin\alpha\sin(\lambda+\alpha)(M\sin\sigma - \frac{N}{\mu}\cos\sigma)$$

wo

$$M = \cos\mu\sigma\int\partial s\cos\mu\sigma + \sin\mu\sigma\int\partial s\sin\mu\sigma$$
$$N = \sin\mu\sigma\int\partial s\cos\mu\sigma - \cos\mu\sigma\int\partial s\sin\mu\sigma$$

Statt die Urcurve zu specialisiren, kann man die Gl. (30) (31) auch dadurch lösen, dass man q als willkürlich betrachtet und ∂s resultiren lässt. Es sind dann nur f, g, h beliebig gegeben, und man findet unendlich' viele, sämtlich derselben Classe angehörige, nur durch die Dimensionen verschiedene Urcurven nebst entsprechenden Ableitungsprincipen.

*) T. LVI. S. 63. Hoppe, Curventheorie S. 72.

VII.

Transformationen der elliptischen Integrale und Functionen in Verbindung mit der Theorie der Kettenlinie.

Von

Emil Oekinghaus.

Erster und zweiter Teil.

Die von Abel und Jacobi in die Mathematik eingeführten elliptischen Functionen und deren Reihenentwickelungen scheinen in analytischer Hinsicht zwar zu einem gewissen Abschluss gelangt zu sein, so dass es schwer sein dürfte, auf diesem so viel durchforschten Gebiete noch etwas Nennenswertes zu Tage zu fördern; dagegen ist wohl bisher unbemerkt geblieben, dass auch nach geometrischer Richtung hin diesen Functionen und Reihen eine nicht geringe Bedeutung zukommt, welche die Theorie derselben in neuem Lichte erscheinen lässt.

Es ist eine zunächst durch den Kreis vermittelte zum Zweck einer geometrischen Darstellung dieser Functionen eingeführte Transformation, welche in allen auf Reihenentwickelungen bezüglichen Untersuchungen sich als eine überaus reiche Quelle neuer wertvoller Relationen zeigt und aus dem Grunde zu fast unerschöpflichen Neubildungen Veranlassung gibt, weil jede transformirte Reihe einer mehrfachen Transformation unterworfen werden kann. Bei der Ableitung einer grossen Zahl elliptischer Functionen treten einzelne Reihen von so rascher Convergenz auf, dass mehrere derselben einfachen geschlossenen Ausdrücken gleich gesetzt werden können, und ferner führt die Specialisirung verschiedener dieser Formen zu neuen Sätzen der höheren Arithmetik, worunter einer eine Verallgemeinerung

eines von Jacobi unter ähnlichen Verhältnissen gefundenen Satzes zu enthalten scheint.

Die eigentliche Bedeutung der Transformation besteht aber darin, dass dieselbe mit der Kettenlinie in einigen Zusammenhang tritt, indem nicht blos sämmtliche Eigenschaften letzterer formell in Reihenform sich darstellen lassen, sondern auch die Curve selbst wieder zum Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen benutzt werden kann. Durch diese Verbindung der Analysis mit der Geometrie zugleich unter Anwendung der Differentiation und Integration werden neue analytische Verhältnisse geometrischer Natur gewonnen und auch teilweise vermittelst einer dynamischen Betrachtung und Einkleidung in mechanischem Sinne gedeutet. Auch haben wir zur Berechnung der unvollständigen elliptischen Integrale der 1. und 2. Art neue Reihenentwickelungen abgeleitet, deren Convergenz wohl nichts zu wünschen übrig lässt. Die Methode des Imaginairen konnte ebenfalls mit Erfolg verwertet werden, wodurch die bekannteren elliptischen Functionen zu neuen Darstellungen gelangten.

Ebenso wichtig wie merkwürdig ist die Art, wie der irreductible Fall der kubischen Gleichungen in Verbindung mit der Kettenlinie und der Theorie der elliptischen Functionen auftritt und damit eine bestimmte Verwandtschaft dieser Curve mit der von uns früher in anderm Sinne behandelten Lemniskate und gleichseitigen Hyperbel documentirt. Indem wir nun nach dieser Richtung hin die Eigenschaften der Lemniskate weiter untersuchten, resultirte eine ganze Classe neuer eigenartiger Gleichungen, von denen die genannten Fälle der Gleichungen 3. Grades die untere Grenze bilden, während die allgemeine Lösung der diesen verwandten höheren Gleichungen vermittelst der Curve in einer der Cardanischen entsprechenden Formel auf das einfachste und eleganteste vermittelt wird.

Zum Schluss haben wir noch eine geometrische Darstellung von Wurzelausdrücken aus den Eigenschaften der Kettenlinie abgeleitet, die sich durch Leichtigkeit und Einfachheit empfiehlt.

Erster Teil.

I.

Wir geben zunächst die geometrischen Relationen für diejenigen Verhältnisse, welche aus den verschiedenen Lagen einer um einen festen Punkt drehbaren Geraden zu einem Kreise hervorgehen. Die Entfernung dieses Punktes vom Centrum sei R, der Radius a. Die Gerade schneide den Kreis in 2 Punkten, welche mit dem Centrum

O verbunden die Centriwinkel $2\varphi_1$ und $2\varphi_2$ bestimmen. Den 2. Schnittpunkt der Centrale RO (Fig. 1.) verbinden wir mit den genannten Punkten P_1 und P_2 durch Sehnen, welche verlängert mit der Secante RP_2P_1 die Winkel φ_2 und φ_1 bez. einschliessen, endlich bezeichnen wir noch den Steigungswinkel der Geraden zur Centrale mit $\tau = 90^0 - \alpha$. Demnach hat man, wenn die Strecken RP_1 und RP_2 bezüglich x_1 und x_2 genannt werden $x_1 + x_2 = R\cos\tau$ und $x_1x_2 = R^2 - a^2$ aber auch die quadratische Gleichung

$$1)\qquad x^2 - 2R\cos\tau \,.\, x + R^2 - a^2 = 0$$

Die Gleichung für $\operatorname{tg}\varphi$, welche leicht abzuleiten ist, wird dargestellt durch

$$2)\qquad \operatorname{tg}\varphi^2 - \frac{2a}{R-a}\cot\tau \,.\, \operatorname{tg}\varphi + \frac{R+a}{R-a} = 0$$

Da wir noch die Formen $\sin\varphi_1 \sin\varphi_2$ und $\cos\varphi_1 \cos\varphi_2$ nötig haben, so bemerken wir, dass dieselben aus der Gleichung

$$2)_*\qquad \operatorname{tg}\varphi^2 - A\operatorname{tg}\varphi + B = 0$$

leicht berechnet werden können, man findet

$$3)\quad \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + (1-b)^2}}, \quad \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (1-b)^2}}$$

Wir setzen nun für die nachfolgenden Untersuchungen fest, dass die Winkel $\varphi_1 \varphi_2$ die Amplituden zweier elliptischen Integrale der ersten Art seien, deren Argumente einer Bedingungsgleichung genügen, die wir wie folgt ableiten.

Das Additionstheorem der elliptischen Integrale 1. Art basirt auf der Bedingungsgleichung

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \triangle(\varphi) = \cos\varphi$$

die wir nach Potenzen von φ als Amplitude eines analogen Integrals entwickeln und für welche demnach die Beziehungen 3) aus der Gleichung 2) zu berechnen sind.

Man findet nach einigen Entwickelungen schliesslich

$$4)\quad \cos\varphi^2\left(\frac{a^2}{\sin\tau^2} - z^2\frac{(R+a)^2}{4}\right) - a\frac{(R-a)}{\sin\tau}\cos\varphi + z^2\frac{(R+a)^2}{4} - Ra = 0$$

deren Wurzeln zwei Amplituden und also auch 2 Integrale bestimmen. Man bemerke aber, was für das folgende von Bedeutung ist, dass das gleich Null gesetzte Absolutglied der Gleichung kein τ enthält und den Modulus $z^2 = \dfrac{4Ra}{(R+a)^2}$ bestimmt. Indem wir also die-

sen **Modulus** hier einführen, wird die eine Amplitude $\varphi = 90^0$ und die 2te geht aus

5) $$\cos\varphi = \frac{(R-a)\sin\tau}{a-R\sin\tau^2}$$

hervor.

Unter diesen Voraussetzungen haben wir also folgendes: Es ist

6) $$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi_1{}^2}}+\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi_2{}^2}}=K,$$
$$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi_1{}^2}}-\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi_2{}^2}}=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}},$$

oder

7) $$\begin{matrix} u_1+u_2=K \\ u_1-u_2=u \end{matrix}, \qquad z^2=\frac{4Ra}{(R+a)^2}.$$

Um nun geometrisch alles beisammen zu haben, was später analytisch verwertet werden soll, geben wir hier die nachstehenden Entwickelungen:

Aus 7) folgt

$$z'=\frac{R-a}{R+a},$$

daher wird 5) zu

8) $$\cos\varphi=\frac{2z'\sin\tau}{1-z'-(1+z')\sin\tau^2},$$

und allgemein

9) $$x=(R+a)\sqrt{1-\frac{4Ra}{(R+a)^2}\sin\varphi^2},$$

ferner ist

10) $$\sin\varphi_1\sin\varphi_2=\frac{\cos\alpha}{1-z'}, \qquad \cos\varphi_1\cos\varphi_2=\frac{z'}{1-z'}\cos\alpha,$$

11) $$\cos(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{R}{a}\cos\alpha=\frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha.$$

Aus 9) folgt durch Addition

12) $$\frac{x_1+x_2}{R+a}=\varDelta\varphi_1+\varDelta\varphi_2.$$

d. i.

13) $$\varDelta\varphi_1+\varDelta\varphi_2=(1+z')\sin\alpha.$$

Die Subtraction dagegen gibt

14) $$\varDelta\varphi_1-\varDelta\varphi_2=(1-z')\sin(\varphi_1-\varphi_2)=\sqrt{(1-z')^2-(1+z')\cos\alpha^2},$$

womit wir noch verbinden

15) $$\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\Delta\varphi_1} = \frac{\sin 2\varphi_1}{2x_1}(R+a) = \frac{R+a}{2a}\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{1-z'},$$

wie sich aus dem Sinussatz für das Dreieck ROP_1 ergibt.

Wir stellen ferner die Formeln für $\sin\varphi_1^2$ und $\sin\varphi_2^2$ auf, sie sind

16) $$2\sin\varphi_1^2 = 1+\frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha^2+\sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2\cos\alpha^2},$$

$$2\sin\varphi_2^2 = 1+\frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha^2-\sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2\cos\alpha^2},$$

woraus

17) $$\sin\varphi_1^2+\sin\varphi_2^2 = 1+\frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha^2,$$

$$\sin\varphi_1^2-\sin\varphi_2^2 = \sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2\cos\alpha^2}.$$

Um $\varphi_1+\varphi_2$ zu bilden, benutzen wir für 2_*) die Formel

$$\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{A}{1-B}$$

Die Anwendung derselben auf 2) liefert die Relation

18) $$\varphi_1+\varphi_2 = 90^0+\tau = 180^0-\alpha.$$

Ebenso bemerke man noch

19) $$\sin\varphi_1\pm\sin\varphi_2 = \sqrt{\frac{1-z'+(1+z')\cos\alpha^2\pm 2\cos\alpha}{1-z'}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \text{ und } \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sin\alpha\pm\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2\cos\alpha^2}}{2z'\cos\alpha}(1-z')$$

Wir stellen noch die Werte von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ durch φ dar.

20) $$\sin\alpha^2 = \frac{2z'}{1+z'}\frac{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}+1}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}+z'},$$

$$\cos\alpha^2 = \frac{1-z'}{1+z'}\frac{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}-z'}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}+z'}$$

Die letzte kann auch in

21) $$\cos\alpha = \frac{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}-z'}{(1+z^2)\cos\varphi}$$

transformirt werden. Bezüglich der Formel 5) führen wir einen Hülfswinkel ein, indem wir zunächst dieselbe in

$$22)\quad \frac{z}{z'}\cos\varphi = \frac{2\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\cos\alpha}{1-\left(\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\cos\alpha\right)^2}$$

umwandeln. Wir setzen demnach

$$23)\quad \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\cos\alpha = \operatorname{tg}\psi,$$

und man hat

$$24)\quad \frac{z}{z'}\cos\varphi = \operatorname{tg}2\psi,$$

welchen Relationen wir noch die folgende beifügen:

$$25)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-z'\cot\frac{1}{2}\alpha^2}{1-z'\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2}}.$$

In den Anwendungen werden wir häufig der Kürze wegen einfach φ anstatt $\operatorname{am} u$ schreiben.

Diese Formeln reichen hin, um diejenigen Transformationen der elliptischen Functionen durchzuführen, welche in ihren verschiedenen Formen eine geometrische Erklärung der analytischen Relationen ermöglichen. Die oben eingeführte Transformation ist übrigens nicht die einzige, aber, da alle anderen zu denselben Zielen führen, haben wir die hier angewandte wegen ihrer Einfachheit und Leichtigkeit besonders ausgewählt.

Der in der Theorie der elliptischen Functiznen angewendeten Transformationen werden wir uns ebenfalls gelegentlich bedienen und bemerken demnach an dieser Stelle, dass, wenn z durch $\frac{1-z'}{1+z'}$, ferner u durch $(1+z')u$ ersetzt wird: K sich in $\frac{1}{2}(1+z')K$ und q in q^2 verwandelt. Ebenso werden wir die bekannten Relationen

$$26)\quad \begin{aligned} \Delta\operatorname{am}(K-u) &= \frac{z'}{\Delta\operatorname{am}u}, \\ \sin\operatorname{am}(K-u) &= \frac{\cos\operatorname{am}n}{\Delta\operatorname{am}u}, \\ \cos\operatorname{am}(K-u) &= \frac{z'\sin\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u} \end{aligned}$$

häufig benutzen.

Das durch die Amplitude φ definirte Integral

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin\varphi^2}}$$

hat übrigens eine leicht anzugebende dynamische Bedeutung, wie aus unserer Abhandlung über die elliptischen Integralfunctionen bezüglich der Anwendung letzterer auf den Kreis gefolgert werden kann. Mit Hinzunahme einer Constanten bedeutet es die Zeit, welche ein schwerer Punkt zur Zurücklegung des Bogens P_1P_2 gebraucht, vorausgesetzt, dass die entsprechende Sehne stets durch einen festen harmonischen Punkt des Kreises geht.

II.

Wir benutzen jetzt die entwickelten Formeln, um dieselben auf die Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen anzuwenden und letztere zu transformiren. Die daraus hervorgehenden Reihen haben den Vorzug, dass sie eine stärkere Convergenz besitzen und eine geometrische Deutung zulassen, die für die weitere Untersuchung von Wert ist. Bei den folgenden Darstellungen haben wir nun zu beachten, dass stets $u_1 + u_2 = K$, wo K das vollständige elliptische Integral der 1. Art bezeichnet und $u_1 - u_2 = u$ ist, worin das Argument u sich auf die Amplitude $\varphi = \operatorname{am} u$ bezieht, während die andern $u_1 u_2$ durch die Amplituden $\varphi_1 \varphi_2$, wie sie in der Kreisgleichung 2) erscheinen, definirt werden.

Wir wählen zuerst die folgende Reihe

$$27)\quad \varphi = \operatorname{am} u = \frac{\pi u}{2K} + \frac{2q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\,\frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{1}{3}\,\frac{2q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}\ldots,$$

und bringen mit dieser die aus 18) hervorgehende Relation

$$28)\qquad \operatorname{am} u_1 + \operatorname{am} u_2 = \frac{\pi}{2} + \tau$$

in Beziehung. In der Reihe setzen wir zuerst $u = u_1$ und dann $= u_2$ und addiren, indem wir beachten, dass

$$\sin mu_1 + \sin mu_2 = 2\sin\frac{m}{2}(u_1+u_2)\cos\frac{m}{2}(u_1-u_2)$$

ist. Die Glieder mit geraden Potenzen fallen aus, und man hat

$$29)\ \frac{1}{4}\tau = \frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\,\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \ldots$$

Vermöge des Wertes von τ aus 20) haben wir demnach

$$30)\quad \frac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{\Delta-z'}{\Delta+z'}\frac{1-z'}{1+z'}} = \frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \dots$$

Ersetzt man u durch $K-u$ und Δ durch $\frac{z'}{\Delta}$, so resultirt

$$31)\quad \frac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}\frac{1-z'}{1+z'}} = \frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K} + \dots$$

Wird $u = K$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gesetzt, so kommt

$$32)\quad \frac{1}{4}\arcsin\frac{1-z'}{1+z'} = \frac{q}{1+q^2} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}} - \dots$$

Ersetzen wir hierin z durch $\frac{1-z'}{1+z'}$ und q durch q^2, so verwandelt die letztere Gleichung sich in

$$33)\quad \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\right)^2 = \frac{q^2}{1+q^4} - \frac{1}{3}\frac{q^6}{1+q^{12}} + \frac{1}{5}\frac{q^{10}}{1+q^{20}} - \dots$$

Die geometrische Bedeutung dieser Reihen werden wir später an der Kettenlinie nachweisen.

Erinnern wir uns nun der Formel

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2) = \frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha,$$

worin $\varphi_1-\varphi_2 = \operatorname{am} u_1 - \operatorname{am} u_2$ zu einer neuen Transformation Anlass gibt, so verschwinden in der entsprechenden Reihe die ungeraden Stellengieder, und man hat zunächst

$$\varphi_1-\varphi_2 = \frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{2}\frac{4q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{4}\frac{4q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} - \dots$$

also

$$34)\quad \frac{1}{4}\arccos\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}\frac{\Delta-z'}{\Delta+z'}} = \frac{\pi u}{8K} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} - \dots$$

woraus wie oben folgt

$$35)\quad \frac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}\,\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{\pi u}{8K} + \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{4}\,\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots$$

Bezüglich der Reihe 30) kann man den unter 23) bestimmten Hülfswinkel ψ benutzen und man hat

$$36)\quad \operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\sin 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right).$$

$$\cos\varphi = \frac{z'}{z}\operatorname{tg} 2\psi.$$

Für ein gegebenes $u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}}$ lässt sich hiernach ψ und damit die Amplitude φ berechnen.

Man kann die gefundenen Reihen noch leicht vermehren. So ist gemäss 29)

$$37)\quad \sqrt{\frac{\Delta+1}{\Delta+z'}\,\frac{2z'}{1+z'}} = \cos 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right).$$

Wir setzen hierin zuerst u gleich u_1 und darauf $= u_2$, dasselbe gelte für Δ. Beide Ausdrücke multipliciren wir und ersetzen $2\cos A\cos B$ durch $\cos(A+B)+\cos(A-B)$, das Product $\frac{\Delta_1+1}{\Delta_1+z'}\cdot\frac{\Delta_2+1}{\Delta_2+z'}$ wird gleich $\frac{1}{z'}$ und das schliessliche Resultat ist

$$\begin{aligned}38)\quad \frac{4\sqrt{z'}}{1+z'} = {}&\cos 4\sqrt{2}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{4K} + \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{4K} - \frac{1}{5}\,\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{4K} - \frac{1}{7}\,\frac{q^7}{1+q^{14}}\cos\frac{7\pi u}{4K}\dots\right)\\ &+\cos 4\sqrt{2}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{4K} - \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{4K} - \frac{1}{5}\,\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{4K} + \frac{1}{7}\,\frac{q^7}{1+q^{14}}\sin\frac{7\pi u}{4K}\dots\right)\end{aligned}$$

In ähnlicher Art folgt aus der Reihe

$$39)\quad \sqrt{\frac{\Delta-z'}{\Delta+z'}\,\frac{1-z'}{1+z'}} = \sin 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\dots\right)$$

die nachstehende, die analog der vorhergehenden auch in ein Product zweier Sinus transformirt werden kann:

40) $$-2\frac{1-z'}{1+z'}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} =$$
$$\cos 4\sqrt{2}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{4K}+\frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{4K}-\frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{4K}-\dots\right)$$
$$-\cos 4\sqrt{2}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{4K}-\frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{4K}-\frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{4K}+\dots\right).$$

III.

Die elliptischen Functionen leiten ferner die folgende Reihe ab

41)
$$\Delta\,\mathrm{am}\,u=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{q^2}{1+q^4}+\frac{2\pi u}{K}+\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{K}+\dots\right).$$

Um dieselbe zu transformiren, benutzen wir die Formel

$$\Delta\,\mathrm{am}\,u_1+\Delta\,\mathrm{am}\,u_2=(1+z')\sin\alpha.$$

Führen wir hierin den Wert von $\sin\alpha$ aus 20) ein, so ergibt sich wie früher

42) $$\frac{1}{4}\sqrt{2z'(1+z')\frac{\Delta+1}{\Delta+z'}}=\frac{\pi}{K}\left(\frac{1}{4}-\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{q^4}{1+q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}-\dots\right),$$

43) $$\frac{1}{4}\sqrt{2(1+z')\frac{z'+\Delta}{1+\Delta}}=\frac{\pi}{K}\left(\frac{1}{4}+\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{q^4}{1+q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}+\dots\right).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen lassen sich mehrere Specialformen ableiten, deren eine wir wegen ihrer Wichtigkeit besonders hervorheben.

Wir setzen wieder $\varphi=90^0$ und $K=u$, es folgt

44) $$1+z'=\frac{\pi}{K}\left(1+\frac{4q^2}{1+q^4}+\frac{4q^4}{1+q^8}+\dots\right).$$

Ferner wird für $\varphi=0$

45) $$2\sqrt{z'}=\frac{\pi}{K}\left(1-\frac{4q^2}{1+q^4}+\frac{4q^4}{1+q^8}-\frac{4q^6}{1+q^{12}}+\dots\right).$$

Ziehen wir diese Gleichung von der obern ab, so erhält man

46) $$(1-\sqrt{z'})^2=\frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^4}+\frac{q^6}{1+q^{12}}+\frac{q^{10}}{1+q^{20}}+\dots\right).$$

Entwickeln wir nun die Ausdrücke in der Klammer nach Potenzen von q, so resultirt zunächst folgendes.

$$47)\quad (1-\sqrt{z'})^2 = \frac{8\pi}{K}(q^2+2q^{10}+q^{18}+2q^{26}+2q^{34}+3q^{50}\ldots).$$

Eine genauere Betrachtung der Reihe zeigt, dass dieselbe das Quadrat einer zweiten ist, so dass man hat

$$48)\quad \frac{K}{\pi} = \frac{8}{(1-\sqrt{z'})^2}(q+q^9+q^{25}+q^{49}\ldots)^2.$$

Die Berechnung von K nach dieser Formel ist wegen der ausserordentlich starken Convergenz der Reihe, die vielleicht von keiner zweiten mehr erreicht wird, sehr leicht, da schon das erste Glied hinreicht um eine Genauigkeit bis q^{10} herbeizuführen. Man hat also mit grosser Genauigkeit

$$49)\quad K = \frac{8\pi q^2}{(1-\sqrt{z'})^2}.$$

Andere Reihen sind nach dem Vorstehenden leicht zu gewinnen, so ist

$$50)\quad (1+\sqrt{z'})^2 = \frac{8\pi}{K}\left(\frac{1}{4}+\frac{q^4}{1+q^8}+\frac{q^8}{1+q^{16}}\cdots\right).$$

Setzen wir in 42)

$$u = \frac{K}{2},$$

also

$$\varDelta\,\mathrm{am}\,\frac{K}{2} = \sqrt{z'},$$

so kommt

$$51)\quad \sqrt{2(1+z')\sqrt{z'}} = \frac{\pi}{K}\left(1-\frac{4q^4}{1+q^8}+\frac{4q^8}{1+q^{16}}-\frac{4q^{12}}{1+q^{24}}\cdots\right).$$

Führen wir auch hier die Reihenentwickelungen durch, so resultirt

$$52)\quad \sqrt{2(1+z')\sqrt{z'}} = \frac{\pi}{K}(1-4q^4+4q^8+4q^{16}-8q^{20}+4q^{32}-4q^{36}\ldots)$$

oder

$$53)\quad \sqrt{2(1+z')\sqrt{z'}} = \frac{\pi}{K}(1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+2q^{64}\ldots)^2.$$

Während also die Exponenten der Reihe 48) durch die 2. Potenzen der ungeraden Zahlen bestimmt werden, gilt dies bei der vorstehenden für die Geraden Zahlen der Zahlenreihe.

Eine weitere Transformation der letzten Formel ergibt noch

$$54)\quad K = \frac{\pi}{2\sqrt{z'}}(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}\ldots)^2.$$

Vergleichen wir diese mit der bekannten der elliptischen Functionen

$$K = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)^2,$$

so erhalten wir

$$\text{55)} \qquad \sqrt{z'} = \frac{(1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \ldots)^2}{(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)^2},$$

und da bekanntlich

$$\text{55}_*) \qquad \sqrt{z'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9},$$

so folgt aus den beiden letzten die für die Zahlentheorie wichtige neue Relation

$$\text{56)} \quad (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 \ldots)(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 \ldots) = (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} \ldots)^2$$

Das Product zweier Reihen von vorstehender Bildungsform ist demnach das Quadrat einer dritten von analoger Art. Wir geben nachher eine Anwendung davon.

Wir bemerken noch, dass eine Transformation der Formel 48) die folgende bestimmt

$$\text{57)} \qquad K = \frac{4\pi q}{1 - z'}(1 + q^4 + q^{12} + q^{24} \ldots)^2.$$

Unter Benutzung der Formel 14) bilden wir eine neue Reihe für $\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2$ und es wird

$$\text{58)} \quad (1 - z')\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} \ldots\right),$$

d. i.

$$\text{59)} \quad \sqrt{(1 - z')^2 - (1 + z')^2 \cos\alpha^2}$$
$$= \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} \ldots\right).$$

Man kann hieraus die obige Reihe für K direct in anderer Form ableiten, wenn $\alpha = 90^0$ und $u = K$ gesetzt wird, es folgt

$$\text{60)} \qquad 1 = z' = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2} + \frac{q^3}{1+q^6} + \frac{q^5}{1+q^{10}} + \ldots\right).$$

Führt man in der vorletzten Reihe für $\cos\alpha^2$ den Wert aus 20) ein, so entsteht

61) $$\sqrt{2z'(1-z')\frac{1-\Delta}{z'+\Delta}} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\cdots\right),$$

oder transformirt

62) $$\sqrt{2(1-z')\frac{\Delta-z'}{\Delta+1}} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\cdots\right),$$

welche den Reihen in 42), 43) entsprechen.

Dieselben können wiederum vermittelst einer Addition oder Subtraction transformirt werden, wenn wir beachten, dass unter der Voraussetzung $u_1+u_2=K$ die Relation $\Delta\varphi_1\,\Delta\varphi_2=z'$ besteht. Es kommt also diese Umwandlung darauf hinaus, den algebraischen Ausdruck

$$\sqrt{\frac{\Delta_1+1}{\Delta_1+z'}} \pm \sqrt{\frac{\Delta_2+1}{\Delta_2+z'}}$$

auf die geeignete Form zu bringen, die durch die obige Relation wesentlich vereinfacht wird. Man findet unter Benutzung von $\Delta_1+\Delta_2=(1+z')\sin\alpha$

63)

$$(1-\sqrt{z'})\sqrt{2\,\frac{(1+z')\sin\alpha-2\sqrt{z'}}{1+\sin\alpha}} = \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^6}{1+q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\cdots\right)$$

$$(1+\sqrt{z'})\sqrt{2\,\frac{(1+z')\sin\alpha+2\sqrt{z'}}{1+\sin\alpha}} = \frac{2\pi}{K} - \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^4}{1+q^8}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{q^8}{1+q^{16}}\cos\frac{2\pi u}{K}\cdots\right).$$

Vermittelst Differentiation lassen sich aus den gegebenen Reihen mehrere neue ableiten. Dasselbe ist der Fall, wenn wir die mit $\frac{d\varphi}{\Delta}=u$ multiplicirten Glieder integriren. Wählen wir zu diesem Zwecke die Reihe 42), so muss demnach das Integral der Reihe

$$\int\sqrt{2z'(1+z')\frac{1+\Delta}{z'+\Delta}}\,\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{\pi u}{K} - \frac{4\pi}{K}\int\left(\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{K}\cdots\right)du$$

gesucht werden.

Wir substituiren $z \sin\varphi = \sin\psi$, bezeichnen darauf $\cos\psi$ durch y, und das Integral wird demzufolge zu

$$\int \frac{dy}{(z'+y)\sqrt{-z'+(1+z')y-y^2}}.$$

Führen wir noch ein

$$\frac{1+z'}{2}-y=z,$$

so wird letzteres

$$\int \frac{dz}{\left(\frac{1+3z'}{2}-z\right)\sqrt{\frac{(1-z')^2}{4}-z^2}}.$$

Nach bekannten Methoden führt das Integral auf einen arctg mit der $C=\frac{\pi}{2}$ und man hat

$$64)\quad \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+z'}{2z'}\,\frac{\varDelta-z'}{1-\varDelta}}=$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2K}+2\left(\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{1}{2}\,\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}+\dots\right),$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$65)\quad \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2z'}{1+z'}\,\frac{1-\varDelta}{\varDelta-z'}}=$$

$$=\frac{\pi u}{8K}-\frac{1}{2}\,\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{1}{4}\,\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}-\dots$$

Man kann hierin $u=\frac{K}{2}$, $\varDelta=\sqrt{z'}$ einführen, schreibt man alsdann anstatt z' und q^2 bezüglich $\frac{1-z}{1+z}$ und q, so erhält man

$$\operatorname{arctg}\sqrt{z'}=\frac{\pi}{4}-\frac{2q}{1+q^2}+\frac{2}{3}\,\frac{q^3}{1+q^7}-\frac{2}{5}\,\frac{q^5}{1+q^{10}}+\dots,$$

oder auch

$$66)\quad \operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}=\frac{2q}{1+q^2}-\frac{1}{3}\,\frac{2q^3}{1+q^6}+\frac{1}{5}\,\frac{2q^5}{1+q^{10}}-\dots,$$

welche für $z'=0$ und $q=1$ in die Leibnitz'sche Reihe übergeht. Die vorstehende konnte auch aus 32) entwickelt werden.

Erinnert man sich der aus den elliptischen Functionen bekannten Formel

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}} = \frac{q+q^9+q^{25}+\dots}{1+2q^4+2q^{16}+\dots},$$

so resultirt aus den beiden letzten noch

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2q+2q^9+2q^{25}-\dots}{1+2q^4+2q^{16}+\dots} = \frac{2q}{1+q^2}-\frac{1}{3}\,\frac{2q^3}{1+q^6}+\frac{1}{5}\,\frac{2q^5}{1+q^{10}}-\dots$$

Eine weitere Entwickelung der allgemeinen Reihen kann vermittelst der Relation

$$\operatorname{arc\,tg}x \pm \operatorname{arc\,tg}y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x\pm y}{1\mp xy}$$

geschehen. Demnach erhält man 2 neue Reihen und zwar zunächst

$$\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-\sqrt{z'}}\sqrt{2\frac{(1+z')\sin\alpha+2\sqrt{z'}}{1-\sin\alpha}} =$$

$$\frac{\pi}{8}-\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{1}{3}\,\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\dots,$$

welche in arc sin transformirt zur folgenden wird:

$$67)\quad \frac{1}{4}\arcsin\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} =$$

$$\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\,\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\dots,$$

und ferner

$$68)\quad \frac{1}{4}\arccos\frac{1+\sqrt{z'}}{1-\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} =$$

$$\frac{\pi u}{8K}-\frac{1}{2}\,\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{1}{4}\,\frac{q^8}{1+q^{16}}\sin\frac{2\pi u}{K}-\dots$$

Man bemerke, dass in den letzten Reihen der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau$$

ist, aus den Formeln

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\sin\tau$$

und

$$\cos\varphi = \frac{z'}{z}\operatorname{tg}2\psi$$

erhält man also bei gegebenem Argument

$$u = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+z^2\sin\varphi^2}}$$

mit Hülfe der genannten stark convergirenden Reihen die gesuchte Amplitude φ.

Die beiden Reihen 61) und 62) geben Veranlassung zu der Darstellung von $\operatorname{tg}\operatorname{am} u$. Dividiren wir die erste durch die zweite, so erhalten wir als Quotienten

69)
$$\operatorname{tg}\operatorname{am} u = \frac{1}{z'}\cdot\frac{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{2\pi u}{2K}+\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}-\cdots}{\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}+\cdots}$$

Multipliciren wir dagegen die beiden Reihen 42), 43) und transformiren das Product, so folgt

$$70)\qquad 4z'\frac{K^2}{\pi^2} = \left(1-\frac{4q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{4q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{2K}-\cdots\right)$$
$$\times\left(1+\frac{4q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{4q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{2K}+\cdots\right).$$

IV.

Die folgenden Untersuchungen über die wichtigeren Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen werden einige neue Sätze zur Zahlentheorie zu Tage fördern, welche denjenigen Relationen entsprechen, die Jacobi unter analogen Verhältnissen zuerst gegeben hat.

Wir fahren in unsern Reihenentwickelungen fort und nehmen zum Ausgangspunkt die Reihe

71)
$$\sin\operatorname{am} u^2 = \frac{K-E}{z^2K}-2\left(\frac{\pi}{zK}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}+\cdots\right)$$

Zur Transformation benutzen wir die in I gegebene Resolution

$$\sin\varphi_1{}^2+\sin\varphi_2{}^2 = 1+\frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha^2$$

und unter Benutzung des bekannten Wertes von $\cos\alpha^2$ aus 20) haben wir

72)
$$\frac{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}}{z'+\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}} = \frac{K-E}{z^2K}+2\left(\frac{\pi}{zK}\right)^2\left(\frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{4q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}\cdots\right)$$

Gehen wir ferner von der Formel

$$\sin\varphi_1^2 - \sin\varphi_2^2 = \sin\alpha\sqrt{1 - \frac{(1+\varkappa')^2}{(1-\varkappa')^2}\cos\alpha^2}$$

aus, so findet sich

$$73)\quad \sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{1+\varkappa'}{1-\varkappa'}\right)^2\cos\alpha^2} = 4\left(\frac{\pi}{\varkappa K}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right),$$

woraus nach Einsetzung des Wertes von $\sin\alpha^2$ und $\cos\alpha^2$ sich ergibt

$$73_*)\quad \frac{\varkappa'\sin\varphi}{\varkappa'+\Delta} = 2\left(\frac{\pi}{\varkappa K}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

Als specieller Wert für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $u = K$ folgt hieraus

$$74)\quad \frac{1}{4}\left(\frac{\varkappa K}{\pi}\right)^2 = \frac{q}{1-q^2} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \frac{5q^5}{1-q^{10}} + \ldots$$

Führen wir in der vorletzten Reihe für Δ und $\sin\varphi$ die entsprechenden Transformationswerte ein, welche der Bedingung $u = K - u$ genügen, so findet man noch

$$57)\quad \frac{\cos\varphi}{1+\Delta} = 2\left(\frac{\pi}{\varkappa K}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

Die Reihe 72) kann nochmals transformirt werden, indem der Ausdruck $\frac{\Delta_1}{\varkappa'+\Delta_1} \pm \frac{\Delta_2}{\varkappa'+\Delta_2}$ leicht angebbar ist. So findet man die beiden Reihen

$$\frac{(1-\varkappa')^2}{1+\sin\alpha} = 1+\varkappa'^2 - \frac{2E}{K} + \frac{16\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^4}{1-q^8}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^8}{1-q^{16}}\cos\frac{2\pi u}{K}\ldots\right)$$

76)

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right)^2 - \cos\alpha^2}}{1+\sin\alpha} = 8\left(\frac{\pi}{\varkappa K}\right)^2\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^6}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

Aus der ersten gewinnen wir für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $u = K$ eine rasch convergirende Reihe zur Berechnung von E nämlich

$$77)\quad \frac{E}{K} = \frac{(1+\varkappa')^2}{4} - \frac{8\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^4}{1-q^8} + \frac{2q^8}{1-q^{16}} + \frac{3q^{12}}{1-q^{24}}\ldots\right),$$

und ebenso geht aus der zweiten eine Reihe für

$$78)\quad \left(\frac{K}{4\pi}\right)^2 = \frac{1}{(1-z')^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4} + \frac{3q^6}{1-q^{12}} + \frac{5q^{10}}{1-q^{20}} + \dots\right)$$

hervor. Vergleichen wir mit dieser die in 57) abgeleitete Reihe, nachdem dieselbe mit 2 potenzirt worden, so dass man hat

$$\left(\frac{K}{4\pi}\right)^2 = \frac{q^2}{(1-z')^2}(1+q^4+q^{12}+q^{24}\dots)^4.$$

so folgt die Relation

$$79)\quad \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{3q^6}{1-q^{12}} + \frac{5q^{10}}{1-q^{20}} + \dots = q^2(1+q^4+q^{12}+q^{24}\dots)^4.$$

Diese interessante Relation können wir mit der Zahlentheorie in Verbindung bringen, wenn wir eine kleine Umgestaltung mit derselben vornehmen. Wir dividiren beiderseits durch q^2 und setzen darauf $q^4 = x$. Es entsteht dann folgende sehr bemerkenswerte Formel

$$80)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{1-x} + \frac{3x}{1-x^3} + \frac{5x^2}{1-x^5} + \frac{7x^3}{1-x^7} + \frac{9x^4}{1-x^9}\dots = \\ &(1+x^1+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+x^{21}\dots)^4, \end{aligned}$$

deren Bildungsgesetz leicht ersichtlich ist. Die Exponenten der letzten Reihe sind die Trigonalzahlen. Bezüglich der zahlentheoretischen Bedeutung dieser Doppelreihe erinnern wir an die Darstellung einer ähnlichen Reihe in der „Theorie der elliptischen Functionen" von Durège, wo in § 66. der Satz Jacobi's abgeleitet wird, dass jede ganze Zahl die Summe von 4 Quadraten ist. So ist z. B.

$$105 = 1^2+2^2+6^2+8^2 = 2^2+4^2+6^2+7^2.$$

Wie aus der 2. Reihe hervorgeht, sind die Exponenten nichts anders als die figurirten Zahlen 1, 3, 6, 10 etc. Demnach ergeben sich auch hier Beziehungen zwischen denjenigen ganzen Zahlen, welche die Exponenten der einen Reihe und denjenigen ganzen Zahlen, die die Exponenten der anderen Reihe bilden.

Bei Ansicht der 2. Reihe bemerkt man sofort, dass die 4. Potenz derselben aus lauter Gliedern besteht, bei denen jeder Exponent die Summe von 4 figurirten Zahlen ist und die 1. Reihe ergibt ohne weitere Untersuchung, dass sie sämmtliche Potenzen von x enthalten wird. Hieraus folgt der neue Satz, dass jede ganze Zahl die Summe von vier figurirten Zahlen der 1. Ordnung ist.

Für jede ganze Zahl h besteht also die Relation

$$h = f_1+f_2+f_3+f_4,$$

wobei wir bemerken, dass h auf mehrfache Art aus jenen bestimmten Zahlen gebildet werden kann. So ist z. B.

$$141 = 1+21+28+91 = 3+15+45+78,$$

während die Quadrate für

$$141 = 1^2+2^2+6^2+10^2 = 2^2+3^2+8^2+8^2$$

sind. Ebenso können die f_1, f_2, f_3, f_4 irgend vier gleiche oder verschiedene ganze Zahlen oder auch Null bedeuten.

Der soeben entwickelte Satz über die Trigonalzahlen ist demnach ein Analogon zu dem von Jacobi gegebenen Satz über die Quadratzahlen.

Indem wir wieder auf die allgemeinen Reihenentwickelungen zurückgehen, benutzen wir ferner die Formel

$$81)\quad \frac{1}{\sin\varphi^2} = \frac{K-E}{K} + \frac{\pi^2}{4K^2}\frac{1}{\sin\frac{\pi u^2}{2K}} - \frac{2\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^4}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}\cdots\right)$$

Die Transformation derselben lässt folgende neue Relationen entstehen: Durch Addition folgt

$$82)\quad \frac{z^2\varDelta}{\varDelta - z'} = \frac{K-E}{K} + \frac{\pi^2}{2K^2}\frac{1}{\cos\frac{\pi u^2}{2K}} + \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^4}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^8}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}\cdots\right)$$

Durch Subtraction

$$83)\quad \frac{2z'z^2\sin\varphi}{\varDelta - z'} = \frac{\pi^2}{K^2}\frac{\sin\frac{\pi u}{2K}}{\cos\frac{\pi u^2}{2K}} - 4\frac{\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^6}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}\cdots\right).$$

Wir setzen in der ersten $u = \frac{K}{2}$, also $\varDelta = \sqrt{z'}$, es resultirt

$$84)\quad \frac{z^2}{1-\sqrt{z'}} = \frac{K-E}{K} + \frac{\pi^2}{K^2} + \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{2q^8}{1-q^8} - \frac{4q^{16}}{1-q^{16}} + \cdots\right),$$

welche sich ebenfalls zur Berechnung von E benutzen lässt. Demnach ist

$$85)\quad \frac{E}{K} = 1 - \frac{z^2}{1-\sqrt{z'}} + \frac{\pi^2}{K^2}\left(1 + \frac{8q^8}{1-q^8} - \frac{16q^{16}}{1-q^{16}} + \cdots\right).$$

welche Reihe sich durch starke Convergenz auszeichnet.

In der Theorie der elliptischen Integrale werden Reihen zur Berechnung von $F\varphi$ und $E\varphi$ entwickelt, welche nach den Sinus von φ, $2\varphi_1$ etc. fortschreiten und demnach zu einer Transformation nach der bisher angewandten Art wohl geeignet erscheinen.

Da dieselbe keine Schwierigkeiten bietet, so überlassen wir die Umwandlung beider Reihen dem geneigten Leser.

V.

Auch die Reihenentwickelung

86)
$$\frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} = \frac{4\pi}{z^2 K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K} + \cdots\right)$$

lässt sich mit Hülfe der Formeln in I) leicht transformiren.

Man findet

$$\frac{\cos\alpha}{1-z'} = \frac{4\pi}{z^2 K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right),$$

oder

87)
$$\sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'}} = \frac{4\pi}{zK}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right) \text{ und}$$

$$\sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{4\pi}{zK}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right),$$

welche mit früher abgeleiteten in Verbindung gebracht werden können.

Setzt man in der ersten $u = 0$, $\Delta = 1$, und ersetzt darauf z' durch $\frac{2\sqrt{z'}}{1+z'}$, K durch $\frac{1}{2}(1+z')K$, so kommt

$$(1-\sqrt{z'})^2 = \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4} - \frac{q^6}{1-q^{12}} + \frac{q^{10}}{1-q^{20}}\cdots\right)$$

Wie wir nachher zeigen werden, sind die obigen Reihen für eine durch die Kettenlinie vermittelte geometrische Erklärung der links stehenden Ausdrücke von Wert.

Ebenso lässt sich die Reihe

89)
$$\frac{\pi}{2K\cos\frac{\pi u}{2K}} - \frac{z'}{\cos \operatorname{am} u} = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1+q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right)$$

mit Erfolg verwerten, wenn man die zur Transformation des Ausdruckes

$$\frac{1}{\cos \mathrm{am}\, u_1} + \frac{1}{\cos \mathrm{am}\, u} = \frac{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}$$

nötigen Werte mit Hülfe der Formeln in I) berechnet.

Es kommt schliesslich

$$90)\quad \frac{\pi}{K} \frac{\cos \frac{\pi u}{4K}}{\cos \frac{\pi u}{2K}} - \frac{(1-z')}{\sqrt{2 \cos \alpha}} \sqrt{1 + \frac{2z}{1-z'} \cos \alpha - \frac{1+z'}{1-z'} \cos \alpha^2}$$

$$= \frac{2\pi}{K} \left(\frac{q}{1+q} \cos \frac{\pi u}{4K} + \frac{q^3}{1+q^3} \cos \frac{3\pi u}{4K} - \frac{q^5}{1+q^5} \cos \frac{5\pi u}{4K} - \frac{q^7}{1+q^7} \cos \frac{7\pi u}{4K} + \cdots \right).$$

Ist $u = 0$, so folgt wegen $\cos \alpha = \frac{1-z'}{1+z'}$.

$$90_*)\quad \sqrt{2z'(1+z')} = \frac{\pi}{K} \left(1 - \frac{2q}{1+q} - \frac{2q^3}{1+q^3} + \frac{2q^5}{1+q^5} + \frac{2q^7}{1+q^7} - \cdots \right)$$

Wir dividiren die Reihe durch die ähnliche in III 53) und man findet

$$91)\quad \sqrt{z'} = \frac{\left(1 - \frac{2q}{1+q} - \frac{2q^3}{1+q^3} + \frac{2q^5}{1+q^5} + \frac{2q^7}{1+q^7} - \cdots \right)^2}{(1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} \ldots)^4},$$

oder wegen 55_*)

$$= \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 \ldots}.$$

Schreiben wir diese Gleichung noch einmal und setzen $-q$ statt q, so erhalten wir durch Multiplication beider

$$92)\quad \left(1 - \frac{2q}{1+q} - \frac{2q^3}{1+q^3} + \frac{2q^5}{1+q^5} + \frac{2q^7}{1+q^7} - \cdots \right) \times \left(1 + \frac{2q}{1-q} + \frac{2q^3}{1-q^3} - \frac{2q^5}{1-q^5} - \frac{2q^7}{1-q^7} + \cdots \right) = (1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + 2q^{64} \ldots)^4$$

Man wird bei genauerer Durchsicht dieser Relation bemerken, dass dieselbe mit dem früher angeführten Satz von Jacobi in gewissem Zusammenhang steht. Führt man nämlich $q^4 = x$ ein, so enthält die 4. Potenz die Quadrate der natürlichen Zahlen als Exponen-

ten, während das transformirte Product alle ganzen Zahlen als Exponenten enthält.

Die letzte Reihe können wir wieder durch eine andere ersetzen, wie überhaupt die Bildung der Reihen eine fast unerschöpfliche zu sein scheint. Denn wie an einigen Beispielen gezeigt ist, kann jede transformirte Reihe der elliptischen Functionen wieder transformirt werden.

Benutzen wir die bekannte Reihe

93)
$$1 - z^2 \sin\varphi^2 + z'^2 \operatorname{tg}\varphi^2 - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \sec\frac{\pi u}{2K}^2$$
$$= \frac{2\pi^2}{K^2}\left(\frac{q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{K}\cdots\right)$$

zu unserer Transformation, so hat man zu beachten, dass

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi u_1}{2K}^2} + \frac{1}{\cos\frac{\pi u_2}{2K}^2} = \frac{4}{\cos\frac{\pi u}{2K}}$$

ist. Daher folgt nach einigen Rechnungen

94)
$$\frac{z'\varDelta}{\cos\varphi^2}\,\frac{K^2}{\pi^2} = \frac{1}{4\cos\frac{\pi u^2}{2K}} - \frac{2q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^4}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} - \cdots$$

woraus für $u = 0$

95)
$$\frac{z'K^2}{\pi^2} = \frac{1}{4} - \frac{2q^2}{1+q^2} - \frac{4q^4}{1+q^4} - \frac{6q^6}{1+q^6} + \cdots$$

Nun haben wir in 54) die Reihe

$$\sqrt{z'}\,\frac{K}{\pi} = \frac{1}{2}(1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \ldots)^8$$

abgeleitet. Das Quadrat derselben ist aber gleich der Reihe 95), so dass man hat

$$4\left(\frac{1}{4} - \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{4q^4}{1+q^4} - \frac{6q^6}{1+q^6} + \cdots\right) = (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \ldots)^4,$$

also auch

96)
$$4\left(\frac{1}{4} - \frac{2x}{1+x} + \frac{4x^2}{1+x^2} - \frac{6x^3}{1+x^3} + \cdots\right) = (1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 - \ldots)^4.$$

Setzt man hierin $-x$ statt x, so erhält man die oben erwähnte Reihe.

VI.

Für die folgende Untersuchung beschäftigen wir uns mit der Reihe für $E(\mathrm{am}\,u)$, welche bekannt ist unter der Form

$$103)\quad E(\mathrm{am}\,u)=\frac{E}{K}u+\frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\ldots\right).$$

wobei wir die Relation

$$E\varphi_1\pm E\varphi_2=E\varphi\pm\varkappa^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi$$

benutzen werden. Bezüglich des Ausdrucks $\sin\varphi_1\sin\varphi_2$ erinnern wir an die Formel 15).

Die Addition würde auf ein schon bekanntes Resultat hinauskommen, die Subtraction ergibt

$$104)\quad E\varphi=\frac{\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi}{\varDelta+\varkappa'}$$
$$+\frac{E}{K}u-\frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}+\ldots\right).$$

Auch diese Reihe lässt eine nochmalige Umwandlung zu, wenn wir berücksichtigen, dass

$$\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\varDelta_1+\varkappa'}\pm\frac{\sin\varphi_2\cos\varphi_2}{\varDelta_2+\varkappa'}$$
$$=\frac{\varDelta_2\sin2\varphi_1\pm\varDelta_1\sin2\varphi_2+\varkappa'(\sin2\varphi_1\pm\sin2\varphi_2)}{2\varkappa'(1+\varkappa')(1+\sin\alpha)}$$

ist. Da aber

$$\frac{x_2}{R+a}=\varDelta_2,\quad \varDelta_2\sin2\varphi_1=\frac{a}{R+a},\quad \frac{\sin2\varphi_1\sin2\varphi_2}{\cos\alpha}=\varDelta_1\sin2\varphi_2,$$

so ergibt die Berechnung für das obere Zeichen

$$\varkappa^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$
$$=\frac{2+(1+\varkappa').\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)}\cos\alpha-\frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right)$$

welcher Ausdruck schliesslich in die folgende Reihe

$$105)\quad (1-\varkappa')\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\ldots\right)$$

übergeht. Man sehe über die Anwendung derselben die Formeln 68) in III. nach.

Indem wir ferner das untere Zeichen berücksichtigen, folgt nach einigen Umwandlungen

$$106)\quad E\varphi = \operatorname{tg}\varphi\left(\sqrt{\Delta + \varkappa'} - \sqrt{\frac{2\varkappa'(1+\varkappa')}{\Delta+\varkappa'}}\right) + \frac{E}{K}u - \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^8}{1-q^{16}}\sin\frac{2\pi u}{K}\cdots\right).$$

Eine neue Reihe ergibt auch die Subtraction der Gleichungen 104) und 103)

$$107)\quad \frac{K}{2\pi}\,\frac{\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+\varkappa'} = \frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3(1+q^3)^2}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{K},$$

deren Bildungsgesetz klar ist. Ebenso ist für spätere Untersuchungen der Differentialquotient von 104) von Bedeutung. Man findet nach einigen Rechnungen

$$108)\quad \varkappa'\,\frac{1+\varkappa'\Delta}{\varkappa'+\Delta} = \frac{E}{K} - \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{K}\cdots\right).$$

Es lässt sich auch die Reihe 104) mit der bekannten

$$\frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} - \varkappa'\operatorname{tg}\operatorname{am}u = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right)$$

zur Aufstellung einer neuen benutzen. Sie ist

$$109)\quad E\varphi = 2\varkappa'\operatorname{tg}\varphi + \frac{\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+\varkappa'} - \frac{\pi}{K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{E}{K}u - \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^4}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^8}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right).$$

Endlich wollen wir noch diese mit 2 multiplicirte Gleichung von 106) abziehen, man hat

$$110)\quad E\varphi = \frac{E}{K}u - \frac{2\pi}{K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} + \operatorname{tg}\varphi\left(2\varkappa' + 2\Delta + \sqrt{\frac{2\varkappa'(1+\varkappa')}{1+\Delta}} - \sqrt{\varkappa'+\Delta}\right) - \frac{8\pi}{K}\,\frac{q^8}{(1-q^8)}\sin\frac{\pi u}{K}\ \text{u. s. w.}$$

Die entwickelten Formeln können zur Berechnung von

$$\int\sqrt{1-\varkappa^2\sin\varphi^2}\,d\varphi$$

dienen.

Man kann ferner die bekannte Reihe

$$\frac{2\Delta}{\cos\varphi}-\frac{\pi}{K}\sec\frac{\pi u}{2K}=\frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^3}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\ldots\right)$$

mit der aus 87) folgenden transformirten

$$\frac{\Delta-z'}{\cos\varphi}=\frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\ldots\right)$$

vermittelst Subtraction verbinden, das Resultat ist

$$111)\quad \frac{\Delta+z'}{\cos\varphi}=\frac{4\pi}{K}\left(\frac{1}{4}\sec\frac{\pi u}{2K}+\frac{q^2}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^6}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\ldots\right),$$

und wird die Reihe mit der aus 105) folgenden verknüpft, so ist das Endresultat

$$112)\quad \frac{\Delta+z'}{\cos\varphi}-\frac{1-z'}{2}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

$$=\frac{4\pi}{K}\left(\frac{1}{4}\sec\frac{\pi u}{2K}+\frac{q^4}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^{12}}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\ldots\right),$$

woraus

$$(1+\sqrt{z'})^2=\frac{8\pi}{K}\left(\frac{1}{4}+\frac{q^4}{1-q^4}-\frac{q^{12}}{1-q^{12}}+\frac{q^{20}}{1-q^{20}}-\ldots\right).$$

Auch die Reihe

$$\frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi u}{2K}-\cot\varphi=\frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\ldots\right)$$

gibt transformirt

$$113)\quad \frac{K}{4\pi}(1-z')\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}\sec\frac{\pi u}{2K}-\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{q^6}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}-\ldots,$$

woraus für $u=0$ und $\cos\alpha=\dfrac{1-z'}{1+z'}$

$$114)\quad \frac{K}{2\pi}\sqrt{z'}=\frac{1}{4}-\frac{q^2}{1+q^2}+\frac{q^6}{1+q^6}-\frac{q^{10}}{1+q^{10}}+\ldots,$$

Benutzen wir ferner die bekannte Formel

$$\ln\sin\varphi-\ln\sin\frac{\pi u}{2K}=\ln\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{z}}+2\left(\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K}+\ldots\right),$$

so ergibt sich daraus als transformirte

$$\ln\frac{\cos\alpha}{1-z'} - \ln\frac{1}{2}\cos\frac{\pi u}{2K} = \ln\frac{4\sqrt{q}}{z} - 4\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} - \ldots\right),$$

d. i.

$$\frac{1}{8}\ln 4q\frac{\Delta+z'}{\Delta-z'}\cos\frac{\pi u^2}{2K} = \frac{\frac{1}{2}q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{\frac{1}{4}q^4}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\Big),$$

$$114)\quad \frac{1}{8}\ln 2q\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\cos\frac{\pi u}{2K} = \frac{\frac{1}{4}q^4}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{1}{8}\frac{q^8}{1+q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots,$$

$$\frac{1}{8}\ln 2q\frac{1+\sqrt{z'}}{1-\sqrt{z'}} = \frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^4} - \frac{1}{8}\frac{q^8}{1+q^8} + \frac{1}{12}\frac{q^{12}}{1+q^{12}} - \ldots$$

Man sieht, mit welcher Leichtigkeit solche Reihen abgeleitet werden können, und wie ungezwungen sie sich den mannigfachsten Verhältnissen anschmiegen. Eine wertvolle Anwendung gibt auch die bekannte Relation

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(u+iK') = i\cot\mathrm{am}\,u,$$

welche wir auf 108) beziehen wollen. Demnach geht der Ausdruck zur Linken oder $\frac{z'(1+z'\Delta)}{z'+\Delta}$ über in $\frac{z'(1-z'\cot\varphi\,.\,i)(z'+\cot\varphi\,.\,i)}{z'^2+\cot\varphi^2} = \frac{z'^2}{\Delta^2} + z'z^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}\,i.$ Rechter Hand transformirt sich $\cos\frac{\pi n}{K}$ in

$$\cos\left(\frac{\pi u}{K} + \frac{\pi K'}{K}\,i\right) = \frac{e^{\frac{\pi K'}{K}} + e^{-\frac{\pi K'}{K}}}{2}\cos\frac{\pi u}{K} - i\,\frac{e^{\pi\frac{K'}{K}} - e^{-\frac{\pi K'}{K}}}{2}\sin\frac{\pi u}{K}$$

oder in $\frac{1+q^2}{2q}\cos\frac{\pi u}{K} - i\,\frac{1-q^2}{2q}\sin\frac{\pi u}{K}$.

Werden sämtliche Glieder in dieser Art berücksichtigt und nach reellen und imaginairen getrennt, so erhält man die folgenden Reihen

$$\frac{1}{\Delta\mathrm{am}u^2} = \frac{E}{z^2K} - \frac{2\pi^2}{z^2K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} - ..\right),$$

115)

$$\frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} = \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} - \ldots\right).$$

Wird diese Reihe durch die bekannte für $\frac{\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}$ dividirt, so folgt

$$\Delta\mathrm{am}\,u = 2z'\frac{K}{\pi}\,\frac{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K} + \ldots}{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} - \ldots}$$

$$116)\text{a}\quad \Delta\text{am}u = \frac{\pi}{2K}\,\frac{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}+\dots}{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}+\frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K}+\dots}$$

$$\Delta\text{am}u^2 = \varkappa'\,\frac{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}+\dots}{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}+\dots}$$

Aus 115) können auch noch die folgenden Quotienten berechnet werden.

$$\Delta = \frac{\pi}{2K}\,\frac{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\frac{9q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}+\dots}{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}+\dots}$$

116)b

$$\Delta^2 = \frac{\pi^2}{4K^2}\,\frac{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\frac{9q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}+\dots}{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}+\frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K}+\dots}$$

Auf die hier benutzte Relation $\cot\text{am}(u+iK') = i\Delta\,\text{am}\,u$ kommen wir nachher bei der Kettenlinie wieder zurück. Auf 62) angewandt, resultirt noch:

$$\sqrt{(1-\varkappa')(\Delta+1-(1+\varkappa')\sin\varphi^2)} = \frac{2\pi}{K}\left(\sqrt{q}\,\frac{1+q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q^3}\,\frac{1+q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\dots\right)$$

$$\sqrt{(1-\varkappa')(\Delta-1+(1+\varkappa')\sin\varphi^2)} = \frac{2\pi}{K}\left(\sqrt{q}\,\frac{1-q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q^3}\,\frac{1+q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\dots\right)$$

VII.

Wir stellen noch einige Betrachtungen an über die durch Partialbrüche und Quotienten ausgedrückten elliptischen Functionen.

Es werden sich vermittelst der Transformation noch einige bemerkenswerte Resultate ergeben. Gehen wir demnach aus von der Reihe

$$\frac{K}{2\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}-\frac{1}{4}=\frac{q\cos 2x-q^2}{1-2q\cos 2x+q^2}-\frac{q^3\cos 2x-q^6}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\cdots$$

so kommt es darauf an, den Ausdruck

$$\frac{q\cos 2x_1-q^2}{1-2q\cos 2x_1+q^2}\pm\frac{q\cos 2x_2-q^2}{1-2q\cos 2x_2-q^2}$$

in die geeignete Form umzuwandeln.

Für das untere Zeichen wird man schliesslich finden

$$\frac{q(1-q^2)(\cos 2x_1-\cos 2x_2)}{(1-2q\cos 2x_1+q^2)(1-2q\cos 2x_2+q^2)}=\frac{2q(1-q^2)\sin\frac{\pi u}{2K}}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}$$

Daher bestehen für beide Zeichen die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{K}{4\pi}(1-\varkappa')\sqrt{1-\left(\frac{1+\varkappa'}{1-\varkappa'}\right)\cos\alpha^2}$$
$$=\sin\frac{\pi u}{2K}\left(\frac{q(1-q^2)}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}-\frac{q^3(1-q^6)}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}+\cdots\right)$$

117)

$$\frac{K}{4\pi}\sqrt{2\varkappa'(1-\varkappa')\frac{1+\Delta}{\varkappa'+\Delta}}$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{q^2\left(\cos\frac{\pi u}{K}+q^2\right)}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}+\frac{q^6\left(\cos\frac{\pi u}{K}+q^6\right)}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}\Big)}+\cdots$$

Um die Gleichung

$$\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sin x\frac{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)}\cdots$$

zur Transformation geschickt zu machen, nehme man die Logarithmen.

Die zusammengehörigen Argumente x_1 und x_2 sind dann leicht in die geeignete Form zu bringen und da

$$\sin\mathrm{am}\frac{2Kx_1}{\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2Kx_2}{\pi}=\sin\varphi_1\sin\varphi_2=\frac{\cos\alpha}{1-\varkappa'}$$

ist, so ergibt sich

118) $\sqrt{\frac{\varDelta - z'}{\varDelta + z'}} =$

$$2\sqrt{q}\cos\frac{\pi u}{2K}\frac{\left(1+2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+q^8\right)\left(1+2q^8\cos\frac{\pi u}{K}+q^{16}\right)\ldots}{\left(1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4\right)\left(1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}\right)\ldots},$$

und diese Gleichung geht für $u = 0$ über in

$$119)\quad \sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}} = 2\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^4)(1+q^8)\ldots}{(1+q^2)(1+q^6)\ldots}\right]^2.$$

Führen wir hierin $\frac{1-z'}{1+z'} = z$ und $q^2 = q$ ein, so folgt

$$120)\quad \sqrt{z} = 2\sqrt[4]{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right].$$

Mit dieser verbinden wir die in der Theorie der elliptischen Functionen bekannte Relation

$$\frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{z'}\sqrt[4]{q}} = \left[\frac{(+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}\right]^2$$

und erhalten die neue Formel

$$121)\quad \sqrt[4]{z'} = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}.$$

Infolge der einfachen Ausführung einer auf 118) bezüglichen 2. Transformation gewinnt man noch

122) $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} =$

$$2q\cos\frac{\pi u}{2K}\frac{\left(1+2q^8\cos\frac{\pi u}{K}+q^{16}\right)\left(1+2q^{16}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{32}\right)\ldots}{\left(1+2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+q^8\right)\left(1+2q^{12}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{24}\right)\ldots},$$

woraus

$$123)\quad \frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}} = 2q\left[\frac{(1+q^8)(1+q^{16})\ldots}{(1+q^4)(1+q^{12})\ldots}\right]^2.$$

Eine nochmalige Transformation würde zur folgenden Formel führen

$$124)\quad \frac{\sqrt{1+\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}}-\sqrt{1-\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}}}{\sqrt{1+\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}}+\sqrt{1-\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}}}$$

$$= 2q^2\cos\frac{\pi u}{2K}\frac{\left(1+2q^{16}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{32}\right)\dots}{\left(1+2q^8\cos\frac{\pi u}{K}+q^{16}\right)\dots}$$

Der Ausdruck links ist geeignet zu einer goniometrischen Umformung. Wegen $\alpha = 90^0 - \tau$ können wir setzen

$$125)\quad \frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\tau = \sin 2\gamma,\qquad \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\sin\tau = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{z}{z'}\cos\varphi = \operatorname{tg}2\psi,$$

also

$$126)\qquad \operatorname{tg}\gamma = 2q^2\cos\frac{\pi u}{2K}\frac{\left(1+2q^{16}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{32}\right)\dots}{\left(1+2q^8\cos\frac{\pi u}{K}+q^{16}\right)\dots}$$

und wegen

$$127)\quad \arcsin\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} =$$

$$4\left(\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\dots\right),$$

folgt also auch

$$128)\qquad \frac{1}{2}\gamma = \frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\dots$$

Diese Ableitungen können zur Berechnung der zum Argument u gehörenden Amplitude φ benutzt werden.

Wie bekannt ist, lassen sich die Factorenfolgen durch Reihensummen ersetzen.

$$Q(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots$$
$$= 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\dots$$

$$Q\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\dots$$
$$= \sqrt[4]{q}\sin x-\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x\ \dots,$$

darin bedeutet

$$Q = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots$$

Indem man also die vorhin gefundenen Gleichungen für diese Fälle einrichtet, hat man

$$129)\quad \sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'}} = \frac{2q^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi u}{2K} + 2q^{\frac{9}{2}} \cos \frac{3\pi u}{2K} + 2q^{\frac{25}{2}} \cos \frac{5\pi u}{2K} \ldots}{1 + 2q^2 \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^8 \cos \frac{2\pi u}{K} \ldots},$$

ferner

$$130)\quad \sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} = \frac{2q \cos \frac{\pi u}{2K} + 2q^9 \cos \frac{3\pi u}{2K} + 2q^{25} \cos \frac{5\pi u}{2K} + \ldots}{1 + 2q^4 \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^{16} \cos \frac{2\pi u}{K} + \ldots}$$

u. s. w.

Als Specialfälle findet man aus diesen

$$131)\quad \sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}} = 2\sqrt{q}\, \frac{q + q^4 + q^{12} + \ldots}{1 + 2q^2 + 2q^8 + \ldots},$$

$$\frac{1 - \sqrt{z'}}{1 + \sqrt{z'}} = 2\, \frac{q + q^9 + q^{25} + \ldots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots},$$

und deren transformirte

$$\sqrt{z} = 2\sqrt[4]{q}\, \frac{1 + q^2 + q^6 \ldots}{1 + 2q + 2q^4 \ldots}.$$

Führen wir hinsichtlich dieser Reihenquotienten die Thetafunctionen

$$132)\quad \begin{aligned} \vartheta\,(z) &= 1 - 2e^{-\varrho}\cos 2z + 2e^{-4\varrho}\cos 4z - 2e^{-9\varrho}\cos 6z + \ldots, \\ \vartheta_1(z) &= 2\sqrt[4]{e^{-\varrho}}\sin z - 2\sqrt[4]{e^{-9\varrho}}\sin 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\varrho}}\sin 5z + \ldots, \\ \vartheta_2(z) &= 2\sqrt[4]{e^{-\varrho}}\cos z + 2\sqrt[4]{e^{-9\varrho}}\cos 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\varrho}}\cos 5z + \ldots, \\ \vartheta_3(z) &= 1 + 2e^{-\varrho}\cos 2z + 2e^{-4\varrho}\cos 4z + 2c^{-9\varrho}\cos 6z + \ldots \end{aligned}$$

ein, worin

$$\varrho = \frac{\pi K'}{K} \quad \text{und} \quad z = \frac{\pi u}{2K},$$

so ergiebt sich nach dem Vorhergehenden

$$133)\quad \begin{aligned} &\sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'}} = \frac{\vartheta_2(2\varrho z)}{\vartheta_3(2\varrho z)}, \quad \sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{\vartheta_1(2\varrho z)}{\vartheta(2\varrho z)}, \\ &\sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau = \frac{\vartheta_2(4\varrho z)}{\vartheta_3(4\varrho z)}. \end{aligned}$$

Benutzt man noch die bekannte Differentialformel der Thetafunctionen

$$\frac{d\left(\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}\right)}{dz} = -\frac{u\vartheta(z)\vartheta_1(z)}{\vartheta_3(z)^2},$$

so folgt

$$\text{134)}\quad \frac{2Kz'z\sin\varphi}{\pi(\Delta + z')} = \frac{u\vartheta_2\,\varrho z\,\vartheta_1\,2\varrho z}{(\vartheta_3\,2\varrho z)^2}.$$

Zweiter Teil.

VIII.

Die in ihren Folgen wichtigste Transformation bezieht sich auf die jetzt noch zu betrachtende Reihe für $\ln \Delta\varrho$

$$\ln\Delta\varphi = \frac{1}{2}\ln z' + 4\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{K} + \cdots\right)$$

Zunächst folgt für die Addition

$$\Delta\varphi_1\,\Delta\varphi_2 = z'.$$

Dagegen gibt die Subtraction

$$\text{1)}\quad \ln\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2} = -8\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right).$$

Für $\ln\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2}$ können wir unter Benutzung der obigen bekannten Formel $\ln\frac{\Delta\varphi_1^2}{z'}$ oder $-\ln\frac{\Delta\varphi_2^2}{z'}$ schreiben. Da nun aber $\Delta\varphi_1^2 = 1 - z^2\sin\varphi_1^2$ ist, so führen wir die in I. entwickelten Werte für $\sin\varphi_1^2$ und $\sin\varphi_2^2$ ein, wonach für beide Ausdrücke die Relation

$$2\Delta\varphi^2 = 2 - z^2 - (1+z')^2\cos\alpha^2 \pm (1+z')\sin\alpha\sqrt{(1-z')^2 - (1+z')^2\cos\alpha^2}$$

gilt. Daher haben wir unter Benutzung der Exponentialfunction

$$\text{2)}\quad \begin{aligned} &2 - z^2 - (1+z')^2\cos\alpha^2 \pm (1+z')\sin\alpha\sqrt{(1-z')^2 - (1+z')^2\cos\alpha^2} \\ &= 2z'e^{\pm 8\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right)}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen nun die periodische Function dieses Ausdrucks mit x, indem wir damit die Abscisse eines Punktes einer noch anzugebenden Curve bezeichnen. Also sei

3) $$x = 8\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\cdots\right).$$

Die Gleichung 2) nimmt nun die folgende doppelte Form an

4) $$\frac{1+z'^2-(1+z')^2\cos\alpha^2}{2z'} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\frac{(1+z')\sin\alpha\sqrt{(1-z')^2-(1+z')^2\cos\alpha^2}}{2z'} = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Hierin müssen noch die sin und cos α mittelst der in der Einleitung gegebenen Werte durch die Amplitude φ ersetzt werden. Man wird haben

5) $$\frac{1+z'\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}}{z'+\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\frac{z^2\sin\varphi}{z'+\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}} = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Bezeichnen wir endlich den variabeln Ausdruck der linken Seite der ersten Gleichung mit y, so ist

6) $$y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

die bekannte Gleichung der Kettenlinie, deren Eigenschaften für die geometrische Durchführung der gegebenen Transformation von hoher Bedeutung sind. Wir haben demnach zu zeigen, dass die elliptischen Functionen und ihre Reihenentwickelungen durch die Geometrie der Kettenlinie eine wertvolle Bereicherung und Ergänzung erfahren können und wollen daher zunächst an die schon bekannten Eigentümlichkeiten dieser Curve erinnern. (Fig. 2.)

Der Differentialquotient

7) $$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \operatorname{tg}\delta = s$$

hat erstens die bekannte trigonometrische Bedeutung $\operatorname{tg}\delta$ und zweitens bedeutet er die zur Abscisse x gehörenden Curvenbogen s, wenn man wie hier geschehen, den tiefsten Punkt als Anfangspunkt der Bogenlängen nimmt und die Constante $= 1$ setzt. Diese Bemerkung nebst der Formel $y^2 = s^2+1$ oder $y = \frac{1}{\cos\delta}$ und der daraus sich ergebenden Eigenschaft, dass die Projection der Ordinate y auf die Tangente eine Strecke gleich dem Bogen s bestimmt, welche von dem zur Ordinate gehörenden Abscissenpunkt die Entfernung gleich 1 hat, genügt für die folgenden Auseinandersetzungen.

Demgemäss haben wir

$$8)\qquad y=\frac{1+z'\varDelta}{z'+\varDelta},\quad s=\operatorname{tg}\delta=\frac{z^2\sin\varphi}{z'+\varDelta},$$
$$u=\int\frac{dy}{\sqrt{(1+z'^2-2z'y)(y^2-1)}}.$$

Es kommt nun vor allem darauf an, die Amplitude φ in geometrischen Sinne zu definiren. Die Berechnung derselben aus den obigen Formeln führt auf folgenden einfachen Ausdruck

$$9)\qquad \sin\varphi=\frac{s}{y-z'},$$

dessen Construction in Folge der Eigenschaften der Kettenlinie sehr einfach ist. Indem wir also festsetzen, dass durch die Reihe 3) die entsprechende Abscisse der Curve charakterisirt sei, wird auch y und die Gerade s bestimmt. Daher kann man für alle Fälle eine zur x-Achse parallele Gerade vom Abstand z' benutzen, um mit der Differenz $y-z'$ gleich um den entsprechenden Curvenpunkt xy einen Kreisbogen bis zum Durchschnitt mit jener Einheitsverticalen ziehen zu können. Die letztere schliesst mit der Verbindungsgeraden beider genannten Punkte die gesuchte Amplitude φ ein.

Bezüglich der Reihe für x bemerken wir, dass dieselbe auch auf eine andere Form gebracht werden kann.

Aus der bekannten Formel

$$-\tfrac{1}{2}\ln(1-2q\cos x+q^2)=q\cos x+\tfrac{1}{2}q^2\cos 2x+\tfrac{1}{3}q^3\cos 3x\ \ldots$$

lässt sich die folgende ableiten

$$\frac{1}{4}\ln\frac{1+2q\sin x+q^2}{1-2q\sin x+q^2}=q\sin x-\tfrac{1}{3}q^3\sin 3x+\tfrac{1}{5}q^5\sin 5x\ldots$$

Demzufolge entwickeln wir in

$$\frac{x}{8}=\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\cdots$$

die Brüche in Reihen und schreiben

$$\frac{x}{8}=(q+q^3+q^5\ldots)\sin\frac{\pi u}{2K},$$
$$-(q^3+q^9+q^{15}\ldots)\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi u}{2K},$$
$$+(q^5+q^{15}+q^{25})\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi u}{2K},$$

. . . .

Werden hierin die Verticalreihen mittelst der genannten Formel summirt, so gelangt man zum Resultate

$$10)\quad x = 2\ln\frac{(1+2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)(1+2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)\dots}{(1-2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)(1-2q^3\sin)\frac{\pi u}{2K}+q^6)\dots},$$

oder

$$11)\quad e^x = \frac{1+z'\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}+z^2\sin\varphi}{z'+\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}} = y+s$$

$$= \frac{(1+2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)^2(1+2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)^2\dots}{(1-2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)^2(1-2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)^2\dots}$$

woraus noch für $u = K$, $\varphi = 90^0$ ein schon früher entwickelter Ausdruck

$$12)\quad \sqrt{z'} = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots}\right]^2$$

folgt.

Wir haben den Winkel der Tangente mit der x-Achse durch δ bezeichnet, wir führen noch seinen Complementwinkel $\varepsilon = 90^0-\delta$ als Winkel der Tangente mit der y-Achse ein, beachten den Ausdruck

$$y+s = y+\sqrt{y^2-1}$$

und substituiren

$$y = \frac{1}{\cos\delta} = \frac{1}{\sin\varepsilon},$$

dann resultirt

$$13)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{(1-2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)^2(1-2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)^2\dots}{(1+2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)^2(1+2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)^2\dots}.$$

Der eingeführte Winkel ε der Tangente mit der y-Achse wird demnach durch ein unendliches Product ausgedrückt.

Die in VI. 108) entwickelte Reihe lässt sich zur Darstellung von y als Ordinate der Curve verwerten, wenn wir beachten, dass $y = \frac{1+z'\varDelta}{z'+\varDelta}$ ist. Führen wir diese Substitution ein, so resultirt

$$14)\quad y = \frac{E}{z'K} - \frac{4\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{K}\dots\right).$$

Um für y noch andere Entwickelungen anzubahnen, gehen wir auf die Reihe 87)

$$\sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'}} = \frac{4\pi}{zK}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6} - \frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

zurück und berücksichtigen, dass

$$y = \frac{z'\Delta + 1}{\Delta + z'}$$

ist. Führen wir das hieraus berechnete Δ in die obige Reihe ein, so erhalten wir

$$15)\quad \sqrt{1 + z'^2 - 2z'y} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right).$$

Man kann übrigens auch noch den folgenden Ausdruck leicht aufstellen, wenn man $2z'y = (1+z')^2 \cos\alpha^2$ setzt und die Formel 29) beachtet. Daher ist:

$$16)\quad y = \frac{(1-z')^2}{4z'} + \frac{(1+z')^2}{4z'}\cos 8\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right),$$

woran sich später noch andere anschliessen werden.

Um neue Formeln herzuleiten, differentiiren wir 15) nach y und und u, man hat

$$dy = \frac{8\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\dots\right) \times \left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\dots\right) du,$$

ebenso ergibt die Differentiation von x

$$dx = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\dots\right) du.$$

Aus beiden Reihen folgt durch Division

$$17)\quad \frac{dy}{dx} = s = \operatorname{tg}\delta = \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{5q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\dots\right).$$

Damit haben wir die trigonometrische Tangente oder den gleichwertigen Ausdruck für den Bogen s durch eine Reihe ausgedrückt.

Eine andere geometrische Beziehung lässt sich wie folgt ableiten:

In VI. haben wir die Reihe

$$\frac{\Delta - z'}{\cos\varphi} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

aufgestellt, welche wir mit der Kettenlinie in Verbindung bringen können.

Berechnet man nämlich s als Function von φ, so ergeben die obigen Werte

$$s = \operatorname{tg}\varphi \frac{\sqrt{1 - z_2 \sin\varphi^2} - z'}{\cos\varphi}.$$

Der daraus folgende Ausdruck

$$s \cot\varphi = \frac{\Delta - z'}{\cos\varphi}$$

bedeutet geometrisch die auf der Einheitsnormalen durch CF bezeichnete Gerade l, welche demnach durch die Relation

$$18)\qquad l = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

bestimmt ist.

Man bemerke aber, dass sowohl $s.\cot\varphi = l$ als auch s durch Reihen gegeben sind, der Quotient wird demnach in einer Beziehung zu $\operatorname{tg}\operatorname{am} u$ stehen. Daher folgt das Resultat

$$19)\qquad \operatorname{tg}\operatorname{am} u = \frac{\pi}{2z'K}\,\frac{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots}.$$

Diese neue Formel ist unter anderm auch aus dem Grunde bemerkenswert, weil sie zur Aufstellung einer Differentialgleichung Veranlassung gibt. Wie man bemerkt, ist der Zähler das Differential des Nenners. Führen wir demnach ein

$$20)\qquad Z = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\ldots,$$

so haben wir nach einigen Zwischenrechnungen

$$21)\qquad -\frac{dZ}{Z} = z'\operatorname{tg}\operatorname{am} u.du.$$

Substituiren wir hierin die bekannte Formel

$$z'\operatorname{tg}\operatorname{am}u = \frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right),$$

so ergibt sich ohne Mühe aus

$$-\int\frac{dZ}{Z} = \frac{2\pi}{K}\int\left(\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}\ldots\right)du$$

das allgemeine Integral

$$-\ln Z = -\ln\cos\frac{\pi u}{2K} + 1\frac{2q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{1}{2}\frac{2q^4}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constanten setzen wir $u = 0$, dann ist

$$-\ln Z_0 = \frac{1}{1}\frac{2q^2}{1+q^2} - \frac{1}{2}\frac{2q^4}{1+q^4} + \frac{1}{3}\frac{2q^6}{1+q^6} - \ldots + \text{Const.}$$

Da aber

$$Z = \frac{K}{4\pi}\sqrt{1+z'^2-2z'y},$$

so ist

$$Z_0 = \frac{K}{4\pi}(1-z'),$$

so dass man schliesslich hat, wenn man noch

21) $$\sqrt{1+z'^2-z'y} = z\sqrt{\frac{\varDelta - z'}{\varDelta + z'}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}\cdot\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}}$$

beachtet

22)

$$\frac{1}{8}\ln\sqrt{\frac{\varDelta-z'}{\varDelta+z,}\,\frac{1+z'}{1-z'}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi u}{2K}} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u^2}{2K} - \frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u^2}{2K} +$$

$$\ln\frac{1+z'}{1-z'}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \ln\sin\frac{\pi u}{2K} + 8\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u^2}{2K} - \frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u^2}{2K} + \ldots\right)$$

Eine zweite Anwendung der Differentialgleichung 21) geht unter Benutzung der Relation $\operatorname{tg}\operatorname{am}u = \operatorname{tg}\varphi$ in Verbindung mit $du = \frac{d\varphi}{\varDelta}$ hervor. Daher ist

23) $$\frac{dZ}{Z} = -\frac{z'\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}}$$

zu integriren.

Das Integral

$$\ln Z = -\varkappa' \int \frac{\operatorname{tg}\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin\varphi^2}}$$

kann durch Einführung von $\cos\varphi = x$ auf folgende Art geschrieben werden:

$$\ln Z = \varkappa' \int \frac{dx}{x\sqrt{\varkappa'^2 + \varkappa^2 x^2}}$$

und ist, wie nach bekannten Methoden ersichtlich ist, ebenfalls logarithmisch. Man findet schliesslich das folgende Resultat:

$$\ln Z = \ln \frac{\varkappa\cos\varphi - \varDelta + \varkappa'}{\varkappa\cos\varphi - \varDelta - \varkappa'} + \text{Const.}$$

Für $\varphi = 0$ wird

$$Z_0 = \frac{1-\varkappa'}{4\pi} . K,$$

so dass

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{\varkappa - 1 - \varkappa'}{\varkappa - 1 + \varkappa'} \frac{\varkappa\cos\varphi - \varDelta + \varkappa'}{\varkappa\cos\varphi - \varDelta - \varkappa'},$$

und endlich

$$24) \quad \frac{K\varkappa}{4\pi} \frac{\varkappa\cos\varphi - \varDelta + \varkappa'}{\varkappa\cos\varphi + \varDelta + \varkappa'} = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots$$

Aus der letzten Formel folgt noch

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa'} \frac{\varkappa\cos\varphi - \varDelta + \varkappa'}{-\varkappa\cos\varphi + \varDelta + \varkappa'}}.$$

IX.

Der Differentialquotient von s kann auch benutzt werden, um eine neue Relation für y herzustellen. Aus derselben entwickeln wir dann eine kubische Gleichung, deren Absolutglied eine periodische Function ist. Aus 7) folgt

$$\frac{ds}{du} = \frac{\pi^3}{\varkappa' K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{25 q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} \cdots\right).$$

und wenn man beachtet, dass $\int y\,dx = s$, also $y = \frac{ds}{dx}$ ist, bei Berücksichtigung des Wertes von $\frac{dx}{du}$

$$25)\quad y = \frac{\pi^2}{4z'K^2}\,\frac{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots}.$$

Den Nenner dieses Quotienten können wir durch den Ausdruck

$$26)\quad \frac{K}{4\pi}\sqrt{1+z'^2-2z'y} = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots$$

ersetzen. Erheben wir darauf die Formel auf die 2. Potenz und ordnen nach Potenzen von y so, so erhalten wir die kubische Gleichung

$$27)\quad y^3 - \frac{1+z'^2}{2z'}y^2 + \frac{\pi^6}{2z'^3K^6}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3q u}{2K} + \frac{25q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\cdots\right)^2 = 0,$$

mit deren Untersuchung wir uns zunächst beschäftigen wollen.

Das zweite Glied ist nur vom Modulus z abhängig. Der Coefficient des folgenden ist = Null, woraus sich auf gewisse Beziehung der Gleichung zu den reducirten kubischen Gleichungen schliessen lässt. Das durch eine periodische Reihe ausgedrückte Absolutglied ist stets positiv, wie auch die hier geometrisch brauchbare Wurzel stets grösser als 1 sein muss.

Machen wir die Gleichung mit der

$$28)\quad y^3 - Ay^2 + C = 0$$

identisch, so folgt aus $A = \frac{1+z'^2}{2z'}$ der Modulus

$$29)\quad z' = A - \sqrt{A^2-1},$$

und ferner ist

$$30)\quad \frac{K^3}{\pi^3}\sqrt{2z'^3C} = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots,$$

und vermöge 25)

$$31)\quad y = \frac{K}{4\pi}\,\frac{\sqrt{2z'C}}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots}.$$

Unter gewissen noch anzugebenden Bedingungen würde demnach die obige reducirte Gleichung vermittelst elliptischer Functionen lös-

bar sein, indem aus den Constanten derselben der Modulus auf einfache Art bestimmt werden kann und in Folge der hierdurch bekannten K und q die Aufgabe von der Lösung der transcendenten Reihe abhängt. Sofern q klein ist, und dies ist meistens der Fall, ergibt sich durch Versuche der Wert von u, so dass y ebenfalls bekannt ist. Da diese Bestimmung wenigstens theoretisches Interesse hat, so wollen wir noch die Bedingungen der Aufgabe in Kürze aufsuchen. Wird $y = 1$ gesetzt, ist also

$$\frac{K^3}{\pi^3} z'(1-z') = \frac{q}{1-q^2} - \frac{9q^3}{1-q^6} + \frac{25q^5}{1-q^{10}} \cdots,$$

so wird stets in den andern Fällen

$$\frac{K^3}{\pi^3}\sqrt{2z'^3 C} < \frac{q}{1-q^2} - \frac{9q^3}{1-q^6} + \cdots,$$

d. i.

$$\frac{K^3}{\pi^3}\sqrt{2z'^3 C} < \frac{K^3}{\pi^3} z'(1-z')$$

sein müssen. Oder einfacher, es muss

$$C < \frac{1+z'^2}{2z'} - 1,$$

d. i.

$$C < A - 1$$

sein. Da ausserdem auch $A > 1$, wie aus 29) hervorgeht, so setzen wir für eine allgemeinere Betrachtung die Gleichung

$$x'^3 - ax x'^2 + c = 0 \tag{32}$$

fest, worin a und c vorläufig willkürliche positive Zahlen sein mögen, und setzen $x' = ny$.

Also wäre

$$y^3 - \frac{a}{n} y^2 + \frac{c}{n^3} = 0$$

mit der Gleichung 28) in Beziehung zu bringen. Gemäss der obigen Bedingung hat man

$$\frac{c}{n^3} < \frac{a}{n} - 1 \quad \text{oder} \quad c < an^2 - n^3.$$

Da aber $\frac{a}{n} = \frac{1+z'^2}{2z'}$ d. i. $n = \frac{2z'a}{1+z'^2}$ ist, so muss

$$\frac{c}{4a^3} < \frac{z'^2(1-z')^2}{(1+z'^2)^3}$$

sein. Oder was dasselbe ist

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a^3}} < \frac{z'(1-z')}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die weitere Untersuchng hätte sich nun mit dem Ausdruck rechter Hand zu beschäftigen, der für verschiedene Moduli verschiedene Werte erhält. Daher muss der Grenzfall des grössten Wertes gesucht, d. h.

$$\frac{z'(1-z')}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

differentiirt werden. Der hieraus berechnete dem Maximum des obigen Ausdrucks entsprechende Wert von z' bestimmt die Grenze für

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a^3}},$$

welche nicht überschritten werden darf.

Die Differentiation führt auf

$$z'^3 - 2z'^2 - 2z' + 1 = 0,$$

woraus für den Grenzfall

$$z' = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Eingesetzt in die Ungleichung folgt

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a^3}} < \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad c < \frac{4a^3}{27}.$$

Man wird schon in dieser Bestimmung das für reducirte kubische Gleichungen von der Form

$$x^3 - px + q = 0 \tag{33}$$

wesentliche Unterscheidungsmerkmal für reelle und imaginaire Wurzeln erkannt haben. Indem wir die letztere Gleichung anstatt der früheren hier benutzen, also $x = \frac{1}{x'}$, $a = \frac{p}{q}$, $c = \frac{1}{q}$ einführen, geht die Ungleichung in die folgende

$$27q^2 < 4p^3$$

(dessen q mit dem q der periodischen Reihen nicht verwechselt werden darf) über, welche die Bedingung von 3 reellen Wurzeln ausdrückt.

Die Gleichungen, welche wir vorhin gefunden, beziehen sich also auf den casus irreductibilis, worin eine Wurzel die Ordinate y ausdrückt.

Aus der Transformation der obigen Gleichungen resultirt demnach

$$34)\quad \frac{1}{2}(1+\varkappa'^2)\frac{q}{p}\frac{K^3}{\pi^3}\sqrt{\frac{1+\varkappa'^2}{p}} = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots$$

Wenn man mit Umgehung des Grenzfalles, für den es einer Unterscheidung nicht mehr bedarf, ein bestimmtes $\varkappa$ wählt, so muss

$$35)\qquad \frac{q^2}{4p^3} < \frac{\varkappa'^2(1-\varkappa')^2}{(1+\varkappa'^2)^3} \quad \text{sein.}$$

Die Constanten q und K sind dadurch gegeben, so ist z. B. für $\varkappa^2 = \frac{3}{4}$ und $\frac{q^2}{p^3} < \frac{16}{125}$, $q = 0{,}085\,7957$, $K = 2{,}156\,515$. Bei kleinen Werten von q ist die Berechnung von u nicht besonders umständlich.

Die durch eine periodische Reihe darstellbare Wurzel der Gleichung ist dann

$$36)\quad x = \frac{4\pi}{K}\sqrt{\frac{p}{1+\varkappa'^2}}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \dots\right).$$

Wir geben nachher auch noch die Auflösung der übrigen durch die Cardani'sche Formel lösbaren Fälle der kubischen Gleichungen vermittelst der Kettenlinie.

X.

In 19) haben wir $\operatorname{tg}\operatorname{am} u$ in Form eines Quotienten durch zwei periodische Functionen ausgedrückt, so dass die Frage entsteht, ob ebenfalls $\sin\operatorname{am} u$ und $\cos\operatorname{am} u$ auf ähnliche Art bestimmbar seien. Wir erinnern zu dem Ende an die Reihe 104)

$$E\varphi = \frac{\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+\varkappa'} + \frac{E}{K}u - \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots\right),$$

welche wir mit

$$E\varphi = \frac{E}{K}u + \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots\right)$$

durch Subtraction verbinden. Man findet folgende Relation

$$37)\quad \frac{\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+\varkappa'} = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + q^2\frac{(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + q^3\frac{(1+q^3)^2}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{K}\dots\right).$$

Dieselbe lässt sich mit der Reihe 17) für s weiter verbinden.

Die Division beider ergibt geordnet

$$38)\quad \cos\mathrm{am}\, u = \frac{s'K}{\pi} \frac{q\frac{(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + q^2\frac{(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots}{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \dots}$$

woraus noch nach Multiplication von $\mathrm{tg\,am}\, u$

$$39)\quad \sin\mathrm{am}\, u = \frac{1}{2} \frac{q\frac{(1-q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + q^2\frac{(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots}$$

folgt.

Beide Reihen besitzen gleichen Zähler.

Da $\sin\varphi = \frac{s}{y-z'}$ ist, so kann man für $\sin\mathrm{am}\, u$ und ebenso für $\cos\mathrm{am}\, u$ zwei analoge Ausdrücke leicht herstellen, wenn man die für s und y entwickelten Reihen einsetzt. Die Reihe

$$40)\quad z'y = \frac{E}{K} = \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \dots\right)$$

wird für $y = \frac{1+z'^2}{2z'}$ zum Maximum, d. h. es ist

$$\tfrac{1}{2}(1+z'^2) = \frac{E}{K} + \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4} + \frac{2q^4}{1-q^8} + \frac{3q^6}{1-q^{12}} + \dots\right),$$

und für $y = 1$ zum Minimum

$$z' = \frac{E}{K} - \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4} - \frac{2q^4}{1-q^8} + \frac{3q^6}{1-q^{12}} \dots\right),$$

welche Formeln mit früheren übereinstimmen. Die Differenz beider möge man mit früheren Ableitungen vergleichen.

Man kann nun die obige Reihe für y in folgender Art zur Bildung neuer Beziehungen verwerten. In Folge der Bedeutung von

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

besteht demnach die Reihe

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{E}{Kz'} - \frac{4\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \dots\right).$$

Wir Differentiiren sie unter Beachtung des in VIII. gegebenen Wertes von $\frac{dx}{du}$, welcher in

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{dx}{du} = \frac{4\pi}{z' K^3} \left(\frac{q^2}{1-q^4} \sin \frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8} \sin \frac{2\pi u}{K} + \ldots \right)$$

eingesetzt, den neuen Ausdruck für

$$41) \quad s = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \delta = \frac{\pi^2}{z' K^2} \frac{\frac{1q^2}{1-q^4} \sin \frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8} \sin \frac{2\pi u}{K} + \ldots}{\frac{q}{1-q^2} \cos \frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6} \cos \frac{3\pi u}{2K} + \ldots}$$

hervorgehen lässt.

Bemerkt man aber, dass der Nenner dieses Bruches durch $\frac{K}{4\pi} \sqrt{1 + z'^2 - 2z'y}$ ersetzt werden kann, und dass ferner $s = \sqrt{y^2 - 1}$, so geht unter diesen Substitutionen das letzte Resultat durch Quadriren und Ordnen nach Potenzen von y in das folgende über

$$42) \quad y^3 - \frac{1+z'^2}{2z'} y^2 - y + \frac{1+z'^2}{2z'} + \frac{8\pi^6}{z'^3 K^6} \left(\frac{q^2}{1-q^4} \sin \frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8} \sin \frac{2\pi u}{K} \ldots \right)^2 = 0,$$

so dass wiederum y durch eine jetzt vollständige kubische Gleichung, deren Coefficienten bestimmten Reducenten genügen müssen, bestimmt ist. Auch hier ist das stets positive Absolutglied durch eine periodische Reihe definirt.

Im Anschluss an die in 134) aufgestellte Beziehung, welche auch in

$$43) \quad \frac{2K}{\pi} \frac{z' z^2 (\sin \varphi \cos \varphi}{(\Delta + z')^2} = u \frac{\vartheta 2\varrho z . \vartheta_1 2\varrho z . \vartheta_2 2\varrho_2}{(\vartheta_3 2\varrho z)^3}$$

umgewandelt werden kann, und worin wir $\sin \varphi$ durch $\frac{s}{y - z'}$, ferner s durch $\frac{z^2 \sin \varphi}{(\Delta + z')}$ ersetzen, resultirt der der obigen kubischen Gleichung entsprechende transformirte Wert

$$44) \quad y^3 - \frac{1+z'^2}{2z'} y^2 - y + \frac{1+z'^2}{2z'} + \frac{\pi^2 z^4}{8z'^3 K^2} u^2 \left(\frac{\vartheta 2\varrho z . \vartheta_1 2\varrho z . \vartheta_2 2\varrho z}{\vartheta_3 2\varrho z} \right)^2 = 0,$$

worauf wir hier aufmerksam machen. Die daraus hervorgehenden Beziehungen und Identitäten wollen wir indessen nicht weiter hier discutiren.

Durch Combination der für $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $s = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ aufgestellten Reihen erhält man die Entwickelung von $e^{\pm x}$.

Aus der Addition von

$$45)\quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{E}{z'K} - \frac{4\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \dots\right),$$

und

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

folgt demnach die folgende Reihe mit eigentümlichem Bildungsgesetz

$$46)\quad e^x = \frac{E}{z'K} + \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{2K}\right.$$
$$\left. - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{4q^4}{1-q^8}\cos\frac{4\pi u}{2K} \dots\right),$$

und vermittelst Subtraction die ihr analoge

$$47)\quad e^{-x} = \frac{E}{z'K} - \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{2K}\right.$$
$$\left. - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\cos\frac{4\pi u}{2K} \dots\right),$$

die sich durch symmetrische Ordnung auszeichnen.

Die in 11) entwickelte Function für $e^{\frac{x}{2}}$ lässt sich mit Anwendung bekannter Formeln leicht durch einen aus zwei einfach periodischen Quotienten wie folgt ausdrücken.

Für

$$x = \ln\left(\frac{1 + z'\Delta + z^2\sin\varphi}{z' + \Delta}\right)$$

folgt

$$48)\quad e^{\frac{x}{2}} = \frac{1 + 2q\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^4\cos\frac{2\pi u}{2K} - 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{16}\cos\frac{4\pi u}{2K} + \dots}{1 - 2q\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^4\cos\frac{2\pi u}{2K} + 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{16}\cos\frac{4\pi u}{2K} - \dots}$$

Die Reihenentwickelungen für die Coordinaten der Kettenlinie sind, wie aus Vorstehendem ersichtlich ist, sehr mannichfach und zeigen, wie sehr die Eigenschaften der Curve in analytischer Hin-

sicht durch Anwendung auf die elliptischen Functionen sich letzteren anschmiegen. Um noch andere Beziehungen geometrisch-analytischer Natur aufzustellen, wollen wir zunächst an die bekannte Formel

$$\cos x - p\cos 3x + p^2\cos 5x\,,\ldots = \frac{(1+p)\cos x}{1+2p\cos 2x+x^2}$$

erinnern, um mit Hülfe derselben einen andern Reihenausdruck abzuleiten.

Die häufig auftretende Reihe

$$\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \ldots$$

können wir durch Entwickelung der Brüche in geeigneter Reihenfolge leicht durch Partialquotienten von der Form

$$\frac{q(1+q^2)\cos\frac{\pi u}{2K}}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}$$

transformiren, daher ist vermöge der bekannten Bedeutung der Formel 18) der Ausdruck für l

$$49)\quad l = \frac{4\pi}{K}\cos\frac{\pi u}{2K}\left(\frac{q(1+q^2)}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4} + \frac{q^3(1+q^6)}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}\ldots\right)$$

und

$$50)\quad \sqrt{1+z'^2-2z'y} = z\sqrt{\frac{\varDelta-z'}{\varDelta+z'}}$$

$$= \frac{4\pi}{K}\cos\frac{\pi u}{2K}\left(\frac{q(1+q^2)}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4} + \frac{q^3(1+q^6)}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}\ldots\right)$$

Der in 19) für tgam$u$ abgeleitete Wert kann auch mit Hilfe der bekannten Relation

$$\frac{d}{du}\left(\ln\sqrt{\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}}\right) = \cot\operatorname{am} u,\quad \text{Durège § 58.}$$

aus der früher entwickelten Reihe

$$\sqrt{\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}} = \frac{4\pi}{2K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

hergeleitet werden, indem man letztere logarithmisch differentiirt.

Man findet ohne Mühe

$$51)\quad \operatorname{cotam} u = \frac{\pi}{2K}\,\frac{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\dots}{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\dots}$$

woraus vermittelst einer Umwandlung die erwähnte Formel hervorgeht.

Wir wollen ferner die Reihe für $\operatorname{tg}\delta$, also

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\dots\right)$$

in Beziehung auf δ und u differentiiren, man findet

$$\frac{d\delta}{\cos\delta^2} = \frac{\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\dots\right),$$

wird ebenfalls $y=\frac{1}{\cos\delta}$ differentiirt und endlich noch die Reihe 14) für y, so hat man zunächst

$$\frac{dy}{d\delta} = \frac{\sin\delta}{\cos\delta^2}\quad\text{oder}\quad \frac{d\delta}{\cos\delta^2}=\frac{dy}{\sin\delta},$$

$$\frac{z'dy}{du} = \frac{4\pi^3}{K^3}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}+\dots\right).$$

Eliminirt man also $\frac{d\delta}{\cos\delta^2}$ aus den beiden ersten Formeln und ersetzt $\frac{dy}{du}$ mittelst der letzten, so erhält man das Resultat

$$52)\qquad \sin\delta = 4\,\frac{\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}+\dots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\dots}.$$

Man kann diese Entwickelungen in geometrischer Hinsicht deuten. Die Tangente der Kettenlinie im Punkte P schneide die Abscissenaxe in R. Bezeichnen wir nun die Strecken AR derselben zwischen der Tangente und der Ordinate y mit g, so ist

$$g\sin\delta = 1.$$

Daher ist vermöge des obigen Reihenausdrucks für $\sin\delta$

$$53)\qquad g = \frac{1}{4}\,\frac{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\dots}{\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}+\dots}.$$

XI.

Wir geben noch im Folgenden diejenigen Reihenentwickelungen, welche als Functionen einer durch die Kettenlinie dargestellten geometrischen Beziehung, sei es eine Gerade, Fläche oder Winkel, von einiger Wichtigkeit sind.

Hinsichtlich der Ableitung dieser und anderer bemerken wir, dass hierfür zuweilen mehrere Wege offen stehen.

Der Flächeninhalt des rechtwinkligen durch die Katheten s und l gebildeten Dreiecks kann man unter Benutzung der Differentialformel für y in Verbindung mit der aus

$$y=\frac{1+z'\Delta}{1+\Delta}$$

hervorgehenden Ableitung

$$\frac{dy}{d\varphi}=\frac{z^4\sin\varphi\cos\varphi}{(z'+\Delta)^2\Delta}$$

leicht berechnet werden. Da nämlich

$$\frac{z^4\sin\varphi\cos\varphi}{(z'+\Delta)^2}=s^2\cot\varphi=sl$$

ist, so folgt

$$54)\quad f=\frac{2\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}+\frac{9q^6}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{K}\dots\right)$$

Es sei $K'C=m$. Man hat den leicht berechenbaren Ausdruck

Ferner sei der Winkel zwischen $K'C$ und AC mit i und der Winkel zwischen $K'C$ und KP mit σ bezeichnet. Aus

$$\frac{\sin\delta}{\sin i}=\frac{m}{z}$$

folgt, wie leicht zu finden ist, $\operatorname{tg} i=z'\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\sigma=\frac{\sin\varphi}{\Delta}$, $z'\sin\sigma=\sin i$. Denn es ist

$$\operatorname{tg}\sigma=\operatorname{tg}(\delta+c)=\frac{\operatorname{tg}\delta+z'\sin\varphi}{1-z'\sin\varphi\operatorname{tg}\delta}\quad\text{u. s. w.}$$

Daher kann man entweder zur Darstellung von $\operatorname{tg}\sigma$ die elliptischen Transcendenten benutzen, wodurch

$$55)\quad \operatorname{tg}\sigma=\frac{1}{\sqrt{zz'}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}-2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\dots}{1+2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}+\dots}$$

oder man zieht die in der Theorie bekannte Reihe für $\frac{\sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}$ heran, welche demnach die folgende geometrische Bedeutung

$$56)\quad \operatorname{tg}\sigma = \frac{2\pi}{zz'K}\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right)$$

gewinnt.

Auf dieselbe Weise verwerten wir die für $\sin \operatorname{am} u$ bekannte Reihe um $\operatorname{tg} i = z' \sin\varphi$ durch dieselbe darzustellen. Demgemäss ist

$$57)\quad \operatorname{tg} i = \frac{2\pi z'}{Kz}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right).$$

Diese Interpretation dieser bekannten Reihen ist jedenfalls bemerkenswert.

Bemerkt man ferner, dass aus der Formel

$$y = \frac{1}{\cos\delta} = \frac{1+z'\Delta}{z'+\Delta}$$

die Relation

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}\cdot\frac{1-\Delta}{1+\Delta}}$$

folgt, so geht auch die in V. abgeleitete Gleichung in die folgende

$$58)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \frac{4\pi}{(1+z')K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\dots\right)$$

über und analog folgt aus II.

$$59)\quad \tfrac{1}{4}\arcsin\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\,\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K} + \dots,$$

die demnach wie die vorhergehenden vermittelst der Kettenlinie geometrisch interpretirt ist.

Auch die früher aufgestellte Reihe

$$\frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+z'} = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2(1-q^2)^2}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \dots\right),$$

welche geometrisch durch eine Normale des Amplitudendreiecks, d. i. durch $l\sin\varphi$ bezeichnet werden kann, ist noch einer Transformation

fähig. Wir multipliciren sie mit $\frac{d\varphi}{\Delta} = du$ und integriren. Das allgemeinere Integral ist

$$\ln\cos\varphi - z'\int\frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi\sqrt{z'^2+z^2\cos\varphi^2}} = 2\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K}+\dots\right)+C,$$

oder

$$\ln\cos\varphi - \ln\frac{z\cos\varphi-\Delta+z'}{z\cos\varphi-\Delta-z'} = 2\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K}\dots\right)+C.$$

Für $\varphi = 0$ folgt

$$0 = -\ln\frac{z-1+z'}{z-1-z'} = 2\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\dots\right)+C.$$

Daher ist

$$\tfrac{1}{4}\ln\frac{z\cos\varphi-\Delta+z'}{z\cos\varphi-\Delta-z'}\cdot\frac{z-1-z'}{z-1+z'}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u^2}{2K}+\dots,$$

oder mit Einführung der Relation

$$\tfrac{1}{4}\ln\frac{1+z'}{1-z'}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} = \frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u^2}{2K}+\tfrac{1}{2}\frac{(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi^2}{2K}+\dots,$$

Nun ist aber

$$\frac{1+z'}{1-z'}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} = \frac{1+z'}{\Delta+z'} = \frac{y-z'}{1-z'},$$

Demnach auch

$$60)\quad \frac{y-z'}{1-z'} = e^{4\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u^2}{2K}+\frac{1}{2}\frac{q^2(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u^2}{2K}\dots\right)}.$$

Man sieht, mit welcher Leichtigkeit solche Combinationen gewonnen werden können. Von denjenigen, welche noch zu erwähnen sind, wählen wir zum Zweck einer Differentiation die in 46) abgeleiteten Relationen, die demnach differentiirt

$$e^x\frac{dx}{du} = \frac{\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\dots\right),$$

$$e^{-x}\frac{dx}{du} = \frac{\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\dots\right).$$

und durcheinander dividirt die Formel

$$61)\quad e^{2x} = \frac{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}-\dots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\dots}$$

geben. Auch aus den beiden ersten ergeben sich nach Einsetzen des für $\frac{dx}{du}$ bekannten Wertes neue Relationen für $e^{\pm x}$.

Bemerkenswerter ist die Transformation der in 48) für e^{ix} aufgestellten Formel, welche wir jetzt untersuchen wollen.

Man findet zunächst

$$62)\quad \frac{e^{ix}-1}{e^{ix}+1} = \frac{2q\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{25}\sin\frac{5\pi u}{2K}\ \ldots}{1-2q^4\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^{16}\text{ocs}\,\frac{\pi u}{K} - 2q^{36}\cos\frac{3\pi u}{K}\ \ldots}$$

Die beiden hier erscheinenden Reihen sind, wie man sieht, elliptische Transcendenten. Da der Ausdruck zur Rechten mit dem Quotienten für die Function $\sin\text{am}\,u$ übereinstimmt, wenn q anstatt q^4 eingeführt wird, so ist eine Reduction auf diese Relation leicht durchführbar. Lösen wir demnach die letzte Gleichung nach e^{ix} auf, so ist in dem genannten Sinne unter Benutzung bekannter Formeln

$$63)\quad \frac{1+\sqrt{z}\sin\varphi}{1-\sqrt{z}\sin\varphi} = e^4\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-\sqrt{q^3}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right),$$

welche neue Beziehung wir nachher einer dynamischen Betrachtung zu Grunde legen werden.

Eine neue Transformation von 63) würde noch die folgende liefern

$$64)\quad \frac{\Delta+z\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta-z\sin\varphi\cos\varphi} = e^4\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{K} + \ldots\right).$$

Aus der ersten kann noch mittelst einer weitern Umgestaltung die folgende abgeleitet werden.

$$65)\quad \frac{1-\sqrt{z}\sin\varphi}{1+\sqrt{z}\sin\varphi} = \frac{\left(1-2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q}\right)\left(1-2\sqrt[4]{q^3}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q^3}\right)\ldots}{\left(1+2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q}\right)\left(1+2\sqrt[4]{q^3}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q^3}\right)\ldots}$$

Für $\varphi = 90$ folgt nach mehrfacher Umwandlung ein schon früher gefundenes Resultat.

Wir bemerken noch, dass wegen der leicht abzuleitenden Gleichung

$$e^{2x} = \frac{1 + \frac{\varkappa^2 \sin\varphi}{1 + \varkappa' \varDelta}}{1 - \frac{\varkappa^2 \sin\varphi}{1 + \varkappa' \varDelta}}$$

in Folge der Bedeutung von

$$g = \frac{1 + \varkappa' \varDelta}{\varkappa^2 \sin\varphi}$$

die folgende Relation

$$e^{2x} = \frac{g + 1}{g - 1}$$

besteht.

VIII.

Die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Functionen.

Von

Paul Richard Domsch.

Erster Teil.

Einleitung.

Wenn wir in Folgendem statt der allgemeinen Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt vorwiegend die Cykliden in Betracht ziehen, wenn wir also für den Doppelkegelschnitt den imaginären Kugelkreis nehmen, so ist dies durchaus keine wesentliche Beschränkung. Von projectivem Standpunkt betrachtet hat jener ja keine ausgezeichnete Lage, wir können jederzeït unsere Cyklide, resp. das Cyklidensystem einer linearen Transformation unterwerfen, welche den Kugelkreis zu einem Kegelschnitt im Endlichen macht, und die zu gewinnenden Sätze werden dann in unveränderter Form sogar bestehen bleiben, wenn wir nach der Collineation den nunmehrigen Doppelkegelschnitt zur Grundlage der Massbestimmung wählen. Nehmen wir in den Transformationsformeln die Coefficienten complex an, so können wir sogar den Doppelkegelschnitt reell machen, wodurch allerdings alle Realitätsverhältnisse sich ändern, und auch unsere Resultate die bezüglichen Modificationen erleiden.

Wir beschäftigen uns demnach allein mit den Cykliden und suchen die Resultate zu verwerten, die von Moutard [1]), Darboux [2]), Casey [3]) über jene Flächen und Flächensysteme gewonnen wurden.

Zur Erreichung des Zweckes, die Darstellung durch hyperelliptische Functionen zu leisten, bieten sich mehrere Wege dar.

Das Zunächstliegende würde sein, die Untersuchung direct zu führen und auszugehen von der Darstellung der Cyklide, bezogen auf ein orthogonales Fünfkugelsystem in sogenannten pentasphärischen Coordinaten (unter pentasphärischen Coordinaten eines Punktes versteht man die mit gewissen Constanten multiplicirten Potenzen des Punktes in Bezug auf jene 5 Fundamentalkugeln). Indem man diese Coordinaten als Functionen der beiden Krümmungslinienparameter der Cyklide darstellt, zeigt sich sofort die Möglichkeit der Durchführung der Aufgabe. (Zuerst ausgesprochen findet sich dies bei Darboux, Comptes Rendus Bd. 69, p. 392: Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques). Die pentasphärischen Coordinaten lassen sich 5 hyperelliptischen ϑFunctionen vom Geschlecht 2 proportional setzen, welche einem sogenannten Rosenhain'schen Sechsersystem angehören, und nun wird die Kenntniss der ϑFunctionen und deren Relationen zu verwerten gesucht für die Gewinnung geometrischer Sätze für die Cykliden.

---

1) Moutard: „Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques", „Note sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre", Nouv. Ann. de Math. 2. S. Bd. 3., 1864, p. 306—9, p. 536—39.

— Sur les lignes de courbure d'une classe de surfaces du quatrième ordre, Comptes Rendus, Bd. 59., p. 243.

2) Darboux: „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques", Paris, Gauthier-Villars, 1873. Man findet darin ausser einem der Pariser Akademie 1869 eingereichten Memoire eine Zusammenstellung aller Noten und kleineren Aufsätze, die Herr Darboux über diesen Gegenstand geschrieben, am Schluss des Werks auch eine ausführliche Litteraturangabe, die Cykliden betreffend.

3) Casey: „On Cyclides and Sphero-Quarties, Phil. Transactions, Bd. 161., p. 585. In jüngster Zeit hat der Gegenstand eine erneute Behandlung erfahren durch Herrn Gino Loria (Ricerche intorno alla Geometria della sfera e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie di quatro ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario all' infinito, Memorie delle Reale Academia delle Scienze di Torino, Ser. 2., Bd. 36.), der von der Betrachtung von Kugelcomplexen und Congruenzen ausgeht, und durch Herrn Segre (Etude des différentes surfaces du 4e ordre à conique double etc., Math. Ann. Bd. 24., p. 313.), der in einer umfangreichen Abhandlung die Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt betrachtet als Centralprojectionen des

Um insbesondere ausgezeichnete Curvensysteme auf der Cyklide zu erhalten, setzt man, in den einfachsten Fällen wenigstens, ϑ Functionen, deren Argumente sich von denen der gegebenen um Constante unterscheiden, gleich Null und erhält hierdurch eine Gleichung zwischen den beiden Parametern der Cyklide, also die Gleichung einer Curve auf der Fläche; die Wahl der Constanten bestimmt die Art der Curven.

Eine zweite Methode ist indirecter Natur und nimmt ihren Ausgangspunkt nicht von der Cyklide, sondern von Flächen, resp. Flächensystemen, die bereits durch hyperelliptische Transcendente dargestellt sind und in Beziehung zur Cyklide, resp. dem confocalen Cyklidensystem gesetzt werden können.

Herr Darboux gab im Jahre 1864 in den Annales de l'École Normale Supérieure eine einzweideutige Transformation an, welche eine Oberfläche 2ter Ordnung in eine Cyklide, eine Flächenschaar 2ten Grades in ein confocales Cyklidensystem verwandelt.

Nun ist die Fläche 2ten Grades, resp. die Flächenschaar 2ten Grades durch hyperelliptische Functionen dargestellt, in neuester Zeit z. B. in eingehender Weise von Herrn Staude[4]), der dazu gelangte, eine grosse Anzahl von Θ Relationen als geometrische Sätze über die Flächen 2ten Grades auszusprechen, und die Darstellung namentlich benutzte, um die bekannten Schliessungssätze zu erhalten, die sich auf Polygone beziehen, die von den gemeinsamen Tangenten der Flächen der Schaar 2ten Grades gebildet werden.

Von diesen Resultaten ausgehend, gelangt man mit Hilfe der Darboux'schen Transformation ohne erhebliche Mühe zu einer Darstellung des Cyklidensystems durch hyperelliptische Functionen, zu einer analogen Deutung der Θ Relationen in der Geometrie der Cykliden und zu entsprechenden Schliessungssätzen.

Schnittes zweier quadratischen Mannigfaltigkeiten von 3 Dimensionen im linearen Raum von 4 Dimensionen auf den gewöhnlichen Raum. Diese Methode führt ihn zu den bekannten und einzelnen neuen Sätzen über die Cykliden, sowie zu einer erschöpfenden Classification, die auch von Herrn Loria gegeben wird für den Fall eines nicht zerfallenden Doppelkegelschnitts. Wir verweisen noch besonders auf die geschichtliche Einleitung, die Herr Segre seiner Abhandlung vorausschickt.

4) Staude: „Geometr. Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen 1. Ordng. im System der confocalen Flächen 2. Grades", Math. Annalen, Bd. 22., p. 1.

— „Ueber geodätische Polygone auf den Flächen 2ten Grades", Math. Ann., Bd. 21., p. 219.

Noch eine andere Flächenart ist durch hyperelliptische Functionen dargestellt, die Kummer'sche Fläche.

Nachdem Herr Klein im 5ten Band der Math. Annalen p. 302, als Erster auf die Möglichkeit der Darstellung hingewiesen hatte olgten die Ausführungen durch die Herren Cayley [5]) und Borchardt [6]) im 83ten Band des Crelle'schen Journals, von H. Weber [7]) im 84ten Band desselben Journals und von Herrn Rohn [8]) im 15ten Band der Annalen.

Andererseits hat Herr Lie im 5ten Band der Annalen „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe", p. 145. ff. gezeigt, wie durch eine Berührungstransformation, welche die Punkte des einen Raumes in die Minimalgeraden [9]) des andern, die Geraden in die Kugeln, Flächenelemente, die consecutive Punkte einer Geraden gemein haben, in die Flächenelemente der entsprechenden Bildkugel überführt, die Kummer'sche Fläche in eine Cyklide transformirt wird; die Kummer'sche Fläche wird dabei angesehen als Brennfläche einer Congruenz 2ter Ordnung und Classe, nicht als Singularitätenfläche einer Complexschaar 2ten Grades.

Hat man auf diesem Wege die Beziehungen zwischen Kummerscher Fläche und Cyklide vollständig klar gelegt, so ist damit auch die Darstellung der Cyklide durch hyperelliptische Functionen geeistet. Die ϑ Relationen bleiben ja bei der Berührungstransformation invariant, sie ändern nur ihre Bedeutung, wie es das Uebertragungsprincip angiebt.

Dabei haben wir noch den Vorteil, dass wir zu gleicher Zeit 3 Arten der Darstellung erhalten, entsprechend den 3 Weisen, durch welche die Kummer'sche Fläche durch ϑ Functionen dargestellt wurde:

---

5) Cayley: „On the double Θfunctions in connexion with a 16 nodal quartic surface", Crelle's Journal Bd. 83., p. 210.

6) Borchardt: „Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch die Göpel'sche biquadratische Relation etc.". Crelle's Journal, Bd. 83., p. 234.

7) Weber: „Ueber die Kummer'sche Fläche 4ter Ordnung mit 16 Knotenpuncten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit 2 Veränderlichen" Crelle's Journal, Bd. 84., p. 332.

8) Rohn: „Transformation der hyperelliptischen Functionen $p=$ und 2. ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche", Math. Annalen, Bd. 15., p. 315

9) Anschliessend an Herrn Lie werden wir Minimalgerade die Geraden nennen, welche den Kugelkreis treffen, die „lignes de longueur nulle".

1. die liniengeometrische Darstellung Rohn's;
2. die Borchardt'sche Darstellung;
3. die Cayley-Weber'sche Darstellung [10]).

In Folge dessen erhalten wir auch 3 Serien von Curvensystemen auf Kummer'scher Fläche und Cyklide.

Wenn wir in Folgendem der 2ten, indirecten Methode den Vorzug geben und also einmal von der Flächenschaar 2ten Grades das andere Mal von der Kummer'schen Fläche ausgehend, die Darstellung der Cykliden durch hyperelliptische Transcendente leisten, so geschieht dies zunächst aus dem Grunde grösserer Einfachheit. Wir können ja das reiche, schon vorhandene Material verwerten, und es kommt in der Hauptsache nur auf eine Umdeutung der bereits gewonnenen Formeln und Sätze an. Weiterhin eröffnet sich uns hierdurch aber auch die Perspective, mit Hilfe der Cyklide als Zwischenglied eine Beziehung zwischen Fläche 2ten Grades und Kummer'scher Fläche herzustellen und so z. B. die Schliessungssätze auch für die Geometrie der Kummer'schen Fläche zu verwerten.

Demgemäss wird sich der Gang der Untersuchung in folgender Weise gestalten:

Im ersten Teile behandeln wir die Beziehungen zwischen der Flächenschaar 2ten Grades und dem confocalen Cyklidensystem und zwar im 1ten Capitel zunächst die (1, 2) deutige Transformation, welche die Ueberführung leistet. Wir gewinnen dadurch im 2ten Capitel eine Uebersicht über die gestaltlichen Verhältnisse der Cykliden, über den Verlauf der Krümmungslinien und der geodätischen Curven auf denselben.

Das 3te Capitel deutet das Abel'sche Theorem für überall endliche Integrale in der Flächenschaar 2ten Grades und dem Cyklidensystem. Wir finden, dass die Gleichungen desselben Differentialgleichungen der 2 Flächen des Systems je 2fach berührenden Kreise sind, und erhalten hierauf Sätze für die 4 durch ein Punktepaar gehenden Doppelberührungskreise, sowie die Deutung des einfachen Additionsproblems im Cyklidensystem. Im letzten Paragraphen dieses Capitels endlich

10) Die dreierlei ϑ hängen dabei so zusammen, dass die der zweiten Darstellung aus denen der 1ten, und die der 3ten aus denen der 3ten durch quadratische Transformation gewonnen werden können, die der 2ten aus denen der 1ten, also durch Zweiteilung der Argumente hervorgehen.

zeigen wir, wie man zu Schliessungssätzen gelangen kann, die innerhalb der Congruenz der gemeinsamen Doppelberührungskreise zweier confocaler Flächen der Cyklidenschaar gelten und führen dies an einem Beispiel durch.

Im zweiten Teile behandeln wir nun die Transformation des Raumes der Kummer'schen Fläche in den Cyklidenraum, welche durch die erwähnte Berührungstransformation vermittelt wird.

Nachdem wir im ersten Capitel zunächst die Fundamentalgebilde in der Geometrie der Kummer'schen Fläche und ihre Uebertragung betrachtet haben, setzen wir sodann die einzelne Kummer'sche Fläche in Beziehung zur einzelnen Cyklide, eine Schaar Kummer'scher Flächen, die sich längs einer ausgezeichneten Haupttangentencurve 8ter Ordnung berühren, in Beziehung zum confocalen Cyklidensystem. Der Darstellung der Kummer'schen Fläche durch die Parameter der Haupttangentencurven entspricht die Darstellung der Cyklide durch Krümmungslinienparameter.

Um nun die Abbildung von Curven auf der Kummer'schen Fläche in solche auf der Cyklide in möglichst allgemeiner Weise zu behandeln, betrachten wir hierauf zunächst die Abbildung von Linienflächen, deren Erzeugende einem ausgezeichneten linearen Complex angehören, und alsdann das Entsprechen von Curven auf beiden Flächen mit besonderer Berücksichtigung der Singularitäten.

Das 2te Capitel bringt nun die Anwendung der erhaltenen Resultate; wir betrachten Kummer'sche Fläche und Cyklide unter Berücksichtigung der ϑ Functionen. Den dreierlei ϑ Functionen, den lineargeometrischen, den Borchardt'schen, den Weber-schen entsprechen 3 Reihen von Curvensystemen auf der Cyklide, wie auf der Kummer'schen Fläche; diese Curvensysteme werden der Untersuchung unterzogen.

Im Schlusscapitel endlich gehen wir noch etwas ein auf die Beziehungen zwischen der Kummer'schen Flächenschaar und der Flächenschaar 2ten Grades, insbesondere auf die Uebertragung der im 3ten Capitel des ersten Teils behandelten Schliessungssätze.

I. Teil.

Flächenschaar IIten Grades und Cyklidensystem.

I. Capitel.

Transformation der Flächenschaar 2ten Grades in ein confocales Cyklidensystem.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gab Herr Darboux im Jahre 1864 in den Annales de l'École Normale, Bd. 1. eine (1, 2)-deutige Transformation an, welche eine Oberfläche 2ten Grades in eine Cyklide, eine Flächenschaar 2ten Grades in ein confocales Cyklidensystem verwandelt.

Ist nämlich irgend eine Fundamentalkugel

$$S_0 = 0$$

gegeben, so ordnen wir einem beliebigen Punkte μ die 2 Punktkugeln m und m' zu, welche dem Kugelbüschel angehören, das durch die Fundamentalkugel und die Polarebene des gegebenen Punktes μ in Bezug auf die Kugel bestimmt wird. Neben diese Zuordnung von Punkten und Punktepaaren stellt sich eine solche von Ebenen und Punktepaaren, indem man jeder Ebene das Punktkugelpaar entsprechen lässt, das sich in dem durch Ebene und Fundamentalkugel bestimmten Büschel findet. Reellen Ebenen entsprechen dann nur reelle Punktepaare, wenn erstere die Fundamentalkugel nicht schneiden; m und m' sind also allein reell, wenn μ im Innern der Kugel liegt. Es bildet sich auf diese Weise das Innere der Kugel vermöge der Transformation auf den gesammten Punktraum ab.

Nimmt man den Fundamentalkugelmittelpunkt zum Coordinatenanfang und nennt $x'y'z'$ die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes μ, so ist die Transformation analytisch definirt durch die Formeln:

$$1)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{2R_0^2 x}{x^2+y^2+z^2+R_0^2} \\ y' = \dfrac{2R_0^2 y}{x^2+y^2+z^2+R_0^2} \\ z' = \dfrac{2R_0^2 z}{x^2+y^2+z^2+R_0^2} \end{cases}$$

Hierbei sind x, y, z die Coordinaten des Punktpaares mm', R_0 der Radius der Fundamentalkugel [11]).

Wir sehen ohne weiteres aus den Formeln:

Beschreibt μ eine Ebene, so beschreibt das Punktepaar (mm') eine Kugel, die orthogonal zu der gegebenen ist; geht die Ebene durch den Kugelmittelpunkt, so wird aus ihr wiederum eine Ebene; berührt sie die Fundamentalkugel, so wird sie zu einer Punktkugel, dem Berührungspunkt.

Die Geraden gehen mit Hilfe der Transformation in Kreise über, die senkrecht auf der Fundamentalkugel stehen.

Einer Curve $n$ten Grades entspricht im Allgemeinen eine Curve vom Grade $2n$, die den Kugelkreis in $2n$ Punkten schneidet. Wenn indessen der Mittelpunkt der Fundamentalkugel ein αfacher Punkt der Curve ist, so vermindert sich der Grad um α und um ebensoviel die Zahl der Schnittpunkte mit dem Kugelkreis. Berührt die Curve die Fundamentalkugel in einem Punkte a, so ist dieser Punkt a ein Doppelpunkt der transformirten Curve.

Im Speciellen entspricht also einem Kegelschnitt eine sphärische Curve 4ter Ordnung, die den Kugelkreis in 4 Punkten schneidet; berührt der Kegelschnitt die Fundamentalkugel in 2 Punkten, so zerfällt die Curve 4ter Ordnung in 2 sich in 2 Punkten schneidende Kreise.

Einer Fläche $n$ter Ordnung, welche im Mittelpunkt der Fundamentalkugel einen $p$fachen Punkt besitzt, entspricht eine Fläche von der Ordnung $(2n-p)$. Berührt die ursprüngliche Fläche die Fundamentalkugel in einem Punkte a, so hat die transformirte Fläche in a einen Knotenpunkt.

Den Kugelkreis enthält die Fläche halb soviel mal zählend, als ihre Ordnung n beträgt [12]).

Einer Oberfläche 2ten Grades entspricht im Allgemeinen eine Fläche 4ter Ordnung, die den Kugelkreis als Doppelcurve enthält.

---

11) Genau dieselben Transformationsformeln begegnen uns bei Beltrami Ann. di Mat. 2. Ser., Bd. 2., 1868, Teoria fondam. degli spazii di curv. const., später bei Killing, Bd. 86. u. 89. des Crelle'schen Journ. Sie dienen daselbst zur Transformation des gewöhnlichen Raumes in einen solchen nicht-euklidischen, in welchem sich die Geraden in 2 Punkten schneiden.

12) Wenigstens im Allgemeinen; ist der Mittelpunkt $p$facher Punkt, so zählt der Kugelkreis $n-p$fach.

Geht die Oberfläche 2ten Grades durch den Mittelpunkt der Fundamentalkugel, so ist die transformirte Fläche nur von der 3ten Ordnung; es scheidet sich die unendlich ferne Ebene ab, der Kugelkreis ist einfache Linie auf dem übrig bleibenden Teil.

Flächen vierter Ordnung aber, die den Kugelkreis als Doppelcurve besitzen, nennen wir nach dem Vorgange von Darboux und Moutard Cykliden. Wir haben somit den Satz erhalten:

„Oberflächen 2ter Ordnung verwandeln sich mit Hilfe der ein-„zweideutigen Transformation, wie sie durch die Formeln 1) ver-„mittelt wird, in Cykliden."

Wir greifen jetzt eine beliebige Fläche 2ten Grades heraus, und beziehen dieselbe in Gemeinschaft mit der Fundamentalkugel auf das ihnen gemeinsame Polartetraoder, dessen Ebenen bezeichnet seien durch

2) $$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Alsdann können wir die Gleichungen von Kugel und Oberfläche 2ten Grades in der Gestalt schreiben:

3) $$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \\ \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0 \end{cases}$$

Beide Flächen bestimmen eine ganze Flächenschaar, die derselben Developpabelen einbeschrieben ist und dargestellt wird durch die Gleichung

4) $$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} + \frac{x_4^2}{a_4 - \lambda} = 0$$

wo

$$a_i = \frac{1}{\alpha_i} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Die Ebenen des gemeinsamen Polartetraeders verwandeln sich vermöge der Transformation 1) in 4 Kugeln, die orthogonal zur Fundamentalkugel und gegen einander sind; sie bilden mit der Fundamentalkugel ein pentasphärisches Fundamentalsystem; die 4 Ecken des Polartetraeders sind die 4 Centren der neu hinzukommenden Kugeln.

Die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf das Polartetraeder verwandeln sich durch die Transformation, wie sich sofort ergiebt [13]),

---

13) Man vergleiche Darboux, Sur une classe rem. etc. p. 133.

in die Verhältnisse der 4 Potenzen des Punktes in Bezug auf die 4 den Coordinatenebenen entsprechenden Kugeln zu der Potenz in Bezug auf die gegebene Fundamentalkugel, jede Potenz dividirt durch den Radius der zugehörigen Kugel des Fundamentalsystems. Bezeichnet man demnach mit S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die 4 Potenzen eines Punktes in Bezug auf die vier den Tetraederebenen entsprechenden Kugeln, mit S_0 die Potenz in Bezug auf die Fundamentalkugel, mit R_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die Radien der ersteren 4 Kugeln, mit R_0 den Radius der Fundamentalkugel und setzt

5) $$\frac{S_i}{R_i} = s_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

so erhält man

6) $$x_i = \frac{s_i}{s_0}.$$

Mit Hilfe dieser Transformationsformel nimmt die Gleichung der Cyklidenschaar, welche der Flächenschaar 4) entspricht, die Gestalt an

6) $$\frac{s_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{s_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{s_3^2}{a_3 - \lambda} + \frac{s_4^2}{a_4 - \lambda} = 0.$$

Diese Gleichung stellt aber bekanntlich ein 3fach orthogonales Cyklidensystem dar (Darboux, a. a. O. p. 134.). Durch jedes reelle Punktepaar im Raume ($s_1 s_2 s_3 s_4$) gehen 3 reelle Flächen der Schaar die sich rechtwinklig, also in ihren Krümmungslinien schneiden. Wir fassen dies Resultat in den Satz:

„Die Flächenschaar zweiten Grades, deren Flächen derselben „Developpabelen einbeschrieben sind, verwandelt sich durch die ge- „gebene Transformation in ein confocales Cyklidensystem".

Wir gelangen zu demselben confocalen Cyklidensystem, wenn wir von 4 anderen Flächen 2ten Grades ausgehen, deren reciproke[14]) Flächen mit der reciproken Fläche der durch 3) dargestellten confocal sind und mit der letzteren gemeinschaftlich von einer Gleichung 5ten Grades abhängen[15]); die ursprünglichen vier Flächen bilden also mit der durch 3) dargestellten ein Flächenbüschel 2ten Grades. Indem wir dergestalt einer jeden derselben eine bestimmte der 4 übrigen Kugeln des Fundamentalsystems zuordnen, erhalten wir 4 neue Flächenschaaren, und diese transformiren sich in dasselbe Cyklidensystem.

14) Reciprok in Bezug auf je 1 der Fundamentalkugeln.

15) Darboux, a. a. O. p. 114.

Statt die Flächenschaaren zu transformiren, können wir natürlich auch die reciproken Flächenbüschel in Betracht ziehen, indem wir den Ebenen des Raumes des Flächenbüschels die Punktepaare entsprechen lassen.

Eine Fläche aus einem der Büschel ist alsdann der Ort der Centren der ∞^2 Kugelschaar, deren Kugeln die entsprechende Cyklide je doppelt berühren und sie dergestalt erzeugen.

Neben diese eine Erzeugung stellen sich 4 andere durch weitere 4 Kugelschaaren, die Centren bilden 4 Flächen aus den 4 übrigen Büscheln, die mit der aus dem ersten Büschel confocal sind [16]).

Die Durchschnittscurve einer Kugel und einer beliebigen Fläche 2ter Ordnung hat entweder keine reellen Punkte, oder besteht aus zwei paaren Zügen oder aus einem paaren Zuge.

Ist eine der Fundamentalkugeln ohne reelle Punkte, aber mit reellem Centrum, d, h. sind die Coefficienten reell, so ist die Durchschnittscurve ohne reelle Punkte, das Polartetraeder hat dann bekanntlich 4 reelle Ecken. Also haben die 4 übrigen Kugeln des Fundamentalsystems reelle Centren. Dann müssen 2 der 5 Kugeln conjugirt sein, d. h. im Centrum übereinstimmen und Radien der Form R resp. $i.R$ besitzen. Es ist also der Mittelpunkt der Ausgangskugel ohne reelle Punkte zugleich der Mittelpunkt einer zweiten Kugel des Orthogonalsystems mit reellen Punkten. Da in diesem Falle 3 der Ebenen des Polartetraeders durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, so fällt die vierte Ebene des Tetraeders mit der unendlich fernen Ebene zusammen, und weiterhin wird das Fünfkugelsystem aus 3 orthogonalen Ebenen und 2 Kugeln gebildet, die ihre Mittelpunkte im Schnittpunkte jener 3 Ebenen haben, deren Radien aber von der Form R, beziehentlich $i.R$ sind.

Da in diesem Falle alle 5 Polartetraeder reelle Ecken besitzen, so bestehen die 5 Durchschnittscurven der 5 Kugeln mit den 5 Deferenten entweder aus je 2 paaren Zügen oder sind Curven ohne reelle Punkte. Diese 5 Curven sind die Focalcurven des Cyklidensystems, 2 von ihnen sind reell und bestehen also aus je 2 paaren Zügen, 3 dagegen haben keine reellen Punkte.

Das orthogonale Fünfkugelsystem kann aber auch so beschaffen sein, dass 3 Kugeln reelle Punkte besitzen, 2 Kugeln dagegen nur imaginäre Punkte und dabei conjugirt imaginäre Centren. (Die

---

16) Diese Flächen, die den Ort für die Centren der doppelt berührenden Kugeln bilden, nennt Herr Darboux „Deferenten".

Gleichungen der letzteren haben alsdann keine reellen Coefficienten, sondern letztere haben conjugirt imaginäre Werte.).

Gehen wir in diesem Falle von einer der reellen Kugeln aus, so erhalten wir ein Polartetraeder mit 2 reellen und 2 conjugirt imaginären Ecken. Die Durchschnittscurve mit der entsprechenden deferenten Fläche besteht demnach bei allen 3 reellen Kugeln jedesmal aus einem paaren Zug mit reellen Punkten, es sind also 3 Focalen des Cyklidensystems reell und bestehen aus einem paaren Zug. In diesem Falle hat die Gleichung der Flächenschaar 2ten Grades, bezogen auf das kanonische System 2), keine reellen Coefficienten mehr, in der Gleichung 4) sind jetzt $2a_i$ conjugirt imaginär ebenso wie die entsprechenden $2x_i$. Es gehen jetzt nicht mehr durch jeden Punkt des Raumes 3 reelle Flächen der Schaar, sondern nur durch die im Innern der Kugel gelegenen Punkte. Nun bildet sich aber das Innere der Kugel auf den gesammten Cyklidenraum ab; es gehen also trotzdem im Cyklidenraum durch jeden reellen Punkt im Raume 3 reelle Flächen des confocalen Cyklidensystems hindurch. Die Cykliden des confocalen Systems haben in diesem Falle aber eine wesentlich andere Gestalt als in dem, wo nur eine der Kugeln ohne reelle Punkte war. Die Cykliden sind in diesem Falle durchweg einteilig, der Schnitt mit einer Symmetrieebene liefert ein Curvensystem, wie es sich bei Herrn Holzmüller [17]) gezeichnet findet.

II. Capitel.

Gestaltliche Verhältnisse der Cykliden.

§ 1. *Hauptformen.*

Betrachten wir im Raum der Flächenschaar 2ten Grades die Fundamentalkugel, oder irgend eine andere Fläche der Schaar als Fundamentalfläche der Massbestimmung [18]), so stellt die Flächenschaar in dieser Massbestimmung ein dreifach orthognoales Flächensystem dar. Durch jeden reellen Punkt gehen 3 reelle Flächen der

17) „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften", Taf. 64. u. 66. Man vergl. auch Siebeck, Cr. Journ., Bd. 57., p. 359., Bd. 59., p. 173.

18) Cayley war der erste („Sixth Memoir upon Quantics", Phil. Transactions Bd. 149., 1859) der zu der Auffassung gelangte, das „Mass" nicht dem Gebilde anhaften zu lassen, sondern es darzustellen als Beziehung zu einem zweiten Gebilde. Man vergleiche auch Klein: „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", Math. Annalen Bd. 4., p. 573., Bd. 6., p. 112.

Schaar, und diese schneiden sich jeweils in den Krümmungslinien im erweiterten Sinne des Wortes.

Beschränken wir uns jetzt ausserdem auf den Fall, wo alle Polartetraeder 4 reelle Ecken besitzen, wo also nur eine Kugel ohne reelle Punkte ist, aber reelle Coefficienten hat, und greifen die Flächenschaar heraus, die zu der letzteren Kugel gehört, so besitzt diese Flächenschaar die grösste Aehnlichkeit mit einem gewöhnlichen confocalen System, bei welchem der Kugelkreis zur Flächenschaar gehört; namentlich sind die Realitätsverhältnisse vollkommen übereinstimmend.

Nehmen wir die Ausgangsfläche 2ten Grades zudem so an, dass ihr Mittelpunkt mit dem der in Rede stehenden Kugel übereinstimmt, so besteht das Polartetraeder aus den 3 sich rechtwinklig schneidenden Hauptebenen im Verein mit der unendlich fernen Ebene.

Setzen wir in 4)

8) $$a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

so erhalten wir bekanntlich für

I. $a_1 > \lambda > a_2$ Zweischalige Hyperboloide
$\lambda = a_1$ Focalhyperbel in der Ebene $x_2 = 0$.

II. $a_2 > \lambda > a_3$ Einschalige Hyperboloide
$\lambda = a_3$ Focalellipse in der Ebene $x_3 = 0$.

III. $a_3 > \lambda > a_4$ Ellipsoide.

Der Verlauf der Krümmungslinien im projectiven Sinne auf einer Fläche der Schaar ist in diesem Falle vollständig analog wie im Fall eines gewöhnlichen confocalen Systems; auch jetzt giebt es auf jedem Ellipsoid und jedem 2schaligen Hyperboloid die bekannten Singularitäten in den den Nabelpunkten des gewöhnlichen confocalen Systems entsprechenden Punkten, den Durchschnittspunkten mit den Focalcurven.

Diese Analogie hört aber auf, sobald wir eine Flächenschaar betrachten mit einem Polartetraeder, von dem 2 Ecken und 2 Ebenen conjugirt imaginär sind.

Wir wollen zu gleicher Zeit erwähnen, dass, wofern wir allgemeinste Flächenschaaren 2ten Grades betrachten würden, also statt der zu Grunde gelegten Kugel eine beliebige Fläche 2ten Grades nehmen, die besprochene Transformation uns auf ein System von

Flächen 4ter Ordnung mit einer gemeinsamen Doppelcurve 2ten Grades von allgemeinem Charakter führen würde. Die Sätze über Cyklide und Cyklidensystem sind also auch von hier aus einer sofortigen Erweiterung auf Flächen 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt und Systemen von solchen Flächen fähig. (cf. Einleitung p. 193.).

Durch die gegebene Transformation gehen die 3 Coordinatenebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, die den Mittelpunkt gemeinschaftlich enthalten, in sich über; wir wollen sie, als Kugeln mit unendlich grossem Radius betrachtet, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ nennen. Die unendlich ferne Ebene verwandelt sich in eine Kugel mit endlichem reellen Radius $s_4 = 0$, die ihren Mittelpunkt im Schnittpunkt jener 3 Ebenen besitzt.

Jede Fläche der Flächenschaar 2ten Grades mit reellen Punkten geht durch die Transformation in eine Cyklide derselben Eigenschaft über. Wir geben zunächst eine übersichtliche Zusammenstellung der verschiedenen Formen:

I. $a_1 > \lambda > a_2$ Zweischalige Cykliden (Schalen auseinander)
Grenzwerte $\lambda = a_1$ $\lambda = a_2$
Grenzflächen $s_1 = 0$ $s_2 = 0$
In $s_2 = 0$ liegt eine reelle Focalcurve.

II. $a_2 > \lambda > a_3$ Ringförmige Cykliden
Grenzwerte $\lambda = a_2$ $\lambda = a_3$
Grenzflächen $s_2 = 0$ $s_3 = 0$
In beiden Grenzflächen reelle Focalcurven.

III. $a_3 > \lambda > a_4$ Zweischalige Cykliden (Schalen ineinander)
Grenzwerte $\lambda = a_3$ $\lambda = a_4$
Grenzflächen $s_3 = 0$ $s_4 = 0$
In $s_3 = 0$ eine reelle Focalcurve.

IV. $a_4 > \lambda > a_1$ Cykliden ohne reelle Punkte.

Die Grenzflächen werden von den Focalcurven begrenzt, von denen also 2, auf $s_2 = 0$ und $s_3 = 0$ gelegen, reell sind.

I. Zweiteilige Cykliden mit auseinander ligenden Schalen.

$$a_1 > \lambda > a_2.$$

Diese Cykliden beginnen mit der doppelt überdeckten Ebene $s_1 = 0$ und hören auf mit dem von der in $s_2 = 0$ verlaufenden

lemniskatischen Focalcurve begrenzten inneren Teile von $s_2 = 0$. Dazwischen legen sich die übrigen Flächen, immer eine von der folgenden umschlossen. (Siehe Fig. 1.).

II. Ringförmige Cykliden.

$$a_2 > \lambda > a_3.$$

Diese Cykliden beginnen mit dem doppelt überdeckten, von der genannten Focalcurve begrenzten äussern Teile von $s_2 = 0$ und endigen für $\lambda = a_3$ mit dem doppelt überdeckten, von der Focalcurve daselbst begrenzten innern Teile von $s_3 = 0$. (Siehe Fig. 1.). Die Gestalten der zwischen liegenden Cykliden kann man sich, von der zuletzt genannten Grenzfläche ausgehend vorstellen, indem man letztere sich immer mehr aufblähen lässt, doch so, dass 2 Einschnürungen in $s_2 = 0$ sich einstellen. Hier wächst der verticale Symmetrieschnitt langsam bis zur lemniskatischen Focalcurve als oberen Grenze.

III. Zweiteilige Cykliden mit ineinander liegenden Schalen.

$$a_3 > \lambda > a_4.$$

Diese Cykliden beginnen mit dem nicht schraffirten doppelt überdeckten Teile von $s_3 = 0$ (siehe Fig. 2.) und gehen alsdann über in Flächen, deren eine Schale die andere umschliesst. Die Schalen nähern sich, je mehr λ abnimmt, immer mehr und mehr und fallen für $\lambda = a_4$ zusammen, indem sie alsdann die Kugel $s_4 = 0$ in ihrer vollen Ausdehnung doppelt überdecken; natürlich muss dann die Focalcurve auf dieser Grenzfläche ohne reelle Punkte sein.

§ 2. *Krümmungslinien.*

Die Krümmungslinien (im projectiven Sinne) der Flächenschaar 2ten Grades verwandeln sich durch unsere Transformation in die Krümmungslinien der Cykliden des confocalen Systems im gewöhnlichen Sinne des Wortes, da ja das Cyklidensystem ein dreifach orthogonales Flächensytem ist. Auf jeder Cyklide der Schaar werden die Krümmungslinien von Cykliden ausgeschnitten, die den beiden noch übrigen Hauptarten mit reellen Punkten angehören. Durch jeden Punkt der herausgegriffenen Cyklide gehen infolgedessen 2 Krümmungslinien, die auf einander senkrecht stehen. Sie sind im Allgemeinen von der 8ten Ordnung; nur die 5 Schnitte mit den Kugeln des Fundamentalsystems ergeben Curven 4ter Ordnung (vom Geschlecht 1); auf den ringförmigen Cykliden sind 4 dieser Curven reell, auf den übrigen Cykliden nur 3. 2 Krümmungslinien 8ter

Ordnung schneiden sich in 16 Punkten. — Diese sind sämmtlich reell, wenn die Krümmungslinien von verschiedener Art sind, dagegen sämmtlich imaginär bei Krümmungslinien derselben Art.

Die gestaltlichen Verhältnisse dieser Curven veranschaulichen am besten die Figuren (siehe Fig. 2., 3., 4.; die ringförmige Cyklide, Fig. 3., ist schematisch als Ring gezeichnet.)

§ 3. *Geodätische Linien.*

Bei der eingeführten projectiven Massbestimmung im Raum der Flächenschar 2ten Grades bleiben die Geraden natürlich geodätische Linien; das Linienelement derselben wollen wir mit $d\sigma$ bezeichnen.

Durch die in Rede stehende Transformation nun, welche die Geraden in Orthogonalkreise zur Fundamentalkugel überführt, transformirt sich das Linienelement $d\sigma$ in

$$d\Sigma = \frac{ds}{S}$$

wo ds das Linienelement in gewöhnlicher Massbestimmung und S die Potenz des in Betracht gezogenen Punktes in Bezug auf die Fundamentalkugel bedeutet; dieses $d\Sigma$ ist das Linienelement eines Orthogonalkreises zur Fundamentalkugel [19]).

Die projective Massbestimmung des ersten Raumes, die sich bei Collineationen reducirt, wird damit übergeführt in eine Massbestimmung, die sich einer Transformation durch reciproke Radien gegenüber covariant verhält — bei letzterer gehen ja Kugeln wiederum in Kugeln, Kreise in Kreise, Kugelenveloppen in Kugelenveloppen über. In dieser Massbestimmung werden alsdann die geodätischen Linien durch jene Orthogonalkreise vertreten. Diese Massbestimmung wollen wir eine anallagmatische nennen [20]).

---

19) cf. Darboux, a. a O. p. 231., p. 217.

20) Die Geometrie in dieser Massbestimmung ist unabhängig von Darboux betrachtet worden von Beltrami: Teoria fondam. degli spazii di curvatura const. Ann. d. Mat. 2. S. 2. B. und im Anschluss daran von Killing: „Ueber 2 Raumformen mit const. pos. Krümmg.“ Bd. 86. des Cr. J. Wir wollen noch erwähnen, dass in neuester Zeit namentlich Herr Poincaré in seinen Publicationen in den Acta Math. von der gedachten Massbestimmung ausgedehnten Gebrauch macht, wenn auch zumeist im Raum von 2 Dimensionen und mit der Modification, dass bei ihm der Fundamentalkreis die Axe der reellen Zahlen ist.

„Entsprechend dem Fundamentalsatz der projectiven Massbestim-
„mung ist alsdann die Entfernung 2er Punkte definirt als der Loga-
„rithmus des Doppelverhältnisses der gegebenen 2 Punkte mit den
„Schnittpunkten des hindurchgelegten Orthogonalkreises mit der
„Fundamentalkugel.“

Fixiren wir in der vorgeführten Weise die Massbestimmungen in unsern beiden Räumen, so können wir den Satz aussprechen:

„Geodätische Linien verwandeln sich durch die Darboux'sche
„Transformation wiederum in geodätische Linien.“

Sind uns 2 confocale Flächen 2ten Grades gegeben, so wissen wir, dass die gemeinsamen Tangenten an die beiden Flächen geodätische Linien auf den Flächen umhüllen. Den gemeinsamen Tangenten an die confocalen Flächen 2ten Grades (confocal im projectiven Sinne) entsprechen je 2fach berührende Kreise an die entsprechenden 2 confocalen Cykliden; diese umhüllen also in der definirten anallagmatischen Massbestimmung ebenfalls geodätische Linien auf den Cykliden.

III. Capitel.

Das Abel'sche Theorem für überall endliche Integrale und seine Bedeutung für Flächenschaar 2ten Grades und Cyklidensystem.

§ 1. *Die Congruenz der gemeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen.*

Greift man aus der Schaar der Flächen 2ten Grades ein Ellipsoid $\lambda = \lambda_0$ und ein einschaliges Hyperboloid $\mu = \mu_0$ heraus, (wir beschränken uns hierbei auf den in Cap. II. § 1. zuerst angeführten Hauptfall, für welchen die Realitätsverhältnisse dieselben sind wie beim gewöhnlichen confocalen System) und beschränkt man die Variabilität der 3 elliptischen Parameter ν, μ, λ eines Raumpunktes dergestalt, dass

$$1) \qquad a_1 > \nu > a_2 \quad \mu_0 > \mu > a_3 \quad \lambda_0 > \lambda > a_4$$

ist, d. h. zieht man diejenigen reellen Punkte allein in Betracht, von welchen aus sich 4 reelle Tangenten an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 legen lassen, so zeigt Herr Staude in der bereits genannten Habilitationsschrift p. 22, dass die Congruenz 4ter Ordnung und Classe der gemeinsamen reellen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0 dargestellt wird durch das simultane System von Differentialgleichungen:

$$2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{\Lambda} - \dfrac{d\mu}{M} + \dfrac{d\nu}{N} = 0 \\[2ex] \dfrac{\lambda d\lambda}{\Lambda} - \dfrac{\mu d\mu}{M} + \dfrac{\nu d\nu}{N} = 0 \end{cases}$$

wo

$$3)\quad \begin{cases} \Lambda = \sqrt{(a_1-\lambda)(a_2-\lambda)(a_3-\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\lambda-a_4)(\mu_0-\lambda)} \\ M = \sqrt{(a_1-\mu)(a_2-\mu)(\mu-a_3)(\mu-a_4)(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)} \\ N = \sqrt{(a_1-\nu)(\nu-a_2)(\nu-a_3)(\nu-a_4)(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)} \end{cases}$$

und $\frac{d\lambda}{\Lambda}, \frac{d\mu}{M}, \frac{d\nu}{N}$ sämmtlich dasselbe Vorzeichen besitzen.

„Die Gleichungen 2) sind aber nichts anderes als das Abel'sche „Theorem für die überall endlichen Integrale vom Geschlecht $p=2$."

Die Fortschreitungsrichtung von einem Punkte $P=\lambda, \mu, \nu$ zu einem Nachbarpunkte $\lambda+d\lambda$, $\mu+d\mu$, $\nu+d\nu$ giebt also die Richtung einer gemeinsamen Tangente T an die Flächen λ_0 und μ_0, wenn die Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ den Gleichungen 2) genügen mit einer der 4 verschiedenen Combinationen in den Vorzeichen der Verhältnisse der Quadratwurzeln Λ, M, N.

In diesem Sinne gehört jedem durch seine Endpunkte λ, μ, ν und $\lambda+d\lambda$, $\mu+d\mu$, $\nu+d\nu$ charakterisirten Linienelemente einer solchen Tangente T eine bestimmte Combination in den Vorzeichen der Verhältnisse der Quadratwurzeln Λ, M, N zu. Man kann aber darüber hinaus dem Elemente der Tangente eine bestimmte Combination der Vorzeichen der Quadratwurzeln Λ, M, N selbst zuordnen, wenn man über das Vorzeichen einer der letzteren eine bestimmte Festsetzung macht.

Lässt man den Anfangspunkt $P=\lambda, \mu, \nu$ des Elementes längs der betreffenden Tangente T stetig fortlaufen, so werden sich die den successiven Elementen zugehörigen Wurzelfunctionen Λ, M, N stetig ändern und ihre Vorzeichen beibehalten, so lange keines der Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ sein Vorzeichen wechselt. Es liegen aber auf jeder Tangente 6 Punkte, in denen ein derartiger Zeichenwechsel stattfindet, nämlich die beiden Berührungspunkte der Tangente mit den Flächen λ_0 und μ_0 und die 4 Schnittpunkte mit den Ebenen des Coordinatentetraeders, auf welches die Gleichung der Flächenschaar bezogen ist. Diese 6 Punkte sind durch die Werte

$$\lambda=a_4,\ \lambda=\lambda_0;\quad \mu=a_3,\ \mu=\mu_0;\quad \nu=a_2,\ \nu=a_1$$

je einer der elliptischen Coordinaten charakterisirt, und es bilden die Wertepaare

$$a_4\,\lambda_0;\quad a_3\,\mu_0;\quad a_2\,a_1$$

nach den Ungleichungen 1) zugleich die Grenzen, innerhalb deren die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν eines Punktes einer reellen Tangente der beiden Flächen λ_0 und μ_0 sich bewegen.

„Wenn also der Anfangspunkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Elementes ds „der Tangente T die ganze im Unendlichen geschlossen gedachte Tan„gente durchläuft, so wechselt jede der zugehörigen Wurzelfunctionen „Λ, M, N zweimal das Vorzeichen."

Nun nimmt auch jede der Variabeln λ, μ, ν längs der Tangente jeden der ihr durch die Ungleichungen 1) zugewiesenen Wert je zweimal an; es unterscheiden sich aber zwei Stellen, in denen die Variabele den nämlichen Wert hat, durch das Vorzeichen der zugehörigen Quadratwurzel resp. Λ, M oder N. Jeder Punkt liegt nun auf 4 solchen Tangenten, die durch ihn hindurch gehen, es gehören ihm also 4 durch ihre Vorzeichen allein verschiedene Systeme Λ, M, N zu; einer der Wurzelfunctionen (Herr Staude wählt N dazu) können wir ein bestimmtes für alle 4 Tangenten gleiches Vorzeichen zuerteilen; dann haben die 4 zu einem Punkt gehörigen Tripel Λ, M, N die Vorzeichen:

$$++\varepsilon;\quad -+\varepsilon;\quad +-\varepsilon;\quad --\varepsilon.$$

Bei Herrn Staude ist $\varepsilon = +$ oder $= -$, je nachdem $x_1 . x_2$ positiv oder negativ ausfällt.

§ 2. *Die Congruenz der Doppelberührungskreise zweier confocaler Cykliden.*

Um die Resultate des vorigen Paragraphen auf den Cyklidenraum zu übertragen, wollen wir zunächst bemerken, dass, wie im Raum der Flächenschaar jeder Punkt durch die Parameter λ, μ, ν der 3 durch ihn hindurchlaufenden reellen Flächen 2ter Ordnung der Schaar bestimmt wird, im Cyklidenraum jedes Punktpaar, das conjugirt ist in Bezug auf $s_0 = 0$ (d. h. nur im Vorzeichen der Coordinate s_0 verschieden ist[21]) bestimmt ist durch die 3 Parameter λ, μ, ν der durch dasselbe hindurchlaufenden 3 Cykliden mit reellen Punkten, und zwar bestimmt auch hier ein Werttripel $\lambda\mu\nu$ 8 solche Punktpaare.

Offenbar stellen die Gleichungen 2) jetzt die Differentialgleichungen der jede von 2 Flächen des Systems doppelt berührenden Kreise dar, und zwar sind diese Flächen eine Cyklide vom Typus 3 (2schalig, Schalen in einander) und eine vom Typus 2 (ringförmig).

Beschränken wir auch jetzt die Variabilität der Parameter durch die Ungleichungen 1), so gehen wieder durch jedes Punktpaar des durch 1) beschränkten Raumes 4 reelle Kreise, die jede der 2 gege-

---

21) Ein solches Punktpaar liegt natürlich harmonisch zu den Schnittpunkten seiner Verbindungslinie mit der Fundamentalkugel $s_0 = 0$.

benen Flächen λ_0 und μ_0 in zwei in Bezug auf $s_0 = 0$ conjugirten Punkten berühren.

Genügen also die Differentiale

$$d\lambda,\quad d\mu,\quad d\nu$$

den Gleichungen 2), so geben uns die Fortschreitungsrichtungen von einem Punktpaare $(PP') = (\lambda, \mu, \nu)$ zu einem Nachbarpunktpaare $(\lambda + d\lambda, \mu + d\mu, \nu + d\nu)$ die Richtungen der gemeinsamen Doppelberührungskreise an die Flächen λ_0 und μ_0 in dem in Betracht gezogenen Punktpaare; die 4 Richtungen, die von je einem Punkte des Paares auslaufen, sind untereinander unterschieden durch die Vorzeichen der Verhältnisse der Wurzelfunctionen Λ, M, N. Jeder der 4 Richtungen, die von dem betrachteten Punktpaare (PP') auslaufen, gehört eine bestimmte Combination der Vorzeichen zu. Giebt man wiederum N ein festes Vorzeichen ε ($\varepsilon = +$ oder $= -$, jenachdem $s_1 . s_2$ positiv oder negativ ist), so sind die 4 Richtungen der durch das Punktpaar (PP') hindurchlaufenden Kreise der betrachteten Congruenz individualisirt durch die Vorzeichencombinationen

$$++\varepsilon;\quad -+\varepsilon;\quad +-\varepsilon;\quad --\varepsilon.$$

Das erste Vorzeichen in jedem Tripel bezieht sich auf Λ, das zweite auf M.

Betrachten wir jetzt einen einzelnen der 4 Kreise, die durch das Punktepaar $(PP') = (\lambda, \mu, \nu)$ gehen.

Wir lassen wiederum das Punktpaar (PP') längs des ganzen Doppelberührungskreises stetig fortlaufen; es werden sich dann die den successiven Elementen zugehörigen Wurzelfunctionen Λ, M, N stetig ändern und ihre Vorzeichen nur wechseln mit resp. $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ zusammen. Ein Zeichenwechsel dieser Grössen findet aber auf besagtem Kreise allein in 6 Punktepaaren statt, (jedes Punktepaar ist conjugirt in Bezug auf die Fundamentalkugel $s_0 = 0$).

Diese 6 Punktepaare sind charakterisirt durch die Werte je einer der cyklidischen Coordinaten

$$\lambda = a_4,\ \lambda = \lambda_0;\quad \mu = a_3,\ \mu = \mu_0;\quad \nu = a_2,\ \nu = a_1,$$

wo wiederum die Wertepaare

$$a_4,\ \lambda_0;\quad a_3,\ \mu_0;\quad a_2,\ a_1$$

die Grenzen bilden, innerhalb deren die cyklidischen Coordinaten resp. λ, μ, ν eines Punktepaares eines reellen Doppelberührungskreises der beiden Flächen λ_0 und μ_0 sich bewegen.

Wir haben demnach den Satz:

„Wenn ein Punktpaar $(PP') = (\lambda, \mu, \nu)$, das conjugirt ist in „Bezug auf $s_0 = 0$, einen Doppelberührungskreis dergestalt durchläuft, „dass jeder Punkt des Paares einen Halbkreis[22]) beschreibt, indem „P bis P', P' in derselben Richtung bis P geht, so wechselt jede der „zugehörigen Wurzelfunctionen Λ, M, N auf jedem Halbkreis zwei- „mal das Vorzeichen."

Wir brauchen darum immer nur den einen Halbkreis in Betracht zu ziehen; auf dem andern haben wir nur eine genaue Wiederholung dessen, was auf dem ersteren geschieht; jeder Punkt des ersten Halbkreises hat seinen Gegenpunkt auf dem 2ten Halbkreis, den 4ten harmonischen zu dem gegebenen und den beiden Schnittpunkten des Kreises mit der Fundamentalkugel. Da nun diese Schnittpunkte in dem vorgeführten Falle (cf. Cap. II. § 1. p. 205) conjugirt imaginär ausfallen, so ist auch die Art und Weise der Aufeinanderfolge der einzelnen Punkte auf beiden Halbkreisen genau dieselbe.

Die 4 Doppelberührungskreise, die durch das Punktepaar (PP') oder $(\lambda\mu\nu)$ hindurchlaufen, lassen sich zu 3mal 2 Paaren gruppiren.

Nun gehen aber durch das Punktepaar λ, μ, ν auch 3 Kreise, die Normalkreise K_λ, K_μ, K_ν, welche Doppelberührungskreise an 2 der Flächen λ, μ, ν sind, während sie auf der 3ten noch übrigen senkrecht stehen, K_λ z. B. berührt die Flächen μ und ν je 2fach und steht ausser auf $s_0 = 0$ auch auf der Cyklide λ senkrecht im Punktepaare λ, μ, ν.

Im Anschluss an die Resultate, die Herr Staude p. 7. seiner Habilitationsschrift erhält, finden wir sodann, dass zu jedem der 3 Normalkreise eine Gruppirung der 4 durch das Punktpaar gehenden Doppelberührungskreise zu je 2 Paaren gehört. Jedes Paar bildet mit dem Normalkreis eine Normalkugel, sodass zu jedem Normalkreis 2 Normalkugeln gehören, und wir im Ganzen 6 Normalkugeln bekommen, die sich zu 3 Paaren ordnen. In Bezug hierauf gilt nun der Satz:

„Die 4 Doppelberührungskreise an die Flächen λ_0 und μ_0 durch „das Punktpaar (PP') oder $(\lambda\mu\nu)$ ordnen sich in Bezug auf jeden der „3 Normalkreise des Punktpaars in 2 Paare und zwar dergestalt, „dass bei jeder der 3 Anordnungen der bevorzugte Normalkreis den „Winkel eines jeden Paares auf der zugehörigen Normalkugel halbirt."

---

22) Die Bezeichnung „Halbkreis" bezieht sich auf die eingeführte anallagmatische Massbestimmung.

Zwei in Bezug auf einen der Normalkreise K_λ, K_μ, K_ν conjugirte Doppelberührungskreise unterscheiden sich bezüglich im Vorzeichen von $\varDelta$, oder von M, oder von $\varDelta$ und M zugleich, da wir das Vorzeichen von N festgesetzt haben.

Bezeichnen wir die zum Punktepaar (PP') gehörigen 4 Doppelberührungskreise durch die zugehörigen charakteristischen Vorzeichencombinationen von $\varDelta$, M, N, (cf. p. 212.) und nennen die 3 Normalkugelpaare $S_{\lambda+}S_{\lambda-}$, $S_{\mu+}S_{\mu-}$, $S_{\nu+}S_{\nu-}$, so erhalten wir die Tabelle:

conjugirt in Bezug auf K_λ	$\begin{Bmatrix} ++\varepsilon \\ -+\varepsilon \end{Bmatrix}$	bilden $S_{\lambda+}$	$\begin{Bmatrix} +-\varepsilon \\ --\varepsilon \end{Bmatrix}$	bilden $S_{\lambda-}$
conjugirt in Bezug auf K_μ	$\begin{Bmatrix} ++\varepsilon \\ +-\varepsilon \end{Bmatrix}$	bilden $S_{\mu+}$	$\begin{Bmatrix} -+\varepsilon \\ --\varepsilon \end{Bmatrix}$	bilden $S_{\mu-}$
conjugirt in Bezug auf K_ν	$\begin{Bmatrix} ++\varepsilon \\ --\varepsilon \end{Bmatrix}$	bilden $S_{\nu+}$	$\begin{Bmatrix} +-\varepsilon \\ -+\varepsilon \end{Bmatrix}$	bilden $S_{\nu-}$

§ 3. *Das Additionstheorem und seine geometrische Bedeutung.*

Die Differentialgleichungen der Congruenz der Doppelberührungskreise (cf. p. 209.) sind in der gemeinsamen Form enthalten:

$$4)\qquad \frac{\nu^{k-1}d\nu}{N}-\frac{\mu^{k-1}d\mu}{M}+\frac{\lambda^{k-1}d\lambda}{\varDelta}=0\qquad k=1,\,2$$

Diese Differentialgleichungen wollen wir längs eines Doppelberührungskreises vom Punktpaar (PP') oder $(\lambda\mu\nu)$ bis zu dem Punktepaar (P_0P_0'), in welchem die Fläche λ_0 berührt wird, integriren. Das Resultat der Integration

$$5)\qquad 2\int\limits_{\nu N}^{\nu' N'}\frac{\nu^{k-1}d\nu}{N}-2\int\limits_{\mu M}^{\mu' M'}\frac{\mu^{k-1}d\mu}{M}+2\int\limits_{\lambda\varDelta}^{\lambda_0,0}\frac{\lambda^{k-1}d\lambda}{\varDelta}=0\qquad k=1,\,2$$

giebt 2 Relationen zwischen den cyklidischen Coordinaten ν, μ, λ und $\nu'\mu'$ der Punktepaare (PP') und (P_0P_0'). Die Integration ist für alle 3 Integrale in der Weise auszuführen, dass für jedes Punktpaar des betreffenden Kreises die demselben als einem Punktepaar dieses Tangentialkreises zugehörigen Wurzelfunctionen $NM\varDelta$ einschliesslich ihrer Vorzeichen in Rechnung gezogen werden.

Zweien der Anfangselementenpaare der 4 gemeinsamen Doppelberührungskreise kommt ein positives, zweien ein negatives Vorzeichen von $\varDelta$ zu. Längs $\widehat{PP_0}$, resp. $\widehat{P'P_0'}$ wechselt das Vorzeichen von $\varDelta$ nicht; ob die Vorzeichen von N' und N und die von M' und M mit einander übereinstimmen oder nicht, das hängt davon ab, ob der

Bogen $\widehat{PP_0}$ — und natürlich auch $\widehat{P'P_0'}$ — die Ebenen $\nu = a_2$, $\nu = a_1$ und $\mu = a_3$ durchsetzt, resp. die Fläche $\mu = \mu_0$ berührt.

Löst man die gefundenen Relationen 5) zwischen $\lambda\mu\nu$ und $\mu'\nu'$ in der folgenden Weise auf:

$$6) \quad 2\int\limits_{a_2}^{\nu'N'} \frac{\nu^{k-1}\,d\nu}{N} - 2\int\limits_{a_3}^{\mu'M'} \frac{\mu^{k-1}d\mu}{M} - 2\int\limits_{a_2}^{\nu N} \frac{\nu^{k-1}\,d\nu}{N} + 2\int\limits_{a_3}^{\mu M} \frac{\mu^{k-1}\,d\mu}{M} - 2\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} \frac{\lambda^{k-1}\,d\lambda}{\Lambda} = 0 \quad k = 1, 2$$

so erhält man das Resultat:

„Zwischen den cyklidischen Coordinaten $\nu'\mu'$ des Berührungs- „punktpaars (P_0P_0') einer der vier vom Punktpaar (PP') an die „beiden Flächen λ_0 und μ_0 laufenden gemeinsamen Doppelberührungs- „kreise mit der Fläche λ_0 einerseits und den cyklidischen Coordinaten „λ, μ, ν des Punktepaares (PP') andererseits bestehen die Relationen:

$$7) \quad \begin{cases} 2\int\limits_{a_2}^{\nu, N} \frac{d\nu}{N} - 2\int\limits_{a_3}^{\mu, M} \frac{d\mu}{M} + 2\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} \frac{d\lambda}{\Lambda} = 2\int\limits_{a_2}^{\nu', N'} \frac{d\nu}{N} - 2\int\limits_{a_3}^{\mu', M'} \frac{d\mu}{M} \\ 2\int\limits_{a_2}^{\nu, N} \frac{\nu d\nu}{N} - 2\int\limits_{a_3}^{\mu, M} \frac{\mu d\nu}{M} + 2\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\Lambda} = 2\int\limits_{a_2}^{\nu', N'} \frac{\nu d\nu}{N} - 2\int\limits_{a_3}^{\mu', M'} \frac{\mu d\nu}{M} \end{cases}$$

„wo N, M, Λ die dem Punktepaare (PP') und $N'M'$ die dem „Punktepaare (P_0P_0') als Punkten des betrachteten Kreises zugehörigen „zusammengesetzten Wurzelfunctionen bedeuten."

Dieser Satz enthält die geometrische Deutung des einfachen Additionsproblems, welches verlangt, bei gegebenen oberen Grenzen ν, μ, λ und gegebenen Vorzeichen von N, M, Λ die oberen Grenzen ν', μ' und die Vorzeichen von N', M' so zu bestimmen, dass von Periodenmultipla abgesehen die beiden Relationen 7) bestehen.

Die geometrische Lösung des Problems ist demnach die folgende:

Man fixirt auf der Fläche λ eines der Punktepaare $\nu\mu$, für welches die zugehörige Wurzelfunction N das gegebene Vorzeichen besitzt, und wählt unter den 4 durch dieses Punktpaar (PP') gehenden

gemeinsamen Tangentialkreisen der Flächen λ_0 und μ_0 denjenigen aus, dem im Punktepaar (PP') die gegebenen Vorzeichen von M und A zukommen. Die cyklidischen Coordinaten des Berührungspunktpaars $(\nu'\mu')$ mit der Fläche λ_0 sind die gesuchten oberen Grenzen und die dem Punktpaare als einem Punktpaare des in Rede stehenden Kreises zukommenden zusammengesetzten Wurzelfunctionen N' und M' sind die gesuchten Wurzelwerte N' und M'.

§ 4. *Schliessungssätze innerhalb der Congruenz der gemeinsamen Doppelberührungskreise zweier confocaler Flächen.*

Kreispolygone, welche den Flächen λ_0 und μ_0 umschrieben und einer Fläche λ gleichzeitig einbeschrieben sind.

Neben den Flächen λ_0 und μ_0 sei eine dritte Fläche $\lambda < \lambda_0$ gegeben, welche also von λ_0 umschlossen wird. Es sollen Kreispolygone betrachtet werden, welche den beiden Flächen λ_0 und μ_0 umschrieben und der Fläche λ einbeschrieben sind.

Den ersten Eckpunkt $P^{(0)}$ und mit ihm seinen Gegenpunkt $P^{(0)'}$ kann man auf λ beliebig wählen. Von den 4 durch sie hindurchgehenden Doppelberührungskreisen wählt man einen als Anfangsseite $S^{(1)}$ des Polygons; zugleich geht von $P^{(0)'}$ aus, auf demselben Kreise liegend, die Seite $S^{(1)'}$ aus und bildet mit den folgenden Kreisstücken ein 2tes Polygon. $S^{(1)}$ schneidet, nachdem die Fläche λ_0 berührt worden ist, die Fläche zum 2ten Male; der Schnittpunkt ist der zweite Eckpunkt $P^{(1)}$ des Polygons. Ebenso erhalten wir als Endpunkt von $S^{(1)}$ einen 2ten Eckpunkt $P^{(1)'}$ des conjugirten Polygons. Das 2te Seitenpaar $(S^{(2)}S^{(2)'})$ wählen wir unter den 3 gemeinsamen Kreisen, die neben $(S^{(1)}S^{(1)'})$ noch durch $(P^{(1)}P^{(1)'})$ hindurchgehen, so aus, dass $S^{(2)}$ conjugirt zu $S^{(1)}$, $S^{(2)'}$ conjugirt zu $S^{(1)'}$ in Bezug auf λ ist (cf. p. 213.).

Bei dieser Festsetzung, die auch für die folgenden Polygonseiten Geltung behalten soll, ist die Construction des Polygons eindeutig bestimmt, nachdem Anfangspunkt und Anfangsseite gegeben sind. Die beiden entstehenden Polygone — wir erhalten ja ein conjugirtes Polygon, dessen Seiten und Ecken durch Accente markirt sind — sind durch die Kugel $s_4 = 0$ von einander getrennt. Wir verfolgen ja immer die Richtung auf den Kreisen von λ bis λ_0, durchsetzen aber nie die Fläche $\lambda = a_4$. Es kann also keine Vereinigung der beiden Polygone zu einem stattfinden.

Es handelt sich nun gegenwärtig um die Frage, ob die bei der Polygonconstruction gegebenen Elemente, nämlich die Parameter λ_0, μ_0, λ der vorgelegten Flächen, sowie Anfangspunkt und Anfangs-

seite der Polygonconstruction so gewählt werden können, dass die Construction mit l Seiten sich schliesst, d. h. die Seite $S^{(l)}$ wieder in die Anfangsecke $P^{(0)}$ so einläuft, dass $S^{(l)}$ und $S^{(1)}$ conjugirt in Bezug auf λ sind.

Aus den Relationen 7) folgt durch wiederholte Anwendung offenbar die Bedingung:

$$8)\quad \begin{aligned} 2l\int_{\lambda,\,\Lambda}^{\lambda_0}\frac{d\lambda}{\Lambda} - 4m\int_{a_3}^{\mu_0}\frac{d\mu}{M} + 4n\int_{a_2}^{a_1}\frac{d\nu}{N} &= 0 \\ 2l\int_{\lambda,\,\Lambda}^{\lambda_0}\frac{\lambda d\lambda}{\Lambda} - 4m\int_{a_3}^{\mu_0}\frac{\mu d\mu}{M} + 4n\int_{a_2}^{a_1}\frac{\nu d\nu}{N} &= 0 \end{aligned}$$

Denn die Variabeln μ und ν bewegen sich längs des Polygonumfangs stetig oscillirend zwischen den beiden Grenzen a_3 und μ_0, resp. a_2 und a_1 hin und her, und die Vorzeichen von M und N wechseln immer nur in diesen Grenzen. Demnach bezeichnet $2n$ die Anzahl der Durchgangspunkte durch jede der Ebenen $\nu = a_2$ und $\nu = a_1$, und $2m$ die Anzahl der Durchgangspunkte durch die Ebene $\mu = a_3$ und der Berührungspunkte des Polygonumfangs mit der Fläche μ_0.

Die Bedingungen 8) ergeben uns den Satz:

„Wenn ein den Flächen λ_0 und μ_0 umschriebenes und der Fläche „λ einbeschriebenes Polygon sich einmal mit l Seiten schliesst, so „schliesst es sich immer mit derselben Seitenzahl, wie auch der Anfangs„punkt und die Anfangsseite auf der Cyklide λ gewählt werden mag."

„Neben diesem einen Polygon erhalten wir alsdann stets noch „ein zweites, das die zweite Schale der Fläche λ_0 berührt und von „dem ersten Polygon durch $\lambda = a_4$ getrennt ist. Schliesst sich das „erste Polygon, so schliesst sich notwendig auch das zweite, zu dem „ersten conjugirte."

Natürlich werden keineswegs alle Polygone, die wir im Raum der Flächenschaar 2ten Grades betrachten, wenn wir sie auf den Cyklidenraum übertragen, 2 getrennte Polygone liefern; im allgemeinen Falle wird vielmehr ein einziges Polygon mit doppelter Seitenzahl entstehen. Gestatten wir nämlich unseren Polygonseiten im Raum der Flächenschaar 2ten Grades auch die 4te Ebene des Coordinatentetraeders $x_4 = 0$ zu durchsetzen (bei Herrn Staude fällt dieselbe mit der unendlich fernen Ebene zusammen), so durchsetzt unser Kreispolygon im Cyklidenraum die Kugel $s_4 = 0$, in der Bedingungs-

gleichung 8) tritt noch die Periode $\int_{a_0}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\Lambda}$ auf, und wir werden im Allgemeinen ein einziges Polygon mit doppelter Seitenzahl erhalten.

Leicht könnten wir nun die Zahl der Schliessungssätze beliebig vermehren, indem wir ähnlich wie Herr Staude in seiner Habilitationsschrift die gestellten Bedingungen variiren oder die von Doppeltangentialkreisen der Congruenz umhüllten geodätischen Linien der Flächen λ_0 und μ_0 in Betracht ziehen und geodätische Polygone uns bilden. Wir lassen uns aber an dem einen Beispiele genügen, da eine weitere Ausführung nichts principiell Neues zu Tage fördern würde.

Wir gehen auch nicht auf die Darstellung der Punkte und Kugeln, sowie der Kreise des Cyklidenraumes durch hyperelliptische, speciell Θ Functionen und die Deutung der hauptsächlichen Θ Relationen selbst ein, sondern verweisen auf die vielfach genannte Schrift des Herrn Staude: Geometrische Deutung der Additionstheoreme etc. (22. B. der Annalen). Die dort gefundenen Resultate übertragen sich eben mit so geringen Modificationen auf den Cyklidenraum, dass es sich kaum verlohnen würde, die Untersuchung nochmals vorzuführen. Es mag also dieser Hinweis genügen, und wir gehen zum 2ten Teil über, die Cyklide in Beziehung zu setzen zur Kummer'schen Fläche

---

Inhaltsübersicht.

Einleitung . . . . p. 193

I. Teil.
Flächenschaar 2ten Grades und Cyklidensystem.

I. Capitel.
Transformation der Flächenschaar 2ten Grades in ein confocales Cyklidensystem 199

II. Capitel.
Gestaltliche Verhältnisse der Cykliden.

§ 1. Hauptformen 204

§ 2. Krümmungslinien 207

§ 3. Geodätische Curven 208

III. Capitel.
Das Abel'sche Theorem für überall endliche Integrale und seine Bedeutung für Flächenschaar 2ten Grades und Cyklidensystem.

§ 1. Congruenz der gemeinsamen Tangenten 2er confocaler Flächen der Schaar 209

§ 2. Congruenz der Doppelberührungskreise 2er confocaler Cykliden 211

§ 3. Das Additionstheorem und seine geometrische Bedeutung 214

§ 4. Schliessungssätze innerhalb der Congruenz der gemeinsamen Doppelberührungskreise 2er confocaler Flächen 216

IX.

Miscellen.

1.

Zur Theorie des Winkelspiegels.

Durch das Studium der grösseren Abhandlung über den Winkelspiegel, welche mein Vater L. Mack unlängst in dieser Zeitschrift veröffentlicht hat, bin ich dazu gelangt, eine neue Formel zu finden, die unter allen Umständen dazu dient, schnell die Gesamtzahl S der Bilder zu bestimmen, welche ein in die Oeffnung des Winkelspiegels gebrachter leuchtender Punkt P hervorruft. Sie lautet:

$$S = \left[\frac{180^0 + S_1}{2\alpha}\right] + \left[\frac{180^0 + S_2}{2\alpha}\right]$$

2α ist der Oeffnungswinkel des Winkelspiegels, und S_1 und S_2 bedeuten diejenigen zwei Winkel, welche die aus der Axe des Winkelspiegels durch P gelegte Ebene mit den zwei Einzelspiegeln bildet. Jede der rechts vorkommenden Klammern soll bedeuten, dass für den von ihr eingeschlossenen Quotienten, mag er nun eine ganze Zahl oder ein Bruch sein, statt seines wahren Werts vielmehr die zunächst unter diesem liegende ganze Zahl zu nehmen sei. Von zwei etwa zusammenfallenden Bildern ist in dem Ausdruck für S jedes selbständig gezählt.

Sofern die Leser des Archivs an jene grössere Abhandlung sich erinnern oder nur die vier ersten §§ derselben nachlesen wollen, so ist mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungsweise die Herleitung der neuen Formel kurz anzugeben wie folgt.

Man betrachte zunächst diejenige Bilderreihe, die von dem Bilde P_1' ausgeht, und nur diejenigen weitern P_2'', P_3', P_4'', P_5'.... enthält, deren jedes von dem ihm nächst vorangehenden erzeugt wird. Für diese Bilder ist nun gemäss dem Hauptsatz des § 3. folgende Reihe von Winkelangaben zu machen:

$$\begin{aligned}
&\text{Wkl. } AOP_1' = \varphi_1\\
&\text{Wkl. } BOP_2'' = 2\alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } AOP_3' = 4\alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } BOP_4'' = 6\alpha + \varphi_1\\
&\quad\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Führt man jetzt vielmehr diejenigen Winkel ein, welche die Linien OP_1', OP_2'', OP_3', OP_4''.... mit der Mediane OM bilden, so erhält man statt obiger Reihe die neue:

$$\text{I)} \quad \left\{\begin{aligned}
&\text{Wkl. } MOP_1' = \alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } MOP_2'' = 3\alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } MOP_3' = 5\alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } MOP_4'' = 7\alpha + \varphi_1\\
&\quad\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}\right.$$

Man bemerkt, dass jeder dieser Winkel um 2α grösser ist, als der ihm nächst vorangehende. Werden zugleich die den toten Raum betreffenden Angaben des § 4. berücksichtigt, so ist auch auf diesem Wege leicht zu beweisen, dass die Zahl der unter I) vorkommenden Bilder eine begrenzte ist.

Nun nehme man zu jedem der Bildpunkte P_1', P_3', P_5' P_7'...., welche alle hinter dem ersten Spiegel frei liegen, den bezüglich der Geraden MO mit ihm symmetrischen Punkt. Diese Hilfspunkte der Reihe nach mit Π_1', Π_3', Π_5', Π_7'.... bezeichnet, so hat man vermöge I) auch folgende Reihe:

$$\text{II)} \quad \left\{\begin{aligned}
&\text{Wkl. } MO\Pi_1' = \alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } MOP_2'' = 3\alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } MO\Pi_3' = 5\alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } MOP_4'' = 7\alpha + \varphi_1\\
&\quad\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}\right.$$

Diese Reihe bietet den Vorteil, dass die in ihr aufgeführten Winkel alle nach einerlei Richtung von OM aus gerechnet sind.

Wird jetzt mit s_1 die Zahl der Bilder P_1', P_2'', P_3', P_4''.... bezeichnet, so ist dieselbe identisch mit der Zahl der Punkte P, Π, welche in der Reihe II) vorkommen. Man sieht ferner leicht (vergl. § 4. der grössern Abhandlung), dass kein Winkel dieser Reihe die Grösse des überflachen $MO\mathfrak{B}$ erreichen kann. Hienach ist bezüglich der Zahl s_1 zu schliessen: sie muss die grösste ganze Zahl sein, die der Ungleichung genügt

$$180^0 + \alpha > (2s_1 - 1)\alpha + \varphi_1$$

welche mit Beiziehung von φ_2 für $2\alpha - \varphi_1$ übergeht in

$$s_1 < \frac{180^0 + \varphi_2}{2\alpha}.$$

Sollte der Fall eintreten, dass ein letzter Punkt P_x'' der Reihe II) gerade noch in den Punkt 𝔅 fiele, so dürfte er nach § 4. als Bild nicht mehr gezählt werden und x wäre gegenüber von s_1 um Eins zu gross. Man hätte dann aber für diesen Punkt P_x''

$$180^0 + \alpha = (2x - 1)\alpha + \varphi_1 \text{ und } x = \frac{180^0 + \varphi_2}{2\alpha}.$$

In diesem Fall ergäbe sich der Quotient $(180^0 + \varphi_2):2\alpha$ als ganze Zahl, wie man auch durch geometrische Betrachtung leicht findet.

Demgemäss können wir schreiben

$$s_1 = \left[\frac{180^0 + \varphi_2}{2\alpha}\right]$$

in dem Sinne gemeint, dass für den eingeklammerten Quotienten, mag er ein Bruch oder eine ganze Zahl sein, die zunächst u n t e r ihm befindliche ganze Zahl genommen werde.

Es ist nun leicht zu übersehen, dass für die bisher aus dem Spiel gelassenen Bilder P_1'', P_2', P_3'', P_4'...., welche alle von P_1'' abstammen, die den obigen Betrachtungen ganz analogen zutreffen, so dass demnach ihre Anzahl s_2 anzugeben ist durch die Gleichung

$$s_2 = \left[\frac{180^0 + \varphi_1}{2\alpha}\right]$$

wobei die Klammer rechts in demselben Sinne zu verstehen ist, wie oben.

Da die Gesamtzahl S der Bilder aus der Summe der von P_1' und der von P_1'' abstammenden besteht, so sind wir hiemit zu derjenigen Formel gelangt, welche am Anfang dieser Mitteilung angegeben ist.

Fallen zwei Bilder zusammen, was nur eintritt, wenn $360:2\alpha$ eine ganze gerade Zahl ist (vergl. § 13. der grössern Abh.), so sind dieselben, als die Schlussbilder der zwei von uns betrachteten Reihen, in dem Ausdruck für S nicht als Eines, sondern als zwei Bilder in Rechnung gezogen.

Stuttgart. Dr. **Karl Mack.**

2.

Beweis, dass auf einer algebraischen Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden ausser dieser nicht mehr als 16 Geraden liegen können.

Clebsch hat gezeigt[1]), dass jede algebraische Fläche 4. O. mit einer Doppelgeraden ausser dieser noch 16 Geraden enthält, welche sämtlich die Doppelgerade schneiden und sich zu 8 Paaren ordnen. Dass diese Geraden die einzigen sind, welche die Fläche enthalten kann, ohne zu zerfallen, wurde von ihm a. a. O. ebenfalls dargetan, jedoch nur in abzählender Weise auf Grund einer ebenen Abbildung der Fläche, sodass ein directer Beweis noch wünschenswert erscheint. Ich teile im Folgenden einen solchen mit; es werde ihm kurz der Nachweis der 8 Geradenpaare nach Clebsch vorausgeschickt, damit ich mich bequem darauf beziehen kann.

Die Gleichung einer Fläche der genannten Art hat die Form

$$1) \qquad A^2u + ABv + B^2w = 0,$$

wo $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ die Gleichungen von 3 Flächen 2. O., $A = 0$, $B = 0$ die Gleichungen von zwei Ebenen sind, welche sich in der Doppelgeraden schneiden. Die Fläche wird also erzeugt als Ort der Schnittcurven aller Flächen der Schaar

$$2) \qquad u + \lambda v + \lambda^2 w = 0$$

mit den entsprechenden Ebenen des Büschels

$$3) \qquad B - \lambda A = 0.$$

Unter den Ebenen dieses Büschels befinden sich auch solche, welche die ihnen entsprechenden Flächen der Schaar 2) berühren d. h. in einem Geradenpaare schneiden. Die Zahl dieser Ebenen ist also die Zahl der Geradenpaare auf der Fläche; stellt man aber die betreffende Bedingungsgleichung für den Parameter λ in der bekannten Determinantenform auf, so findet man dieselbe vom Grade 8, wie behauptet.

Gesetzt nun, es gäbe ausser diesen 8 Geradenpaaren noch eine weitere Gerade s auf der Fläche. Dann ist zunächst aus der soeben zur Ermittelung der 8 Geradenpaare angestellten Ueberlegung klar, dass dieselbe die Doppelgerade nicht schneiden kann. Daraus ergiebt sich weiterhin, dass s notwendig wenigstens je eine Gerade aus den

---

1) Clebsch, Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der 4. und 5. Ordnung. Math. Annalen Bd. 1.

8 Geradenpaaren schneiden muss. Denn sind a und α zwei Geraden eines Paares, l die Doppelgerade, und man legt durch l diejenige Ebene, welche a und α enthält, so hat diese Ebene mit der Fläche ausser l, a und α keine weiteren Elemente mehr gemein; sie schneidet aber s in einem Punkte, welcher nicht auf l liegt, folglich auf a oder α, oder im Schnittpunkt beider liegen muss.

Nun seien a, b, c, d, e 5 Geraden aus den 8 Paaren, welche von von s geschnitten werden. Dann kann man durch a, b, c einerseits und durch c, d, e andererseits je eine Regelfläche 2. O. legen. Dieselben haben dann c, l und s gemein, schneiden sich also nur noch in einer Geraden f, welche l und s schneidet, c aber nicht, oder sie sind identisch. Letzteres würde nach sich ziehen, dass die 5 Geraden a, b, c, d, e von den unendlich vielen Geraden geschnitten werden, welche die andere Regelschaar der durch a, b, c, d, e gehenden Regelfläche bilden. Von diesen schneidet aber jede die Fläche 4. O. in 5 Punkten, gehört derselben also gänzlich an, die Fläche 4. O. würde also in dieser Regelfläche 2. O. und noch eine andere zerfallen.

Es bleibt daher nur der erstere Fall, dass sich die beiden Regelflächen in einer Geraden f schneiden, welche c nicht, wohl aber l und s trifft. Nun schneiden diese Regelflächen die Fläche 4. O. schon in 6 Geraden, nämlich in a, b, c, s und der doppelt gezählten l, resp. in c, d, e, s und l doppelt gezählt, haben also mit ihr nur noch je einen Kegelschnitt gemein; es müssten sich also diese beiden Kegelschnitte in denselben 4 Punkten schneiden, in welchen die Gerade f die Fläche 4. O. trifft, was nicht möglich ist — oder auch f gehört der Fläche an, ist also eine Gerade aus einem der noch übrigen Geradenpaare, und die beiden Kegelschnitte zerfallen in f und je eine weitere Gerade p oder q, welche beide l und s nicht schneiden, von denen aber etwa p die Geraden a, b, c, f, und q die Geraden d, e, c, f trifft. Es schneidet aber, wie oben bewiesen, jede dieser beiden Geraden p und q ebenso wie s im Ganzen wenigstens 8 Geraden aus den 8 Geradenpaaren, also z. B. p ausser a, b, c, f auch noch δ, ε, g, h. Die durch l, s und p gelegte Regelfläche 2. O. hat folglich mit der Fläche 4. O. im Ganzen s, p, a, b, c, δ, ε, g, h und die doppelt zählende Gerade l gemein d. h. sie ist ein Teil der Fläche 4. O., und diese zerfällt also auch in diesem nur noch übrigen Fall in 2 Regelflächen 2. O.

Oberehnheim im Els. Januar 1885. Alfred Leman.

X.

Die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Functionen.

Von

Paul Richard Domsch.

II. Teil.

Kummer'sche Flächen und Cykliden.

I. Capitel.

Die Kummer'sche Fläche und die Lie'sche Berührungstransformation.

§ 1. *Die Fundamentalgebilde in der Geometrie der Kummer'schen Fläche und ihre Uebertragung.*

Indem wir die schon citirte Arbeit des Herrn Lie im 5 ten Band der Annalen: „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe" und die darin gegebene Berührungstransformation im wesentlichen als bekannt voraussetzen, bemerken wir zunächst, dass durch letztere 2 Räume in dreierlei Auffassung in Beziehung gesetzt werden.

Entweder man lässt Flächenelementen des einen Raumes Flächenelemente im andern entsprechen, wie es der Begriff der Berührungstransformation mit sich bringt, und zwar den Flächenelementen im ersten Raum r, die 2 consecutive Punkte einer Geraden enthalten, die Elemente der entsprechenden Bildkugel; es ist dies die vollkommenste, aber auch schwierigste Art und Weise, die beiden Räume r und R mit ihren Gebilden in einander zu transformiren, schwierig darum, weil bei derselben die beiden Räume als Aggregate von Flächenelementen aufgefasst werden müssen.

Unsere Lie'sche Berührungstransformation führt aber auch zweitens die dreifach unendlich vielen Punkte des einen Raumes r über in den Complex der Minimalgeraden in R, und drittens die Punkte des Raumes E in die Geraden von r, die einem ausgezeichneten linearen Complexe angehören [1]).

Diese beiden letzten Arten der Uebertragung werden wir der leichteren Behandlung wegen im Folgenden vorzugsweise zur Anwendung bringen, und zwar wechselsweise, indem wir einerseits von den Punkten des Raumes der Kummer'schen Fläche ausgehen, aber auch die Geraden des linearen Complexes in Betracht ziehen und diese in die Punkte des Cyklidenraumes transformiren.

Als Fundamentalgebilde [2]) treten in dem Raume r, welcher in den Cyklidenraum R abgebildet werden soll, zunächst die

6 Fundamentalcomplexe auf

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 0$$

Einen dieser 6 Fundamentalcomplexe, $x_6 = 0$ etwa, werden wir vor den übrigen auszeichnen, indem wir ihn zu demjenigen linearen Complex wählen, dessen Gerade sich in die Punkte, oder präciser ausgedrückt, in die Punktkugeln des andern Raumes abbilden.

Wir markiren demnach als erstes Ergebniss:

„Den Geraden des ausgezeichneten Fundamentalcomplexes ent- „sprechen die Punktkugeln des Cyklidenraumes“.

Es restiren noch die 5 übrigen Fundamentalcomplexe, welche unter sich und mit dem sechsten in Involution liegen; einem solchen mit dem ausgezeichneten Fundamentalcomplex in Involution liegenden Complex entspricht aber ein Kugelcomplex, ein Kugelgebüsch im Reye'schen Sinne [3]), ∞^3 Kugeln, welche sämmtlich orthognal zu einer durch sie vollständig bestimmten Kugel stehen, deren Centrum ihr

---

1) Die Abbildung eines linearen Complexes auf den Punktraum hatte vor Herrn Lie schon Herr Nöther gegeben („Zur Theorie der algebraischen Functionen“, Göttinger Nachrichten, 1869). Dass jedoch beide Räume einen Complex enthalten, dessen Linien sich als die Punkte des 2ten Raumes abbilden, hat Herr Lie zuerst hervorgehoben.

2) Die Fundamentalgebilde der Kummer'schen Fläche — die 6 Fundamentalcomplexe und deren Combinationen zu je zweien, dreien und vieren — wurden behandelt von Herrn Klein: „Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades“, Math, Annalen Bd. 2., p. 198.

3) cf. Reye, „Synthetische Geometrie der Kugeln u. lin. Kugelsysteme“.

Potenzcentrum ist — ein Punkt, welcher in Bezug auf alle Kugeln des Gebüsches dieselbe Potenz besitzt —; das Quadrat des Radius jener Orthogonalkugel ist entgegengesetzt gleich dem Wert der Potenz des Potenzcentrums.

Zwei Gerade eines dieser 5 Complexe, die in Bezug auf $x_6 = 0$ conjugirte Gerade darstellen, transformiren sich in dieselbe Kugel; den Punkten der einen Geraden entspricht die eine imaginäre Erzeugendenschaar der Kugel, den Punkten der conjugirten Geraden die andere imaginäre Erzeugendenschaar. Wir erhalten also den Satz:

„Den Geraden der übrigen 5 Fundamentalcomplexe

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0$$

„entsprechen, zu je zweien als conjugirte Gerade in Bezug auf $x_6 = 0$ „zusammengenommen, die Kugeln von 5 zu einander orthogonalen „Kugelgebüschen. Die Kugeln jedes Gebüsches stehen senkrecht auf „einer durch sie bestimmten Orthogonalkugel. Diese Orthogonal- „kugeln stehen infolgedessen selbst auf einander senkrecht und bilden „ein Fundamentalsystem“.

Weiterhin treten als Fundamentalgebilde in dem abzubildenden Raume die 15 Congruenzen auf:

1a) $x_1 = 0 \;\; x_6 = 0; \quad x_2 = 0 \;\; x_6 = 0; \quad x_3 = 0 \;\; x_6 = 0;$
$x_4 = 0 \;\; x_6 = 0; \quad x_5 = 0 \;\; x_6 = 0$

1b)
$$\begin{cases} x_1 = 0 \; x_2 = 0; \quad x_1 = 0 \; x_3 = 0; \quad x_1 = 0 \; x_4 = 0; \\ \qquad x_1 = 0 \; x_5 = 0 \\ x_2 = 0 \; x_3 = 0; \quad x_2 = 0 \; x_4 = 0; \quad x_2 = 0 \; x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \; x_4 = 0; \quad x_3 = 0 \; x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \; x_5 = 0 \end{cases}$$

Auch diese teilen sich in die Untergruppen 1a) und 1b) von 5 resp. 10 Congruenzen, je nachdem $x_6 = 0$ mit auftritt oder nicht.

Den 5 ersten Congruenzen 1a) entsprechen, da $x_6 = 0$ sich in die Punktkugeln abbildet, 5 Schaaren von ∞^2 Punktkugeln des Cyklidenraumes, die je einem der $x_i = 0$ ($i = 1, 2 \dots 5$) entsprechenden Kugelcomplexe angehören. Die Punktkugeln eines Kugelcomplexes liegen aber sämmtlich auf der Orthogonalkugel und bilden dieselbe. Den 5 Congruenzen entsprechen also mit den 5 Punkt-

kugelbündeln 5 zu einander senkrechte Kugeln, welche von den Punktkugeln gebildet werden, also das Fundamentalsystem:

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_3 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_5 = 0.$$

Wir haben demnach den Satz:

„Die 5 Congruenzen, die von dem ausgezeichneten Fundamental-„complexe verbunden mit je einem der übrigen 5 Fundamentalcom-„plexe gebildet werden, entsprechen die 5 Fundamentalkugeln des „Cyklidenraumes, resp. die Punktkugelcongruenzen, welche die 5 „Fundamentalkugeln bilden".

Den restirenden 10 Congruenzen, die wir unter 1b) aufführten, entsprechen 10 Kugelbündel, die orthogonal sind zu den 10 Kugelbüscheln:

$$s_1 = 0\ s_2 = 0, \quad s_1 = 0\ s_3 = 0, \quad s_1 = 0\ s_4 = 0, \quad s_1 = 0\ s_5 = 0;$$
$$s_2 = 0\ s_3 = 0, \quad s_2 = 0\ s_4 = 0, \quad s_2 = 0\ s_5 = 0;$$
$$s_3 = 0\ s_4 = 0, \quad s_3 = 0\ s_5 = 0;$$
$$s_4 = 0\ s_5 = 0.$$

Eine jede Kugel eines Bündels muss ja senkrecht stehen auf den Orthogonalkugeln der beiden das Bündel bestimmenden Kugelgebüschen, senkrecht stehen also auch auf den durch die beiden Orthogonalkugeln bestimmten Kugelbüschel. Wir erhalten so den weiteren Satz:

„Den 10 Congruenzen 1b) entsprechen 10 Kugelbündel, deren „Kugeln jeweils senkrecht stehen auf je zweien der 5 Orthogonal-„kugeln, also auch orthogonal sind zu den durch dieselben bestimmten „10 Kugelbüscheln".

Jetzt fassen wir je 3 der 6 Fundamentalcomplexe zusammen und erhalten 20 Tripel von F u n d a m e n t a l c o m p l e x e n. Je ein Tripel liefert eine E r z e u g u n g einer der 10 F u n d a m e n t a l f l ä c h e n 2 t e n G r a d e s. Es gehören also je 2 Tripel zusammen, welche dieselbe Fundamentalfläche liefern:

(123) (456) (124) (356) (125) (346) (134) (256) (135) (246)
(234) (156) (235) (146) (245) (136) (345) (126) (145) (236).

Den 10 jedesmal zu zweit geschriebenen Tripeln, welche $x_6 = 0$ enthalten, entsprechen notwendigerweise Kugelbüschel, die nur aus Punktkugeln bestehen; sie müssen ausserdem den durch 2 der Fundamentalkugeln definirten 2 Kugelgebüschen angehören. Es sind also die Punktkugeln, welche die 10 Schnittkreise je zweier der 5 Fundamentalkugeln bilden.

Den Tripel

$$x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 0$$

entsprechen z. B. die Punktkugeln, welche den Kreis

$$s_4 = 0 \quad s_5 = 0$$

bilden.

Die andere Erzeugung nun, welche dieselbe Fundamentalfläche 2ter Ordnung liefert und definirt ist durch

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0,$$

diese einfach unendliche Schaar gerader Linien transformirt sich ebenso in eine ∞^1 Schaar von Kugeln, ein Kugelbüschel, gebildet von allen Kugeln, welche zugleich senkrecht stehen auf den Kugeln des Fundamentalsystems

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_3 = 0$$

$s_4 = 0$ und $s_5 = 0$ sind nun 2 Kugeln, die auf den 3 genannten senkrecht stehen; es wird also das durch

$$s_4 = 0 \quad s_5 = 0$$

definirte Kugelbüschel das gesuchte sein. Die 2te Erzeugung unserer herausgegriffenen Fundamentalfläche liefert also in anderer Auffassung allerdings denselben von 2 Fundamentalkugeln gebildeten Kreis wie die erste Erzeugung.

Wir sprechen das erhaltene Resultat folgendermassen aus:

„Den zweifachen Erzeugungsweisen der Fundamentalflächen 2ter „Ordnung entspricht durch die Berührungstransformation eine zwei-„fache Erzeugungsweise der 10 Fundamentalkreise, gebildet durch je „zwei der fünf Fundamentalkugeln. Das einemal werden die Kreise „durch die auf ihnen liegenden Punktkugeln, das anderemal durch „die Kugelbüschel erzeugt, deren Träger sie sind".

Jetzt bilden wir die 15 möglichen Quadrupel aus den 6 Fundamentalcomplexen, und zwar ordnen wir sie in 2 Gruppen zu 10 und 5, je nachdem sie $x_6 = 0$ enthalten oder nicht:

$$1a) \quad \begin{cases} (1236) \quad (1246) \quad (1256) \quad (1346) \quad (1356) \\ (1456) \quad (2346) \quad (2356) \quad (2456) \quad (3456) \end{cases}$$

$$1b) \quad (1234) \quad (1235) \quad (1245) \quad (1345) \quad (2345).$$

Je 4 der Fundamentalcomplexe haben 2 Gerade gemein; diese bilden die Directricen der Congruenzen, welche jeweils gebildet werden

aus den noch übrigen 2 Fundamentalcomplexen, (1236) liefert also z. B. die Directricen der Congruenz

$$x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad \text{etc.}$$

Die durch die ersten 10 Quadrupel 1a) definirten 20 Geraden gehören nun sämmtlich dem ausgezeichneten Fundamentalcomplex $x_6 = 0$ an; jede der 20 liefert also für sich eine Kugel, und zwar eine Punktkugel, welche jedesmal dreien der durch die Fundamentalkugeln definirten Gebüschen angehört. Als Punktkugel liegt sie demnach auf der jedesmaligen Orthogonalkugel des Gebüsches. Je 2 zusammengehörige Punktkugeln werden also gebildet von den beiden Punkten, welche je dreien der Fundamentalkugeln gemeinsam sind.

Wir bekommen demnach diesen ersten 10 Directricenpaaren entsprechend die 10 Punktkugelpaare:

$$\text{2a)} \quad \begin{array}{lll} s_1=0 \; s_2=0 \; s_3=0 & s_1=0 \; s_2=0 \; s_4=0 & s_1=0 \; s_2=0 \; s_5=0 \\ s_1=0 \; s_3=0 \; s_4=0 & s_1=0 \; s_3=0 \; s_5=0 & s_1=0 \; s_4=0 \; s_5=0 \\ s_2=0 \; s_3=0 \; s_4=0 & s_2=0 \; s_3=0 \; s_5=0 & s_2=0 \; s_4=0 \; s_5=0 \\ & s_3=0 \; s_4=0 \; s_5=0. & \end{array}$$

Jetzt restiren noch die 5 Directricenpaare 1b).

Jedes dieser Paare bildet 2 in Bezug auf $x_6 = 0$ conjugirte Gerade, ein Directricenpaar bildet sich also auf eine Kugel ab, und wie die 5 Directricenpaare je 4 der Fundamentalcomplexe angehören müssen, so muss die entsprechende Kugel jeweils vieren der entsprechenden Kugelgebüsche angehören.

Vier zu einander orthogonale Kugelgebüsche haben aber nur eine einzige Kugel gemein, es ist dies die eine Kugel, welche zu ihren 4 Orthogonalkugeln selbst orthogonal ist, also jedesmal die 5te Orthogonalkugel des Fundamentalsystems.

Den Directricenpaaren 1b) entsprechen so der Reihe nach je 2 Erzeugungsweisen der Fundamentalkugeln:

$$\text{2b)} \qquad s_5 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_3 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_1 = 0.$$

Wir kleiden das Resultat in Worte:

„Die 15 vorhandenen Directricenpaare der 15 aus den Funda-„mentalcomplexen gebildeten Congruenzen teilen sich bei der Trans-„formation in 2 Gruppen zu 10 und 5. Die der ersten Gruppe an-„gehörigen, welche Gerade des ausgezeichneten Fundamentalcomplexes

„$x_6 = 0$ sind, bilden sich in die 10 ausgezeichneten Punktkugelpaare „ab, welche je dreien der 5 Fundamentalkugeln gemeinsam sind. Die „5 Directricenpaare der 2ten Gruppe, die jeweils in Bezug auf $x_6 = 0$ „conjugirte Gerade darstellen, bilden sich dagegen in die 5 Funda- „mentalkugeln selbst ab“.

Die 15 Directricenpaare orden sich nun zu den 15 Fundamentaltetraedern zusammen. Die Kanten werden gebildet von 3 Paaren von Directricen, deren Congruenzen stets zusammen sämmtliche 6 Fundamentalcomplexe enthalten. Bezeichnen wir die Directricen durch ihre Congruenzen, so haben wir folgende 15 Fundamentaltetraeder: (Ihnen entsprechen nach dem Vorhergehenden die daneben gesesetzten Zusammenordnungen von Fundamentalkugeln.)

$x_1=0$ $x_2=0$	$x_3=0$ $x_4=0$	$x_5=0$ $x_6=0$
$x_1=0$ $x_3=0$	$x_2=0$ $x_4=0$	$x_5=0$ $x_6=0$
$x_1=0$ $x_4=0$	$x_2=0$ $x_3=0$	$x_5=0$ $x_6=0$
$x_1=0$ $x_2=0$	$x_3=0$ $x_5=0$	$x_4=0$ $x_6=0$
$x_1=0$ $x_3=0$	$x_2=0$ $x_5=0$	$x_4=0$ $x_6=0$
$x_1=0$ $x_5=0$	$x_2=0$ $x_3=0$	$x_4=0$ $x_6=0$
$x_1=0$ $x_2=0$	$x_4=0$ $x_5=0$	$x_3=0$ $x_6=0$
$x_1=0$ $x_4=0$	$x_2=0$ $x_5=0$	$x_3=0$ $x_6=0$
$x_1=0$ $x_5=0$	$x_2=0$ $x_4=0$	$x_3=0$ $x_6=0$
$x_1=0$ $x_3=0$	$x_4=0$ $x_5=0$	$x_2=0$ $x_6=0$
$x_1=0$ $x_4=0$	$x_3=0$ $x_5=0$	$x_2=0$ $x_6=0$
$x_1=0$ $x_5=0$	$x_3=0$ $x_4=0$	$x_2=0$ $x_6=0$
$x_2=0$ $x_3=0$	$x_4=0$ $x_5=0$	$x_1=0$ $x_6=0$
$x_2=0$ $x_4=0$	$x_3=0$ $x_5=0$	$x_1=0$ $x_6=0$
$x_2=0$ $x_5=0$	$x_3=0$ $x_4=0$	$x^1=0$ $x_6=0$

$s_3=0$ $s_4=0$ $s_5=0$	$s_1=0$ $s_2=0$ $s_5=0$	$s_5=0$
$s_2=0$ $s_4=0$ $s_5=0$	s_1-0 $s_3=0$ s_5-0	$s_5=0$
$s_2=0$ $s_3=0$ $s_5=0$	$s_1=0$ $s_4=0$ $s_5=0$	$s_5=0$
$s_3=0$ $s_4=0$ $s_5=0$	$s_1=0$ $s_2=0$ $s_4=0$	$s_4=0$
$s_2=0$ $s_4=0$ $s_5=0$	$s_1=0$ $s_3=0$ $s_4=0$	$s_4=0$
$s_2=0$ $s_3=0$ $s_4=0$	$s_1=0$ $s_5=0$ s_4-0	$s_4=0$

$s_4=0$ $s_5=0$ $s_3=0$	$s_1=0$ $s_2=0$ $s_3=0$	$s_3=0$
$s_2=0$ $s_5=0$ $s_3=0$	$s_1=0$ $s_4=0$ $s_3=0$	$s_3=0$
$s_2=0$ $s_4=0$ $s_3=0$	$s_1=0$ $s_5=0$ $s_3=0$	$s_3=0$
$s_4=0$ $s_5=0$ $s_2=0$	$s_1=0$ $s_3=0$ $s_2=0$	$s_2=0$
$s_3=0$ $s_5=0$ $s_2=0$	$s_1=0$ $s_4=0$ $s_2=0$	$s_2=0$
$s_3=0$ $s_4=0$ $s_2=0$	$s_1=0$ $s_5=0$ $s_2=0$	$s_2=0$
$s_4=0$ $s_5=0$ $s_1=0$	$s_2=0$ $s_3=0$ $s_1=0$	$s_1=0$
$s_3=0$ $s_5=0$ $s_1=0$	$s_2=0$ $s_4=0$ $s_1=0$	$s_1=0$
$s_3=0$ $s_4=0$ $s_1=0$	$s_2=0$ $s_5=0$ $s_1=0$	$s_1=0$

Den Kanten der Fundamentaltetraeder entsprechen so jedesmal 4 Punktkugeln, welche aus einer Fundamentalkugel durch 2 der Fundamentalkreise ausgeschnitten werden, zusammen mit der betreffenden Fundamentalkugel selbst.

Auf jeder der 5 Fundamentalkugen gibt es 3 Punktkugelpaare entsprechend dem Umstande, dass sich die 4 übrigen Kugeln dreimal in 2 Paare teilen lassen.

Betrachten wir des Näheren die auf

$$s_5 = 0$$

iegenden Punktkugelpaare

$$s_1 = 0 \ s_2 = 0 \ s_5 = 0; \ s_1 = 0 \ s_3 = 0 \ s_5 = 0; \ s_1 = 0 \ s_4 = 0 \ s_5 = 0$$
$$s_3 = 0 \ s_4 = 0 \ s_5 = 0; \ s_2 = 0 \ s_4 = 0 \ s_5 = 0; \ s_2 = 0 \ s_3 = 0 \ s_5 = 0$$

und von diesen wiederum beispielsweise das erste

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_5 = 0$$
$$s_3 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_5 = 0$$

Jede Punktkugel des Paares $s_1 = 0$ $s_2 = 0$ $s_5 = 0$ hat mit $s_5 = 0$ zwei Erzeugende gemein, die jeweils in den Tangentialebenen in diesen Punkten an $s_5 = 0$ verlaufen, den Minimalgeraden I II resp. I' II'. $\left.\begin{matrix} I \text{ u. } I' \\ II \text{ u. } II' \end{matrix}\right\}$ seien Erzeugende derselben Art.

Erzeugende verschiedener Art schneiden sich stets; also müssen sich, wie I und II, I' und II' auch I und II', II und I' schneiden in 2 Punkten 3 und 4.

Die beiden Punktkugeln $s_1 = 0$ $s_2 = 0$ $s_5 = 0$ schneiden sich aber in dem Kreise $s_3 = 0$ $s_4 = 0$, sie sind ja die Punktkugeln des durch den Kreis bestimmten Kugelbüschels. Also müssen die beiden

Punkte 3 und 4 auf $s_3 = 0$ $s_4 = 0$ liegen; sie liegen aber auch auf $s_5 = 0$. Es sind demnach die beiden Punkte 3 und 4 die Centren des 2ten zu betrachtenden Punktkugelpaares

$$s_3 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_5 = 0.$$

Das System

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_5 = 0; \qquad s_3 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_5 = 0; \qquad s_5 = 0$$

hat also die 4 ein räumliches Vierseit bildenden Minimalgeraden gemein. Dieses räumliche Vierseit ist es infolgedessen, das dem Fundamentaltetraeder entspricht.

Wir gewinnen den Satz:

„Den 15 Fundamentaltetraedern entsprechen durch unsere Ab-
„bildung 15 räumliche Vierseite, deren Kanten von Minimalgeraden
„gebildet werden, und deren Ecken auf den Fundamentalkugeln
„liegen und ausgeschnitten werden von den 10 Fundamentalkreisen.
„Auf jeder der 5 Fundamentalkugeln liegen die Ecken von 3 Vier-
„seiten entsprechend dem Umstand, dass sich die 4 übrigen Funda-
„mentalkugeln auf 3 Weisen in je 2 Paare teilen lassen, wir also
„3 Paare von Fundamentalkreisen erhalten. Jedem dieser Paare
„entspricht ein Vierseit“.

§ 2. *Die Schaar der Kummer'schen Flächen in ihrer Beziehung zum Cyklidensystem.*

Wollten wir in möglichst allgemeiner Weise verfahren, so hätten wir auszugehen von den ∞^2 Liniencomplexen 2ten Grades:

$$1)\qquad \sum_1^5 \frac{x_i^2}{k_i - \mu - \lambda} + \frac{x_6^2}{k_6 - \mu} = 0.$$

Diesen würden dann im Kugelraum ∞^2 Kugelcomplexe 2ten Grades entsprechen, und solche Kugelcomplexe 2ten Grades hätten wir als Verallgemeinerungen der Cykliden zu betrachten, die an sich nur gebildet werden von den Punktkugeln eines solchen Kugelcomplexes 2ten Grades.

Wir beschränken uns aber, indem wir in 1) $\mu = k_6$ setzen, auf die Linien der ∞^1 Congruenzen:

$$2)\qquad \sum_1^5 \frac{x_i^2}{k_i - k_6 - \lambda} = 0 \quad x_6 = 0$$

Dieselben sind die Doppeltangenten ∞^1 Kummer'schen Flächen, welche sich längs der 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven 8ter Ordnung berühren [4]).

Da $x_6 = 0$ unser ausgezeichneter Fundamentalcomplex ist, so entsprechen den ∞^1 Liniencongruenzen jeweils die Punktkugeln von ∞^1 Kugelcomplexen 2ten Grades, also die Cyklidenschaar

$$3)\qquad \sum_1^5 \frac{s_i^2}{c_i - \lambda} = 0 \;{}^{5)}$$

wenn $k_i - k_6 = c_i$ gesetzt wird. Die Cyklidenschaar aber bildet ein confocales System, wie schon aus der Form der Gleichung 3) erhellt [6]).

Wir haben demnach den Satz:

„Einer ∞^1 Schaar Kummer'scher Flächen, welche Brennflächen „der ∞^1 Congruenzen

$$\sum_1^5 \frac{x_i^2}{c_i - \lambda} = 0 \quad x_6 = 0$$

„und sich nach einer ausgezeichneten Haupttangentencurve 8ter Ord- „nung berühren, bilden sich ab als ∞^1 Cykliden

$$\sum_1^5 \frac{s_i^2}{c_i - \lambda} = 0,$$

„die ein confocales System bilden".

Hieran schliessen wir sofort den folgenden Satz (Lie, a. a. O. p. 193—194.)

„Jene ausgezeichnete Haupttangentencurve transformirt sich in „die „Developpale Focale", welche allen Cykliden des confocalen „Systems sammt dem Kugelkreis umschrieben ist".

2 Congruenzen der Schaar 2), entsprechend 2 bestimmten Werten von λ, haben eine Linienfläche gemein, welche die beiden Brenn-

---

4) Ein solches System betrachtet H. Lie, a. a. O. p. 255. Die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche wurden zuerst untersucht von den Herren Klein und Lie in den Berl. Monatsberichten, 15. December 1870, in einer Abhandlung, die sich wieder abgedruckt findet in Bd. 23. der Math. Annalen, p. 579.

5) Siehe p. 20, Darboux, a. a. O., p. 134.

6) Daneben gilt noch $\sum_1^5 s_i^2 = 0$ entsprechend $\sum_1^6 x_i^2 = 0$.

flächen der Congruenzen längs je einer Haupttangentencurve berührt. Diese Linienfläche ist vom 8ten Grade [7]. Dem entsprechend schneiden sich 2 Cykliden des Systems längs einer Curve rechtwinklig (rechtwinklig darum, weil jeder Erzeugende der Linienfläche 2 Paar Berührungspunkte trägt, die zu einander harmonisch liegen), und diese ist Krümmungslinie auf beiden Flächen, im übrigen ebenfalls von der 8ten Ordnung [8]).

Je 3 Congruenzen der Schaar haben 16 $x_6 = 0$ angehörige Gerade gemein, die Doppeltangenten sind für die 3 zugehörigen Brennflächen. Auf jeder der 16 gemeinsamen Doppeltangenten bilden die 6 Berührungspunkte 3 Paare, 2 beliebige dieser 3 Paare sind zu einander harmonisch. Dem entsprechend schneiden sich im Cyklidenraum je 3 confocale Cykliden in 16 Punkten rechtwinklig.

Durch jede Linie des ausgezeichneten linearen Complexes lassen sich 3 Congruenzen der Schaar legen, deren Brennflächen die soeben berührte Eigenschaft besitzen. 5 Congruenzen der Schaar degeneriren in diesen Fällen in die Directricen dieser linearen Congruenzen.

Dem stellen sich für den Cyklidenraum die Sätze zur Seite, dass durch jeden Punkt des Raumes 3 Cykliden der Schaar gehen, und 6 Cykliden, für $\lambda = a_i$, zu Kugeln degeneriren; es sind dies die 5 Fundamentalkugeln.

Zunächst werden wir aber nicht das ganze Flächensystem in's Auge fassen, sondern die einzelne Kummer'sche Fläche in ihrer Beziehung zur einzelnen Cyklide. Wir werden also in 2) resp. 3) dem variabeln Parameter einen festen Wert zu erteilen, etwa $\lambda = \infty$ setzen; dann haben wir die Cyklide

$$4) \qquad \sum_1^5 a_i s_i^2 = 0.$$

Jeder Doppeltangente der Kummer'schen Fläche entspricht eine Punktkugel im Cyklidenraum; also entspricht je 2 Punkten der Kummer'schen Fläche, den 2 Berührungspunkten der Doppeltangente nämlich, nur ein Punkt der Cyklide. Ausgenommen allein sind die Punkte der obengedachten ausgezeichneten Haupttangentencurve 8ter Ordnung der Kummer'schen Fläche. Diese ist eine Curve 4punktiger

---

7) Unter dem Grad einer Linienfläche verstehen wir, wie üblich, die Anzahl der Erzeugenden, welche eine beliebig vorgegebene Gerade treffen.

8) Auf das Entsprechen von Linienflächen und Curven gehen wir in § 4., p. 69. ausführlicher ein.

Berührung für die Kummer'sche Fläche, die Doppeltangenten in den Punkten derselben sind vierfache Tangenten, jedem Punkt also der Haupttangentencurve für sich allein entspricht ein Punkt der Cyklide: die Beziehung ist in diesem Falle eine (1, 1) deutige. Die entsprechenden Punkte der Cyklide bilden die singuläre Krümmungslinie, in welcher die Fläche von der benachbarten des Systems geschnitten wird; denn die ausgezeichnete Haupttangentencurve verwandelt sich ja in die developpabele Focale, und diese berührt die Cyklide in jener singulären Krümmungslinie.

Wir geben den erhaltenen Resultaten die Fassung:

„Die Beziehung zwischen Kummer'scher Fläche und Cyklide ist „eine derartige, dass im Allgemeinen je zwei Punkten der ersteren „nur ein Punkt der letzteren entspricht, nämlich den 2 Berührungs„punkten einer der ∞^2 Doppeltangenten, die $x_6 = 0$ angehören, eine „der ∞^2 Punktkugeln, welche die Cyklide bilden".

„Nur die Punkte der ausgezeichneten Haupttangentencurve 8ter „Ordnung entsprechen den Punkten der ausgezeichneten singulären „Krümmungslinie ein-eindeutig".

Da den Haupttangenten der Kummer'schen Fläche die Hauptkugeln der Cyklide entsprechen, so finden wir überhaupt den Satz[9]):

„Die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche bilden sich „in die Krümmungslinien der Cyklide ab".

§ 3. *Parameterverteilung auf der Kummer'schen Fläche und deren Uebertragung.*

Jeden Punkt der Kummer'schen Fläche können wir, krummlinige Coordinaten einführend, durch die beiden Haupttangentencurven bestimmen, die durch ihn hindurchlaufen:

$$\lambda_1 = \text{const}; \quad \lambda_2 = \text{const}$$

seien die Gleichungen dieser beiden Haupttangentencurven. Dann ist durch diese Parameterwerte der betreffende Punkt bestimmt, aber nicht eindeutig; die beiden Haupttangentencurven 16ter Ordnung treffen sich ja in 32 Punkten, und diese 32 Punkte hangen sämmtlich von denselben Parameterwerten λ_1 und λ_2 ab. Um die einzelnen Punkte der Gruppe zu individualisiren, nehmen wir als Bestimmungsstücke nicht λ_1 und λ_2, sondern die beiden überall endlichen Normalintegrale vom Geschlecht 2, hingeleitet zu λ_1, resp. λ_2 als obere Grenzen

---

9) cf. p. 63., Lie, a. a. O., p. 177.

und als Irrationalität $\sqrt{\overset{6}{\underset{1}{\Pi}}(a^i - \lambda)}$, wo die a_i die Parameter der 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven 8ter Ordnung bedeuten.[10])

Betrachten wir eine solche Gruppe von 32 Punkten, so sehen wir, dass aus einem von ihnen 15 weitere hervorgehen durch 15 Collineationen — die 15 involutorischen windschiefen Perspectiven, die sich auf die 15 Directricenpaare, also die 15 Congruenzen $x_i = 0$ $x_k = 0$ stützen.

Die 16 noch übrigen haugen von den 16 schon betrachteten dualistisch ab. Betrachten wir nämlich einen der 16 Punkte, so gehört zu ihm eine Tangentialebene an die Kummer'sche Fläche; in dieser Tangentialebene wird eine Gerade des Tangentenbüschels dem ausgezeichneten Complex $x_6 = 0$ angehören. Diese ist Doppeltangente an die Kummer'sche Fläche und liefert infolgedessen einen 2ten Punkt der Kummer'schen Fläche. So erhalten wir zu den 16 Punkten noch 16 weitere hinzu.

Das Coordinatensystem der Haupttangentencurven transformirt sich nun in das Coordinatensystem der Krümmungslinien. Wie dort ein Punkt durch die hindurchlaufenden Haupttangentencurven definirt war, ist er hier definirt durch die 2 Krümmungscurven

$$\lambda_1 = e_1, \quad \lambda_2 = e_2.$$

Die Haupttaugentencurven schneiden sich nun in 32 Punkten, welche auf die oben bezeichnete Weise zusammenhangen; je 2 derselben liefern aber als Berührungspunkte einer Doppeltangente, welche dem Complex $x_6 = 0$ angehört, denselben Punkt der Cyklide.

„Der Gruppe von 32 zusammengehörigen Punkten der Kummer„schen Fläche entspricht also auf der Cyklide eine Gruppe von nur „16 Punkten, welche auseinander durch Spiegelung an den Fundamental„kugeln, wie dort durch Spiegelung an den Congruenzen $x_i = 0$ $x_6 = 0$, „$(i = 1, 2 \ldots 5)$ hervorgehen."

Einem Punkt der Kummer'schen Fläche entspricht eine Minimalgerade, welche die Cyklide in dem Punkt berührt, welcher der Doppeltangente an die Kummer'sche Fläche, $x_6 = 0$ angehörend, entspricht, die im Ausgangspunkt construirt wurde. Der Tangentialebene im Ausgangspunkt an die Kummer'sche Fläche entspricht die 2te in jenem Punkt der Cyklide berührende Minimalgerade; diese letztere Minimalgerade ist aber auch das Bild des 2ten Punkts der Kummer-

---

10) Ausführliches hierüber siehe p. 81.

schen Fläche, der zum Ausgangspunkt dualistisch gehört, ebenso wie die erste Minimalgerade der Tangentialebene in jenem 2ten Punkt der Kummer'schen Fläche entspricht.

Machen wir demnach eine dualistische Umformung im Raum der Kummer'schen Fläche, hinsichtlich des linearen Complexes $x_6 = 0$, durch welche jeder Punkt in die ihm durch den linearen Complex zugeordnete Ebene und jede Ebene in den entsprechenden Punkt verwandelt wird, so vertauschen sich die beiden Untergruppen von je 16 Punkten auf der Kummer'schen Fläche. Eine solche Vertauschung ändert aber das Cyklidensystem in keiner Weise. Die in Rede stehende dualistische Umformung des einen Raumes bringt im anderen keinerlei Aenderung hervor.

§ 4. *Abbildung von Linienflächen, deren Erzeugende dem ausgezeichneten linearen Complex angehören.*

Im Folgenden wird es sich vorzugsweise darum handeln, die Abbildung von Curven der Kummer'schen Fläche auf die Cyklide zu zu leisten. Wir könnten zu dem Zwecke die Punkte der Curve selbst abbilden — ihnen entsprechen ja im Cyklidenraum Minimalgerade, die die Cyklide in je einem Punkte berühren —; einfacher gestalten sich aber die Verhältnisse, wenn wir in jedem Punkt der Curve auf der Kummer'schen Fläche die zugehörige Doppeltangente construiren, die dem ausgezeichneten Complex angehört. Die so entstehende Linienfläche, deren Erzeugende also dem ausgezeichneten linearen Complex angehören, bildet sich sofort auf eine Curve der Cyklide ab; jeder Doppeltangente entspricht ja ein Punkt der Cyklide.

Wir betrachten demnach zunächst allgemein Linienflächen, deren Erzeugende $x_6 = 0$ angehören, und deren Abbildungen, und stützen uns hierbei auf ein von Herrn Klein gütigst zur Verfügung gestelltes Manuscript: Zur Theorie der linearen Complexe, dessen Resultate die eigenen vervollständigen halfen.

Ehe wir auf die in Rede stehende Abbildung selbst eingehen, wird es zweckmässig sein, gewisser Ausnahmgebilde Erwähnung zu tun, die bei unserer Abbildung sowohl im linearen Complex als im Punktraum auftreten.

Im Allgemeinen ist die Abbildung eine (11) deutige; jeder Geraden des Complexes entspricht ein Punkt des Cyklidenraumes; es giebt aber eine Gerade des Complexes — die Fundamentalgerade[11]) —, der ∞^2 Punkte entsprechen, die eine ganze

---

11) cf. Lie, a. a. O. p. 168.

Ebene im Cyklidenraum erfüllen, und umgekehrt Punkte im Cyklidenraum — sie liegen auf einem Kegelschnitt —, denen ein ganzes Büschel von Geraden des Complexes entspricht.

Dieser Kegelschnitt ist im gegebenen Falle der Kugelkreis. Jedem Punkt des Kugelkreises entspricht also ein Büschel von Complexgeraden, welchem die Fundamentalgerade angehört; durch dasselbe wird ein Punkt der Fundamentalgeraden und eine durch sie hindurchgehende Ebene dem betreffenden Punkt des Kugelkreises zugeordnet.

Um die Verhältnisse der Abbildung klar zu übersehen, folgt eine Tabelle, welche entsprechende Gebilde einander gegenüberstellt. soweit sie Bezug haben zu den Ausnahmegebilden.

Raum des Complexes.	Cyklidenraum.
Die Fundamentalgerade L:	die ∞ferne Ebene.
Eine Complexlinie:	ein Punkt.
Eine Complexlinie, die L schneidet:	ein Punkt des Kugelkreises.
Das dadurch bestimmte Büschel:	derselbe Punkt des Kugelkreises.
Die Congruenz, gebildet vom gegebenen Complex und den durch die Fundamentalgerade bestimmten speciellen, d. h. eine lineare Congruenz mit L als Doppellinie:	der Kugelkreis.
Eine lin. Congruenz mit Doppellinie, die L enthält, d. h. die ∞^2 Linien des Complexes, welche eine Complexlinie schneiden, die ihrerseits L trifft:	∞^2 Punkte, eine Ebene bildend, die mit dem Kugelkreis einen Punkt gemein hat, d. h. eine Tangentialebene an den Kugelkreis.
Eine allgemeine lin. Congruenz, die L enthält und dem Complex angehört:	eine Ebene.
Die Directricen dieser Congruenz:	die beiden Kreispunkte der Ebene.
Eine allgemeine lineare Congruenz, die L nicht enthält und dem Complex angehört:	eine Kugel; die Punkte des Kugelkreises entsprechen den Geraden der Congruenz, die L schneiden.
Eine Linienfläche 2ten Grades, welche L enthält:	eine Gerade, die den Kugelkreis nicht trifft.

Raum des Complexes.	Cyklidenraum.
Die Erzeugende L:	der Schnitt mit der unendlich fernen Ebene.
Eine Linienfläche 2ten Grades, die L berührt: (*L* schneidet nur eine Erzeugende.)	ein Kreis, der die unendlich ferne Ebene berührt, d. h. nur einen Kreispunkt hat. Die Ebene des Kreises entspricht der linearen Congruenz, welche die geschnittene Erzeugende zur Doppellinie besitzt.
Eine beliebige Linienfläche 2ten Grades: (*L* schneidet 2 Erzeugende, bestimmt also 2 Büschel von Complexgeraden.)	Ein Kreis. (Den beiden Büscheln entsprechen die beiden Kreispunkte.

Betrachten wir jetzt eine allgemeine Linienfläche, deren Erzeugende dem linearen Complex angehören. Der Grad derselben, d. h. die Zahl der Erzeugenden, die von einer beliebigen Geraden geschnitten werden, sei n. Der Grad wird im Allgemeinen mit der Ordnung und Classe[12]) der Linienfläche übereinstimmen; nur wenn die Erzeugenden eine Developpabele bilden, ist der Grad gleich der Ordnung der Developpabeln und der Classe der zugehörigen Raumcurve.

Als charakteristisch ist ferner zu betrachten:

Das Geschlecht p (d. h. das Geschlecht der ebenen Schnittcurve);
Die Zahl der Doppelerzeugenden ϱ
und der stationären Erzeugenden σ,
Die Zahl der singulären Linien s,
Die Art der Brenncongruenz[13]). Die Brenncurve und Brenndeveloppabele der letzteren giebt
die Doppelcurve Σ und die Doppeldeveloppabele S } der geg. Linienfläche.

Es möge die Linienfläche die bei der Abbildung des Complexes benützte Fundamentalgerade L nicht enthalten, auch möge keine ihrer

12) Ordnung und Classe sind nach einem bekannten Satze von Cayley in diesem Falle gleich.

13) Unter der Brenncongruenz versteht man die ∞^2 Geraden, welche von der Gesammtheit der Büschel herrühren, die von sich schneidenden Linien der Fläche gebildet werden.

ausgezeichneten Linien der linearen Congruenz angehören, deren Doppellinie L ist.

Dann verwandelt sich die Linienfläche $n$ten Grades vermöge unserer Abbildung in eine Curve $n$ten Grades, die den Kugelkreis in n getrennten Punkten schneidet — die Fundamentalgerade trifft ja n Erzeugende der Linienfläche.

Die Anzahl der Doppelpunkte wird gleich ϱ, die Anzahl der Rückkehrpunkte σ.

Nun ist aber das Geschlecht der Linienfläche, wenn die Ordnung und Classe der Doppelcurve $= h$ ist

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h - \varrho - \sigma$$

(Wir haben ja das Geschlecht der ebenen Schnittcurve zu bestimmen.)

Der Brenncurve $h$ter Ordnung entspricht nun eine Minimallinienfläche $2h$ter Ordnung, die den Kugelkreis $h$fach enthält. Jede Erzeugende derselben schneidet die Raumcurve 2mal, entsprechend dem Umstand, dass die Brenncurve erzeugt wurde durch sich schneidende Linien der Brenncongruenz. Von jedem Punkt des Kugelkreises laufen also h Erzeugende der Minimallinienfläche aus; die Raumcurve $n$ter Ordnung, die der Linienfläche des Complexraumes entspricht, hat demnach h scheinbare Doppelpunkte. Es ist also ihr Geschlecht

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h - \varrho - \sigma$$

„Es überträgt sich also auch das Geschlecht der Linienfläche „auf die Raumcurve im Cyklidenraum."

Als Rang der Raumcurve erhalten wir

$$r = n(n-1) - 2h - 2\varrho - 3\sigma$$

Es ist dies auch die Ordnung der durch dieselbe bestimmten Developpabelen. Letztere schneidet den Kugelkreis ausser in den n doppelt zählenden Punkten in

$$2(r-n) \text{ Punkten;}$$

soviel liegen also Minimalgerade auf der Developpabelen, soviel mal ist mit anderen Worten die Verbindungslinie 2er benachbarter Punkte der Raumcurve Minimalgerade. Ein derartiges Vorkommniss entspricht aber einer singulären Linie der Linienfläche

des Complexraumes, d. h. dem Falle, wo eine Erzeugende von ihrer benachbarten geschnitten wird. Wir erhalten demnach

$$2(r-n)=s.$$

„Der Anzahl der singulären Linien entspricht also die Zahl der „Punkte, in denen die Developpabele der Raumcurve vom Kugelkreis „getroffen wird ausser den n doppelt zählenden Punkten, in denen „die Raumcurve den Kugelkreis durchsetzt."

Eine beliebige Erzeugende der Linienfläche wird von $(n-2)$ ihresgleichen getroffen, eine Doppelerzeugende, resp. stationäre Erzeugende von $(n-4)$ andern Erzeugenden. Es liegen also auf jeder der letzteren $(n-4)$ Doppelpunkte, resp. Rückkehrpunkte der Doppelcurve. Die Anzahl der Doppelpunkte resp. Rückkehrpunkte der Doppelcurve ist demnach

$$\varrho(n-4) \text{ resp. } \sigma(n-4).$$

Ebenso hat die Doppeldeveloppabele $\varrho(n-4)$ Doppelebenen und $\sigma(n-4)$ Inflexionsebenen, welche zu $(n-4)$ durch die $(\varrho+\sigma)$ mehrfachen Erzeugenden hindurchgehen und der gleichen Anzahl von Doppel- und Rückkehrpunkten einzeln entsprechen.

Demgemäss erhalten wir im Punktraum auf der Minimallinienfläche, deren Erzeugende Secanten der Raumcurve sind, $\varrho(n-4)$ Doppelerzeugende und $\sigma(n-4)$ stationäre Erzeugende, die jeweils zu $(n-4)$ durch einen Punkt der Raumcurve gehen.

§ 5. *Abbildung von Curven.*

Jetzt gilt es nun noch, die Linienfläche, deren Erzeugende dem ausgezeichneten linearen Complex angehören, in Verbindung zu bringen mit der Ausgangscurve auf der Kummer'schen Fläche, längs welcher beide Flächen einander berühren.

Gehen wir also aus von einer beliebigen Curve auf der Kummer'schen Fläche, deren Ordnung gleich n sei.

Construiren wir dann in jedem Punkte derselben die Doppeltangente, welche dem ausgezeichneten linearen Complex angehört, so wird deren 2ter Berührungspunkt im Allgemeinen kein Punkt der Curve sein, wir werden also neben der gegebenen Curve noch eine 2te auf der Kummer'schen Fläche in Betracht zu ziehen haben, die dieselbe Linienfläche liefert, die also auch dasselbe Bild auf der Cyklide hat.

Die Linienfläche, welche von den Doppeltangenten gebildet wird, wäre als Schnitt eines linearen, eines quadratischen und eines Com-

plexes $n$ten Grades — letzterer ist durch die Curve $n$ter Ordnung bestimmt — von der Ordnung $4n$. Diese Zahl reducirt sich aber auf die Hälfte, da die in Rede stehende Curve auf der Brennfläche der Congruenz (22) verläuft. Demnach ergiebt sich als Ordnung der 2ten „conjugirten“ Curve $3n$. Die Singularitäten der ersten Curve finden auf der 2ten ihr dualistisches Gegenstück. Dieser Dualismus ist aber keiner im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Construiren wir nämlich in allen Punkten der ersten Curve die Ebenen, die ihnen vermöge des ausgezeichneten linearen Complexes entsprechen, so berühren dieselben die Kummer'sche Fläche in Punkten, deren Gesammtheit die 2te zur ersten dualistisch gehörende Curve bildet.

Der Ordnung n der Ausgangscurve entspricht die Anzahl von Tangentialebenen, die man von einem beliebigen Punkt so an die Kummer'sche Fläche legen kann, dass sie in einem Punkt der 2ten Curve berühren; dagegen entspricht der Anzahl von Tangentialebenen, die man von einem beliebigen Punkt so an die Kummer'sche Fläche legen kann, dass sie in einem Punkt der Ausgangscurve berühren[14]), die Ordnung der 2ten „conjugirten“ Curve.

In speciellen Fällen kann die 2te conjugirte Curve mit der ursprünglichen zusammenfallen. Dies geschieht z. B. bei den Haupttangentencurven; in diesem Falle ist die Curve zu sich selbst dualistisch und zwar bei den Haupttangentencurven im landläufigen Sinne des Wortes, da die Tangentialebenen an die Kummer'sche Fläche in Punkten einer Hauptangentencurve Osculationsebenen an letztere sind; das stimmt mit dem Umstand, dass Ordnung und Classe der Haupttangentencurve gleich sind. Die Linienfläche der Doppeltangenten kann in letzterem Falle als Schnitt eines linearen und 2er quadratischer Complexe angesehen werden, ist also von der 8ten Ordnung für die Haupttangentencurven 16ter Ordnung; für die Haupttangentencurven 8ter Ordnung wird sie von der 4ten Ordnung (als Schnitt 2er linearer und eines quadratischen Complexes).

Ist demnach die Ordnung der auf der Kummer'schen Fläche gegebenen Curve n, so ist im Allgemeinen der Grad der Linienfläche $2n$.

Wir haben also den Satz:

„Einer Curve $n$ter Ordnung auf der Kummer'schen Fläche ent-„spricht im Allgemeinen eine Curve $2n$ter Ordnung auf der Cyklide.“

---

14) Diese Anzahl erhält man, indem man die Schnittpunkte der Curve mit der ersten Polare der Fläche in Bezug auf den angenommenen Punkt sucht; in unserm Falle erhält man so $3n$, eine Zahl, die wir schon oben für die Ordnung der 2ten Curve fanden.

Tritt dagegen der Fall ein, wo sämmtliche 2ten Berührungspunkte der Doppeltangenten wiederum Punkte der Curve sind, die conjugirte Curve also mit der ursprünglichen zusammenfällt, so ist die Ordnung, resp. der Grad der Linienfläche nur $\frac{n}{2}$: ebenso ist dann die Ordnung der Curve auf der Cyklide $\frac{n}{2}$. So ist es, wie gesagt, bei den Haupttangentencurven; ihnen entsprechen die Krümmungslinien 8ter resp. 4ter Ordnung der Cyklide.

Die Doppelpunkte der gegebenen Curve auf der Kummer'schen Fläche ergeben Doppelerzeugende der Linienfläche, die von den Doppeltangenten gebildet wird. Es ergiebt sich demnach der Satz:

„Den Doppelpunkten der Curve auf der Kummer'schen Fläche „entsprechen wiederum Doppelpunkte der Curve auf der Cyklide."

Hat dagegen die Curve auf der Kummer'schen Fläche eine Spitze, so liegen 3 aufeinanderfolgende Erzeugende der Linienfläche in derselben Ebene; es liegen also 3 aufeinanderfolgende Punkte der Curve im Cyklidenraum auf derselben Minimalgeraden; wir erhalten einen Tangenteninflexionspunkt. Hat umgekehrt die Curve auf der Kummer-schen Fläche einen Tangenteninflexionspunkt, dann ist die Tangente in diesem Punkt Haupttangente an die Kummer'sche Fläche. Ihr entspricht eine Hauptkugel, welche die Cyklide in dem entsprechenden Punkte osculirt; eine solche schneidet aber in einer Curve mit Spitze in diesem Punkte; infolgedessen bekommt die Curve im Cyklidenraum eine Spitze. Wir sehen also:

„Den Spitzen und Tangenteninflexionspunkten der Curve auf der „Kummer'schen Fläche entsprechen resp. Tangenteninflexionspunkte „und Spitzen der entsprechenden Curve im Cyklidenraum. Diese „letzteren Tangenteninflexionspunkte sind notwendig imaginär."

Da das Geschlecht der Curve auf der Cyklide überdies noch von der Ordnung der Doppelcurve h der Linienfläche abhängt, und h von den Singularitäten der Curve auf der Kummerschen Fläche, welche deren Geschlecht bestimmen, unabhängig ist, so sehen wir, dass man von dem Geschlecht der Curve auf der Kummer'schen Fläche noch nicht auf das der Curve auf der Cyklide schliessen kann, sondern erst die Linienfläche gebildet von den Doppeltangenten construiren muss. Dann aber erhält man, wie wir sahen, vollständigen Aufschluss über alle in Frage kommenden Singularitäten.

Wir wollen noch ergänzend erwähnen: Geht die Curve auf der Kummer'schen Fläche durch einen Knotenpunkt hindurch, so kommt zu der Linienfläche $n$ten Grades der Doppeltangenten noch eine

Linienfläche ersten Grades, ein Geradenbüschel[15]), hinzu; infolgedessen erhalten wir als Bild auf der Cyklide die Curve $2n$ter Ordnung in Verbindung mit einer auf der Cyklide liegenden Minimalgeraden.

II. Capitel.

Kummer'sche Fläche und Cyklide unter Berücksichtigung der Θ.

Auf dreierlei Weisen wurde, wie schon in der Einleitung erwähnt, die Kummer'sche Fläche durch hyperelliptische ϑ Functionen (vom Geschlecht 2) dargestellt. Wir haben sachlich geordnet:

1) Die liniengeometrische Darstellung Rohns.
2) Die Borchardt'sche Darstellung, beruhend auf einer Göpel'schen biquadratischen Relation.
3) Die Weber'sche Darstellung.

In dieser Aufeinanderfolge ist uns zugleich das Einteilungsprincip gegeben, dem wir folgen werden.

§ 1. *Die liniengeometrische Darstellung der Kummer'schen Fläche und die hierauf basirende Uebertragungsweise.*

Wir wissen, dass wir die Punkte der Kummer'schen Fläche bestimmen können durch die hindurchlaufenden Haupttangentencurven, indem wir das System der letzteren zum krummlinigen Coordinatensystem wählen; wir wissen aber auch[16]), dass durch die Parameterwerte 2er Haupttangentencurven

$$\lambda_1 = e_1, \quad \lambda_2 = e_2$$

ein Punkt der Kummer'schen Fläche nicht eindeutig bestimmt ist, sondern dass wir die Wahl unter 32 Punkten haben. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, charakterisiren wir den Punkt der Kummerschen Fläche nicht durch die 2 Parameter λ_1 und λ_2 der beiden durch ihn hindurch gehenden Haupttangentencurven selbst, sondern durch die Normalintegrale erster Gattung vom Geschlecht 2:

1)

$$u_1 \mid u_2 = u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2'' = \int_\alpha^{\lambda_1, \Delta} du_1 + \int_\beta^{\lambda_2, \Delta} du_1 \mid \int_\alpha^{\lambda_1, \Delta} du_2 + \int_\beta^{\lambda_2, \Delta} du_2$$

15) In einer der Doppeltangentialebenen, die durch den Knotenpunkt gehen

16) cf. p. 66.

in denen λ_1 und λ_2 als obere Grenzen auftreten, während die Wahl der unteren Grenzen α und β noch in unserer Hand steht, und Δ den Wert hat:

$$2)\qquad \Delta = \sqrt{(\lambda - c_1)(\lambda - c_2)(\lambda - c_3)(\lambda - c_4)(\lambda - c_5)(\lambda - c_6)}$$

wo $c_1 c_2 \ldots c_6$ die Parameter der 6 Haupttangentencurven 8ter Ordnung bedeuten.[17])

Bezeichnen wir nun mit Π ein Multiplum von Perioden, so lassen wir von den Ausdrücken

$$3)\qquad \pm u' \pm u'' + \Pi$$

diejenigen denselben Punkt der Kummer'schen Fläche bedeuten, welche sich durch eine gerade Anzahl von Vorzeichen und durch gerade Multipla von Perioden unterscheiden, während sämmtliche Ausdrücke zusammengenommen die 32 zusammengehörigen Punkte liefern.

Unsere Gruppe von 32 Punkten sondert sich, wie wir wissen, in 2 Untergruppen von je 16 Punkten. Diese 16 Punkte einer Untergruppe unterscheiden wir durch die 16 verschiedenen Perioden von einander, die bei Integralen erster Gattung vom Geschlecht 2 möglich sind. Ist der Ausgangspunkt dargestellt durch

$$u_1 \mid u_2 = u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2''$$

so erhält man die 15 zugehörigen Punkte der Untergruppe also durch Zufügen von den 15 von $0 \mid 0$ verschiedenen Perioden:

$a_{11} \mid a_{12}$	$\pi i \mid 0$
$a_{11} + \pi i \mid a_{12}$	$a_{11} + \pi i \mid a_{12} + \pi i$
$\pi i \mid \pi i$	$a_{11} + a_{12} + \pi i \mid a_{12} + a_{22} + \pi i$
$a_{12} + \pi i \mid a_{22} + \pi i$	$a_{11} + a_{12} + \pi i \mid a_{12} + a_{22}$
$a_{12} + \pi i \mid a_{22}$	$a_{11} \mid a_{12} + \pi i$

$$a_{11} + a_{12} \mid a_{12} + a_{22} + \pi i$$
$$a_{11} + a_{12} \mid a_{12} + a_{22}$$
$$a_{12} \mid a_{22}$$
$$a_{11} \mid a_{22} + \pi i$$
$$0 \mid \pi i$$

wenn die Perioden gegeben sind durch das Schema:

---

17) Es sei für das Folgende bemerkt, dass wir uns hinsichtlich der Theorie der hyperelliptischen Integrale und Functionen an Herrn Prym „Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen", Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. 4, und Herrn Krazer: „Theorie der 2fach unendlichen ΘReihen", Leipzig 1882. anschliessen werden.

	a_1	a_2	b_1	b_2
$\int du_1$	a_{11}	a_{12}	πi	0
$\int du_2$	a_{21}	a_{22}	0	πi

und die Riemann'sche 2blättrige Fläche für $p = 2$ die charakteristische Zerschneidung zeigt (s. Fig. 5.)

Die Punkte der andern Untergruppe unterscheiden sich von den entsprechenden Punkten der ersten durch das Vorzeichen von u'', oder u' was dasselbe besagen will bei unserer Festsetzung auf p. 246.

Durch unsern linearen Complex $x_6 = 0$ werden nun solche Punkte einander zugeordnet. Gehen wir von dem Punkt

$$u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2''$$

aus und nehmen diejenige Ebene, welche ihm durch den Complex $x_6 = 0$ entspricht, so ist deren Berührungspunkt mit der Kummer-schen Fläche der dualistisch zum ersten gehörige Punkt, dem die Argumente zukommen

$$u_1' - u_1'' \mid u_2' - u_2''.$$

Beide Punkte liefern nun gemeinsam denselben Punkt der Cyklide, dem also 2 Argumentenwerte mod. doppelter Perioden zukommen. Aus ihm erhalten wir 15 weitere durch Zufügen der 15 von $0 \mid 0$ verschiedenen Periodenmultipla.

Wir erhalten demnach den Satz:

„Je 2 Punkte der Kummer'schen Fläche, deren Argumente sich „simultan in die Form setzen lassen

$$u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2'' \quad \text{und} \quad u_1' - u_1'' \mid u_2' - u_2'',$$

„liefern denselben Punkt der Cyklide."

„Ebenso lässt eine simultane Umkehr beider Vorzeichen den „Punkt der Cyklide ungeändert."

„Vermehren wir diese Argumente um die 15 möglichen von 0 „verschiedenen Perioden (mod. 2 genommen), so erhält man auf der „Cyklide aus einem vorgegebenen Punkte die 15, welche durch Spie- „gelung an den Fundamentalkugeln aus ihm hervorgehen, gerade so, „wie man auf der Kummer'schen Fläche aus dem entsprechenden „Punktepaare 15 weitere erhält, die durch Spiegelung an den Con- „gruenzen $x_i = 0$ $x_k = 0$ aus ihm hervorgehen.

Curvensysteme.

Jetzt nehmen wir unsere Argumente

$$u_1'+u_1'' \mid u_2'+u_2''$$

zu den Argumenten von ϑFunctionen vom Geschlecht 2, und fragen zunächst, was bedeutete das Nullsetzen

a. Der 6 ungeraden ΘFunctionen?

Die 6 ungeraden ϑFunctionen, gleich Null gesetzt, liefern natürlich auf der Kummer'schen Fläche die 6 Haupttangentencurven 8ter Ordnung, da wir die Parameter derselben zu Verzweigungspunkten genommen haben.

Dementsprechend erhalten wir auf der Cyklide 6 ausgezeichnete Krümmungslinien. Wir wissen schon, dass die Haupttangentencurve $\lambda = c_6$ übergeführt wird in die singuläre Krümmungslinie 8ter Ordnung, in welcher die Cyklide von der benachbarten geschnitten wird[18]. Beide Curven sind derartig auf einander bezogen, dass den Tangenten der einen die Punkte der andern, den Punkten der einen die Tangenten der andern entsprechen; sie sind reciproke Curven im Sinne des Herrn Lie[19]) Die Spitzen der einen verwandeln sich, wie wir wissen, in die stationären Tangenten der anderen Curve und umgekehrt. Da nun die 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven 8ter Ordnung auf der Kummer'schen Fläche 40 stationäre Tangenten und keine Spitzen haben, so hat die singuläre Krümmungslinie, längs welcher die developpabele Focale der Cyklide berührt, keine stationären Tangenten, aber 40 Spitzen. (Die 40 Osculationskugeln in diesen Punkten sind Hyperosculationskugeln und schneiden die Cyklide längs 2er Geraden und eines Kreises, der durch den Schnitt der beiden Geraden geht, die 40 Punkte sind die 40 Nabelpunkte der Cyklide[20]).

Die übrigen 5 ausgezeichneten Haupttangentencurven erhalten wir für $\lambda = c_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ihnen entsprechen auf der Cyklide die 5 ausgezeichneten Krümmungslinien 4ter Ordnung, die 5 Focalcurven, die ausgeschnitten werden von den 5 Fundamentalkugeln.

In diesem Falle gehört die Linienfläche, deren Erzeugende die längs der betreffenden ausgezeichneten Haupttangentencurve construir-

---

18) Siehe p. 65.
19) Lie, a. a. O., p. 164.
20) Darboux, a. a. O., p. 309.

ten Doppeltangenten an die Kummer'sche Fläche, dem Complex $x_6 = 0$ zugehörend, sind, einer linearen Congruenz an; infolgedessen liegt die entsprechende Curve im Cyklidenraume in der Tat auf einer Kugel, und zwar einer der 5 Fundamentalkugeln.

Die Linienfläche ist vom 4ten Grade und hat das Geschlecht 1, enthält jede der Directrieen der Congruenz doppelt und hat 8 singuläre Linien, 4 davon haben ihren zugehörigen singulären Punkt in einer der Direktrieen, während ihre Ebenen durch die andere gehen; bei den 4 übrigen findet das Umgekehrte statt.

Infolgedessen hat die Curve auf der Cyklide von der 4ten Ordnung ebenfalls das Geschlecht 1, und es tritt achtmal der Fall ein, dass eine Tangente der Curve Minimalgerade ist; diese Tangenten sind Erzeugende der betreffenden Fundamentalkugel, 4 Erzeugende der einen, 4 Erzeugende der andern Art.

b. Die 10 geraden Θ Functionen.

Wir wissen, dass auf der Kummer'schen Fläche den 10 gleich Null gesetzten geraden Θ Functionen mit den in Rede stehenden Argumenten die Schnittlinien mit den 10 Fundamentalflächen 2ter Ordnung entsprechen, also Curven achter Ordnung[21]).

Dementsprechend erhalten wir auf der Cyklide Curven 16ter Ordnung, welche den Berührungsschnitt bilden mit Minimalflächen 16ter Ordnung, welche den Kugelkreis 8fach enthalten und einen der Fundamentalkreise als Leitlinie (4fach zählend) besitzen. Man gelangt zu einer dieser Minimallinienflächen, wenn man die Punkte der Curve der Kummer'schen Fläche abbildet. Natürlich erhält man dieselbe Curve auf der Cyklide, wenn man die Linienfläche 16ten Grades construirt, welche von den Doppeltangenten gebildet wird, und diese dann der Abbildung unterwirft.

Wir fassen das Resultat in den Satz zusammen:

„Den 10 geraden Θ Functionen, gleich Null gesetzt, entsprechen 10 Curven 16ter Ordnung auf der Cyklide. Dieselben können auf-
„gefasst werden als der Berührungsschnitt mit 10 Minimallinienflächen
„16ter Ordnung, die den Kugelkreis achtfach enthalten und je einen
„der Fundamentalkreise als Leitlinie (4fach zählend) besitzen."

---

21) Man vergleiche Rohn: Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperell. Funct. $p = 2$, Diss., ferner die genannte Arbeit desselben Verfassers im 15. B. der Math. Ann.

c. Die Curvenschaar $\vartheta(u-e)=0$

($e_1 \mid e_2 \equiv$ einfachen Integralen.)

$\vartheta(u-e)=0$ stellt auf der Kummer'schen Fläche die Schaar der Haupttangentencurven 16ter Ordnung mit 16 Spitzen und 96 stationären Tangenten dar.

Die Haupttangencurven verwandeln sich nach den früheren §§ in die Krümmungslinien 8ter Ordnung auf der Cyklide, die also 16 stationäre Tangenten, die zugleich Minimallinien sind, und 96 Spitzen haben müssen. Dass damit die Zahl der stationären Tangenten überhaupt nicht erschöpft ist, geht daraus hervor, dass sich auch eine stationäre Tangente einstellt, — welche in diesem Falle reell sein kann, — wenn 3 aufeinanderfolgende Erzeugende der Doppeltangentenfläche einer Erzeugung einer Fläche 2ten Grades angehören, welche die Fundamentalgerade des Complexraumes ebenfalls als Erzeugende derselben Art enthält.

„Die Gleichungen $\vartheta(u-e)=0$, wo $e_1 \mid e_2$ einfachen Integralen „congruent sind, stellen bei veränderlicher obrer Grenze dieser ein„fachen Integrale die Schaar der Krümmungslinien auf der Cyklide dar."

d. Die Curvenschaar $\vartheta(u-e)=0$ bei beliebigem $e_1 \mid e_2$

Wenn für einen Punkt der Kummerschen Fläche $\vartheta(u-e)=0$ ist, so muss für denselben Punkt auch

$$\vartheta(-u-e)=\vartheta(u+e)=0$$

sein; denn ebenso wie der betreffende Punkt durch $u_1'+u_1'' \mid u_2'+u_2''$ charakterisirt ist, können wir ihn auch bestimmen durch die Argumente mit entgegengesetzten Vorzeichen

$$-u_1'-u_1'' \mid -u_2'-u_2''.$$

Ist also $\vartheta(u-e)=0$, so muss auch

$$\vartheta(u-e)\,.\,\vartheta(u+e)=0 \text{ sein.}$$

Nun ist aber nach dem Additionstheorem der ϑ Functionen[22])

$$(0)^2\,\vartheta(u-e)\,.\,\vartheta(u+e) = \vartheta_0^2(u)\,\vartheta_0^2(e)+\vartheta_1^2(u)\,\vartheta_1^2(e)+\vartheta_2^2(u)\,\vartheta_2^2(e)+\vartheta_3^2(u)\,\vartheta_3^2(e)$$

wo ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 3 ungerade ϑ Functionen sind, deren Charakteristiken die Summe 0 ergeben.

22) cf. z. B. Krazer, Theorie der 2fach unendlichen ϑ Reihen p. 59.

Der letztere Ausdruck, gleich Null gesetzt, stellt aber auf der Kummer'schen Fläche eine Curvenschaar 16ter Ordnung dar, wie sich bei der Ueberlegung ergiebt, was die ϑ Quadrate zu bedeuten haben. (Man vergl. übrigens die Seminarvorträge des Herrn Klein im W./S. 83 „Ueber die Kummer'sche Fläche".)

„Wir erhalten also auch auf der Cyklide eine ∞^2 Schaar von „Curven 16ter Ordnung, die den Kugelkreis in 16 getrennten Punk- „ten treffen."

§ 2. *Die Borchardt'sche Darstellung der Kummer'schen Fläche und die hierauf sich gründende Uebertragungsweise.*

I. Allgemeine Bemerkungen.

Die Borchardt'sche Darstellungsweise ergiebt sich aus der im vorigen Paragraphen erörterten durch Anwendung einer quadratischen Transformation, so dass die transformirten ϑ Functionen — wir wollen sie mit einem Accent bezeichnen, — nur noch die halben Argumente haben und nur 4 für die Transformation charakteristischen Perioden ungeändert geblieben sind. Es gehört infolgedessen zu einer jeden Classe von quadratischen Transformationen — deren wir 15 haben — als charakteristisch eine Gruppe von 4 ϑ Functionen, die ein Vierersystem erster Art, eine Göpel'sche Vier[23]) bilden. Solche 4 ϑ Functionen sind durch eine Göpel'sche biquadratische Relation[24]) mit einander verbunden, deren wir also auch 15 wesentlich verschiedene haben.

Eine solche Göpel'sche Relation stellt nun die Gleichung der Kummer'schen Fläche, bezogen auf eines der 15 Fundamentaltetraeder dar (siehe Teil II., Cap. 1., § 1. p. 227.) Die ϑ Functionen, welche die Relation bilden, geben, ohne Rücksicht auf die Kummer'sche Fläche einzeln gleich Null gesetzt, die Gleichungen der 4 Ebenen, welche das Fundamentaltetraeder bilden. Mit ihren Vorzeichenänderungen und Vertauschungen bedeuten sie die homogenen Punktcoordinaten von 16 zusammengehörigen Punkten der Kummer'schen Fläche bezogen auf eins der 15 Fundamentaltetraeder[25]). Die Gruppe solcher 16 Punkte zerlegt sich wiederum in 4 Untergruppen; die 4 Punkte einer Untergruppe unterscheiden sich in den Coordinaten durch 2 Vorzeichenwechsel, dagegen gelangt man von einer Unter-

23) siehe Krazer, a. a O. p. 20, p. 61.

24) Göpel: Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis, Cr. Journ., Bd. 35, p. 292, Formel 30.

25) Rohn, Bd. 15 der Annalen p. 344.

gruppe zur andern, indem man die Coordinaten in 2 Paare teilt und die Elemente jedes Paares mit einander vertauscht[26]).

Als Beispiel einer solchen Göpel'schen Relation führen wir die von H. Borchardt[27]) zu Grunde gelegte Gleichung an:

$$\vartheta_5'^4+\vartheta_0'^2+\vartheta_{23}'^4+\vartheta_{14}'^4+2(5)(0)(23)(14)\times\frac{\Pi\varepsilon\varepsilon'((5)^2+\varepsilon(0)^2+\varepsilon'(23)^2+\varepsilon\varepsilon'(14)^2)}{\{(5)^2(0)^2-(23)^2(14)^2\}\{(5)^2(23)^2-(0)^2(14)^2\}\{(5)^2(14)^2-(0)^2(23)^2\}}$$

$$\times\,\vartheta_5'\vartheta_0'\vartheta_{23}'\vartheta_{14}'$$

$$-\frac{(5)^4+(0)^4-(23)^4)-(14)^2}{(5)^2(0)^2-(23)^2(14)^2}\{\vartheta_5'^2\vartheta_0'^2-\vartheta_{23}'^2\vartheta_{14}'^2\}$$

$$-\frac{(5)^4+(23)^4-(0)^4-(14)^2}{(5)^2(23)^2-(0)^2(14)^2}\{\vartheta_5'^2\vartheta_{23}'^2-\vartheta_0'^2\vartheta_{14}'^2\}$$

$$-\frac{(5)^4+(14)^4-(0)^4-(23)^4}{(5)^2(14)^2-(0)^2(23)^2}\{\vartheta_5'^2\vartheta_{14}'^2-\vartheta_0'^2\vartheta_{23}'^2\}=0$$ [28]).

(Hierin sind die Vorzeichen noch nicht vollständig bestimmt; bei Herrn Krazer findet man dagegen, a. a. O. p. 55., Formel III, eine Gleichung, die sämmtliche Göpel'sche Relationen mit Angabe aller Vorzeichen umfasst.)

Die Constanten (5), (0), (23), (14) liefern die homogenen Coordinaten der 16 Knotenpunkte der Kummer'schen Fläche.

Im Ganzen haben wir, wie schon gesagt, 15 derartige Darstellungen, entsprechend den 15 Göpel'schen Relationen und den 15 Classen von quadratischen Transformationen. Der Umstand, dass jede Classe noch eine Gruppe von 24 Transformationen enthält, findet darin seine Begründung, dass nach Auswahl des Tetraeders die Ecken desselben noch 24 Permutationen gestatten.

Wie nun eine solche biquadratische Göpel'sche Relation die Kummer'sche Fläche darstellt, so wird dieselbe nach Ausführung der Berührungstransformation auch die Cyklide darstellen und zwar bezogen auf eins der 15 räumlichen Vierseite, welche den 15 Fundamentaltetraedern entsprechen (cf. p. 233.)

Jedes der 4 ϑ', welche die Göpel'sche Relation bilden, für sich gleich Null gesetzt, stellt die betreffende Minimalgerade dar, welche

---

26) Rohn, a. a. O. p. 337.

27) Borchardt, Crelle's Journal Bd. 83, p. 238. Die Bezeichnung der ϑ' nach Weierstrass.

28) Hierbei sind die Argumente der ϑ' weggelassen und für die Nullwerte abkürzend die blossen Charakteristiken gesetzt.

ein Bestandteil des räumlichen Vierseits ist[29]). Die 4 ϑ'Functionen stellen mit den Vorzeichenwechseln und Vertauschungen, wie sie sich auf p. 252. für die Gruppe der 16 Punkte der Kummer'schen Fläche ergaben, die Coordinaten einer Gruppe von 16 die Cyklide in je einem Punkte berührenden Minimalgeraden dar, die sich ebenso wie die Gruppen der 16 Punkte der Kummer'schen Fläche in 4 Untergruppen sondert. Die 4 in der Gleichung auftretenden Constanten bestimmen mit ihren Vorzeichencombinationen die 16 Minimalgeraden, die auf der Cyklide liegen; denn diese entsprechen den 16 Knotenpunkten, resp. den singulären Ebenen.

Wir erhalten demnach die Sätze:

„Eine der 15 biquadratischen Göpel'schen Relationen, welche „zwischen 4 ϑ', die einem Vierersystem Iter Art angehören, be„stehen, liefert die Gleichung der Cyklide in homogenen Minimal„liniencoordinaten bezogen auf eines der räumlichen Vierseite, welche „aus Minimallinien zusammengesetzt sind, und deren Ecken von den „Punkten gebildet werden, in denen je 3 der Fundamentalkugeln sich „treffen".

Die Gruppirung dieser räumlichen Vierseite zeigt uns § 1. des 1ten Capitels des 2ten Teils, p. 233.

„Die Θ' Functionen, welche die Relation bilden, liefern die Coor„dinaten von je 16 zusammengehörigen Minimalgeraden, welche die „Cyklide berühren. Sie sondern sich wieder in 4 Untergruppen von „je 4 Minimalgeraden. Die Minimalgeraden einer Untergruppe unter„scheiden sich in den Coordinaten durch 2 Vorzeichenwechsel; da„gegen gelangt man von einer Untergruppe zur andern, indem man „die Coordinaten in 2 Paare teilt und die Elemente jedes Paares „mit einander vertauscht".

II. Curvensysteme.

a. Die 16 einfachen ϑ' Functionen.

Fragen wir, was auf der Kummer'schen Fläche die 16 einfachen ϑ'Functionen, wenn wir sie gleich Null setzen. bedeuten, so finden wir zunächst eine Teilung derselben in 4 und 12. Die ersten 4, welche das Vierersystem erster Art bilden, aus welchem die die Kummer'sche Fläche darstellende Göpel'sche Relation besteht, liefern natürlich die Schnitte mit den 4 Ebenen des Fundamentaltetraeders, also 4 ebene Curven 4ter Ordnung von allgemeinem Cha-

29) resp. die durch dieselbe bestimmte Congruenz von Minimalgeraden.

rakter auf der Kummer'schen Fläche. Die 12 übrigen liefern, wie Herr Rohn [30]) zeigt, die Berührungsschnitte 4ter Ordnung mit Flächen 2ter Ordnung, welche das betreffende Fundamentaltetraeder zum gemeinsamen Polartetraeder haben.

Was zunächst die 4 Schnittcurven mit den Tetraederebenen anbetrifft, so entsprechen diesen vermöge unserer Transformation Curven 6ter Ordnung auf der Cyklide, die wie die entsprechenden Curven auf der Kummer'schen Fläche keine Doppelpunkte haben werden, aber den Kugelkreis in 8 Punkten schneiden.

Sie kann übrigens auch aufgefasst werden als Berührungsschnitt mit einer Minimallinienfläche 8ter Ordnung, die den Kugelkreis 4-fach enthält. Diese Minimallinienfläche hat als Leitlinie eine Minimallinie und enthält letztere doppelt zählend, es ist dies die betreffende Minimallinie des Coordinatenvierseits.

Die 12 übrigen ϑ' liefern Curven 4ter Ordnung auf der Cyklide, die wir ansehen können als Berührungsschnitte mit 12 Dupin'schen Cykliden; denn in solche verwandeln sich vermöge der Transformation die 12 die Kummer'sche Fläche berührenden Flächen 2ter Ordnung [31]) und zwar sind dieselben auf dasselbe Coordinatenvierseit bezogen.

Wir fassen die erhaltenen Resultate wiederum in den Satz zusammen:

„Setzen wir die 16 einfachen Θ' gleich Null, so erhalten wir auf „der Cyklide 4 Curven 8ter und 12 Curven 4ter Ordnung. Die er-„steren entsprechen den 4 ausgezeichneten Θ', die das gewählte „Vierersystem bilden, und können angesehen werden als die Berüh-„rungsschnitte mit Minimallinienflächen 8ter Ordnung, die den Kugel-„kreis vierfach, und die entsprechende Minimallinie des Coordinaten-„vierseits als Leitlinie 2fach enthalten. Die 12 übrigen Curven 4ter „Ordnung sind die Berührungsschnitte mit 12 Dupin'schen Cykliden".

b. Die ∞' Curvenschaar $\vartheta'(u-e)=0$.

$e_1 \mid e_2 \equiv$ einfachen Integralen.

Nach Seite 250 ist mit $\vartheta'(u-e)$ auch $\vartheta'(u+e)=0$, und $\vartheta'(u-e).\vartheta'(u+e)$ kann man wiederum in eine Summe von ϑ'Quadraten zerlegen, deren Argumente die $u_1 \mid u_2$ allein sind. Diese ϑ'-

30) Bd. 15. der Math. Annalen p 346.

31) Lie, Bd. 5. der Annalen, a. a. O. p. 173.

Quadrate wiederum lassen sich sämmtlich durch die Quadrate der ursprünglichen ein Vierersystem erster Art bildenden ϑ' ausdrücken [32]). Eine derartige Gleichung stellt demnach auf der Kummer'schen Fläche den Schnitt mit einer Fläche 2ter Ordnung dar, also Curven 8ter Ordnung. Wir erhalten so auch auf der Cyklide eine ∞' Schaar von Curven 16ter Ordnung.

c. Die ∞^2 Curvenschaar $\vartheta'(u-e)=0$ bei beliebigem $e_1 \mid e_2$.

Wir erhalten ganz dasselbe Resultat, wie unter b., nur jetzt eine ∞^2 Schaar von Curven 16ter Ordnung.

§ 3. *Die Cayley-Weber'sche Darstellung der Kummer'schen Fläche und ihre Uebertragung.*

I. Die Gleichungsform.

Während die so eben in Betracht gezogene Darstellung an die Gleichungsform der Kummer'schen Fläche bezogen auf eins der 15 Fundamentaltetraeder anknüpfte, gründet sich die jetzt zu besprechende Methode auf die von H. Kummer [33]) gegebene Gleichungsform, welche voraussetzt, dass die Seiten des Coordinatentetraeders Doppelebenen, und die Eckpunkte Knotenpunkte der Fläche sind. Auf diese Gestalt der Gleichung wird man aber geführt, wenn man die 4 ϑ' jener biquadratischen Relation einer nochmaligen quadratischen Transformation unterwirft, so dass man die daraus hervorgehenden ϑ'' auch als aus den ursprünglichen ϑ (ohne Accente) durch Zweiteilung entstanden ansehen kann. Wenn man alsdann die nunmehrigen ϑ''Quadrate — wir bezeichnen sie durch 2 Accente, — durch die 4 ein Vierersystem 2ter Art bildenden ausdrückt, und letztere ϑ''Quadrate den 4 Coordinaten ξ, η, ζ, ω eines Punktes der Fläche gleichsetzt, so erhält man die gewünschte Gleichungsform [34])

$$\sqrt{e_5^2 e_{01}^2 \xi (e_{12}^2 \eta + e_{14}^2 \zeta - e_{03}^2 \omega)} - \sqrt{e_2^2 e_{34}^2 \eta (-e_{03}^2 \zeta + e_{12}^2 \xi + e_{14}^2 \omega}$$
$$- \sqrt{e_4^2 e_{23}^2 \zeta (e_{14}^2 \xi + e_{03}^2 \eta - e_{12}^2 \omega} = 0.$$

---

32) Siehe Krazer, a. a. O. p. 53.

33) Kummer, Monatsberichte der Berl. Akad. 1864, p. 252.

— Abh. der Berl. Akad., 1866: Ueber algebraische Strahlensysteme.

34) Rohn, Bd. 15. der Annalen, p. 347. In rationaler Form findet man die Gleichung bei H. Krazer, a. a. O. p. 44., Gleichung 4.

Hierin sind die ϑ Nullwerte durch e mit angehängten Index bezeichnet, entsprechend der jedesmaligen Charakteristik; die Bezeichnung ist die von Weierstrass.

Die 16 Doppelebenen der Kummer'schen Fläche verwandeln sich nun durch die Berührungstransformation zusammen mit den 16 Knotenpunkten in die 16 Minimalgeraden, die auf der Cyklide liegen. Dieselbe Θ Relation also, welche die Kummer'sche Fläche bezogen auf ein Doppelebenentetraeder darstellt, stellt auch die Cyklide bezogen auf ein Minimallinienquadrupel dar, die sämmtlich der Cyklide angehören. Wie es nun 80 Vierersysteme 2ter Art [35]) giebt, so erhalten wir auch 80 Doppelebenentetraeder.

Den 4 Ebenen eines Tetraeders entsprechen nun im Cyklidenraum 4 Minimalgerade der Cyklide. Je drei der Tetraederebenen schneiden sich aber in einem Knotenpunkte; es entstehen so 4 Knotenpunkte, und diesen müssen ebenfalls 4 Gerade der Cyklide entsprechen. Es können nun, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, 2 Fälle eintreten: die 4 Knotenpunkte liefern entweder

1) dasselbe Geradenquadrupel wie die 4 singul. Ebenen, oder

2) ein Geradenquadrupel, welches mit dem ersten eine Schläfli'sche Doppelvier bildet, und zwar erhalten wir im Ganzen

40 Quadrupel der ersten Art,
40 Quadrupel der zweiten Art, oder 20 Doppelvieren [36]).

Wir haben demnach den Satz:

„Die Relation 4ten Grades, welche zwischen den Θ" Quadraten „besteht, die einem Vierersystem 2ter Art angehören, liefert die „Gleichung der Cyklide bezogen auf eins der 80 Quadrupel, welche „aus den Geraden der Cyklide, entsprechend den 80 Vierersystemen „2ter Art, gebildet werden können; 40 von diesen Quadrupeln haben „die besondere Eigenschaft, 20 Schläfli'sche Doppelcurven zu bil„den".

Indem wir nochmals darauf hinweisen, dass unsere jetzigen Argumente nur halb so gross als die ursprünglichen sind, welche die

35) Krazer, a. a. O., Tabelle II., am Schluss.

36) Damit sind aber die Doppelvieren, welche die Geraden der Cyklide bilden können, erschöpft, vergl. Clebsch: Ueber Flächen 4ter Ord. etc. Cr. J. Bd. 69., p. 157.

liniengeometrische Darstellung vermittelten, bemerken wir noch, dass die homogenen Coordinaten eines Punktes der Kummer'schen Fläche sich jetzt durch die ϑ''Quadrate ausdrücken, infolgedessen zu einem Punkte die Argumente

$$\pm u + \Pi$$

gehören, wo Π ein beliebiges, auch ungerades Periodenmultiplum bezeichnen kann.

Ebenso bestimmen jetzt im Cyklidenraum

$$\pm u + \Pi$$

ein und dieselbe die Cyklide berührende Minimalgerade, also auch mittelbar einen Punkt der Cyklide, denjenigen, in welchem die Minimalgerade berührt.

„Die Werte, welche die 4 ϑ''Quadrate annehmen, die einem „Vierersystem 2ter Art angehören, liefern die Coordinatenwerte einer „der Minimalgeraden, welche die Cyklide berühren; diese Coordinaten „bleiben ungeändert, wenn wir die Argumente der ϑ''Functionen im „Vorzeichen ändern oder beliebige Periodenmultipla zufügen".

II. Curvensysteme.

a. Die einfachen ϑ''Functionen.

Die 16 einfachen ϑ''Functionen ergeben zunächst, gleich Null gesetzt, auf der Kummer'schen Fläche die Gleichungen der 16 Kegelschnitte, in welchen die 16 Doppelebenen die Kummer'sche Fläche berühren. Ihnen entsprechen auf der Cyklide natürlich die 16 Geraden. Insofern jeder Kegelschnitt durch 5 Knotenpunkte geht, die nicht zu seiner Ebene gehören, erhalten wir bei der Construction der Doppeltangenten ausser der Linienfläche 1ten Grades, welche die Ebene des Kegelschnitts ausfüllt, noch 5 Linien ersten Grades. Denselben entsprechen die 5 Geraden der Cyklide, welche eine vorgegebene Gerade derselben schneiden.

Wir erhalten den Satz:

„Die 16 einfachen Θ''Quadrate, gleich Null gesetzt, liefern die „16 Minimalgeraden, die auf der Cyklide existiren".

b) Die Curvenschaaren $\Theta''(u-e) = 0$.

1) $\vartheta_i''(u-e) = 0$[37], wo $e_1 \mid e_2$ einfachen Integralen con-

---

37) i = einer der 16 Charakteristiken.

gruent ist, liefert auf der Kummer'schen Fläche eine Tangentialebene, welche in einem der 16 Knotenpunkte an dieselbe gelegt wird; dieselbe schneidet auf der Kummer'schen Fläche eine Curve 4ter Ordnung aus, welche in dem Knotenpunkt eine Spitze hat.

2) Ist $e_1 \mid e_2$ allgemein, und nehmen wir $e_1 \mid e_2$ in der Gestalt an

$$e_1 \mid e_2 = \frac{v_1'+v_1''}{2} \,\Big|\, \frac{v_2'+v_2''}{2}$$

so liefert

2) $$\vartheta''(u-e) = 0$$

eine Tangentialebene der Kummer'schen Fläche, welche in dem Punkt berührt, dessen Argumente sich in die Gestalt setzen lassen [38])

$$u_1 \mid u_2 = \frac{v_1'-v_1''}{2} \,\Big|\, \frac{v_2'-v_2''}{2}.$$

Diese schneidet auf der Kummer'schen Fläche also eine Curve 4ter Ordnung aus, die in dem betreffenden Punkt einen Doppelpunkt besitzt.

Die Curven 4ter Ordnung, welche auf der Kummer'schen Fläche durch die Gleichung 1) dargestellt werden, verwandeln sich in Curven 8ter Ordnung auf der Cyklide, die eine der Minimalgeraden der Cyklide zur stationären Tangente besitzen; sie bilden den Berührungsschnitt mit Minimallinienflächen 8ter Ordnung, welche den Kugelkreis 4fach enthalten und diejenige Minimallinie als Leitlinie (2fach zählend) besitzen, welche die Cyklide in dem genannten Tangenteninflexionspunkt der Curve berührt.

Wir erhalten den Satz:

„Durch die Gleichungen

$$\Theta_i''(u-e) = 0, \text{ wo } e_1 \mid e_2 \equiv \text{einfachen Integralen,}$$

„werden auf der Cyklide 16 Curvensysteme 8ter Ordnung dargestellt, „welche je eine der 16 Minimalgeraden der Cyklide zur Wendetangente besitzen und angesehen werden können als Berührungsschnitt „mit Minimallinienflächen 8ter Ordnung, die den Kugelkreis 4fach „enthalten und die in dem betreffenden Wendepunkt die Cyklide be„rührende Minimalgerade als Leitlinie besitzen".

---

38) Man vergleiche Seminarvortrag des H. Klein, W. S. 82|83. „Ueber die Kummer'sche Fläche".

Daran schliesst sich sofort der weitere Satz, die Curven betreffend, die durch 2) dargestellt sind:

„Durch die Gleichungen

$$\vartheta''(u-e) = 0 \text{ bei beliebigem } e_1 \mid e_2$$

„werden auf der Cyklide ∞^2 Curven 8ter Ordnung mit Doppelpunkt „dargestellt, die angesehen werden können als Berührungsschnitt mit „Minimallinienflächen 8ter Ordnung, die den Kugelkreis 4fach ent„halten und eine der beiden im Doppelpunkt die Cyklide berühren„den Minimalgeraden als Leitlinie besitzen“.

Schlusscapitel.

Beziehungen zwischen Kummer'schen Flächen und Flächen 2ten Grades.

Uebertragen wir die Ergebnisse des letzten Capitels im ersten Teil auf den Raum des linearen Complexes, so erhalten wir hier an Stelle der doppeltberührenden Kreise an 2 Flächen des confocalen Systems Hyperboloide, welche 2 Erzeugende derselben Art enthalten, die Doppeltangenten der einen Kummer'schen Fläche, und 2 weitere Erzeugende derselben Art, die Doppeltangenten der andern Kummer-schen Fläche der Schaar [39]) sind, Hyperboloide berühren die Kummer'schen Flächen also in je 4 Punkten. Die Erzeugenden der andern Art der Hyperboloide entsprechen zu je zweien den Kugeln des durch den Bildkreis bestimmten Büschels; den beiden Punktkugeln des Büschels entsprechen (die) 2 $x_6 = 0$ angehörigen Erzeugenden.

Wählen wir 2 Kummer'sche Flächen der Schaar mit den Parametern λ_0 und μ_0 willkürlich heraus und überdies ein Geradenpaar, das $x_6 = 0$ angehört und conjugirt in Bezug auf einen andern der Fundamentalcomplexe ist, so lassen sich durch dieses Geradenpaar 4 Hyperboloide legen, welche die gewünschte Eigenschaft besitzen, mit jeder der Kummer'schen Flächen 2 Doppeltangenten gemein zu haben und auf jeder derselben die Kummer'sche Fläche 2mal zu berühren. Durch ein Doppeltangentenpaar $x_6 = 0$ auf einer der beiden Kummer'schen Flächen selbst, das conjugirt ist in Bezug auf einen der andern 5 Complexe, lassen sich noch 2 Hyperboloide der verlangten Art legen.

Wir haben demnach auf einem solchen Hyperboloide 2 Geraden der ersten Erzeugung. Die $x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$ od. 5) und 2 Ge-

39) Die Kummer'schen Flächen der Schaar berühren sich längs der ausgezeichn. Hauptttang. 8. Ord.

rade der 2ten Erzeugung, die $x_6 = 0$ angehören. Die übrigen Geraden der letzten Erzeugung gruppiren sich zu je zweien zu denselben als Doppelelementen einer Involution; entsprechend der Involution des Kugelbüschels mit den Punktkugeln als Doppelelementen. Eine Kugel des Büschels wird zur Ebene; ihr entsprechen die beiden conjugirten Erzeugenden, die die Fundamentalgerade treffen. Die Fundamentalgerade wird noch von 2 Erzeugenden der andern Art geschnitten; letztere entsprechen den Kreispunkten des Ausgangskreises.

Wir haben jetzt im Raum des Complexes $x_6 = 0$, indem wir noch einen der übrigen Fundamentalcomplexe $x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$ oder 5) herausgreifen [40]), eine Darstellung der Geradenpaare, jeweils conjugirt in Bezug auf diesen 2ten Fundamentalcomplex, durch 3 Parameter λ, μ, ν, wo

$$a_1 > \nu > a_2, \quad a_2 > \mu > a_3, \quad a_3 > \lambda > a_4.$$

Einem Werttripel λ, μ, ν gehören 8 Geradenpaare an, welche die 3 Kummer'schen Flächen der Schaar, entsprechend den 3 Parametern λ, μ, ν als gemeinschaftliche Doppeltangenten besitzen (cf. p. 235).

Die ∞^2 Schaar von Hyperboloiden wird alsdann analytisch definirt durch die simultanen Differentialgleichungen

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\lambda}{\varLambda} - \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{N} &= 0 \\ \frac{\lambda d\lambda}{\varLambda} - \frac{\mu d\mu}{M} + \frac{\nu d\nu}{N} &= 0 \end{aligned} \right.$$

wo $\varLambda$, M, N die Werte 3) p. 210. besitzen und $\frac{d\lambda}{\varLambda}$, $\frac{d\mu}{M}$, $\frac{d\nu}{N}$ sämmtlich dasselbe Vorzeichen besitzen. Um nur mit reellen Grössen zu tun zu haben, lassen wir wiederum die Ungleichungen bestehen

$$2) \quad a_1 > \nu > a_2, \quad \mu_0 > \mu > a_3, \quad \lambda_0 > \lambda > a_4.$$

Der Uebergang von einem Complexgeradenpaar λ, μ, ν zu einem benachbarten $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ giebt uns alsdann eins der 4 in Redestehenden Hyperboloide, wenn dabei die Gleichungen 1) erfüllt werden. Die 4 Hyperboloide sind von einander unterschieden durch die Vorzeichen der Verhältnisse der Wurzelfunctionen $\varLambda$, M, N.

Betrachten wir jetzt ein einzelnes der 4 Hyperboloide. Wir lassen das Erzeugendenpaar $(\lambda\,\mu\,\nu)$ — wir wollen es (LL') nennen —

40) Wir wollen $x_5 = 0$ auszeichnen.

längs des ganzen Hyperboloids hinlaufen; es werden sich dann die den successiven Erzeugendenpaaren zugehörigen Wurzelfunctionen A, M, N stetig ändern und ihre Vorzeichen nur mit resp. $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ zusammen ändern, d. h. in den Erzeugendenpaaren resp. $\lambda = a_4$, $\lambda = \lambda_0$; $\mu = a_3$, $\mu = \mu_0$; $\nu = a_2$, $\nu = a_1$; jede Wurzelfunction ändert also ihr Vorzeichen 2mal auf jeder Hälfte des Hyperboloids [41]).

Geht man von dem Geradenpaar $(LL') = (\lambda\,\mu\,\nu)$ bis zu dem Geradenpaare $(L_0 L_0') = (\lambda_0\,\mu'\alpha')$, das Doppeltangentenpaar an die Kummer'sche Fläche λ_0 ist, so ergeben die Differentialgleichungen 1):

$$3)\quad \int_{\nu N}^{\nu' N'} \frac{\nu^{k-1} d\nu}{N} - \int_{\mu M}^{\mu' M'} \frac{\mu^{k-1} d\mu}{M} \int_{\lambda A}^{\lambda_0 1 0} \frac{\lambda^{\varkappa-1} d\lambda}{A} = 0 \quad k = 1,\, 2$$

oder

$$4)\quad \int_{a_2}^{\nu N} \frac{\nu^{k-1} d\nu}{N} - \int_{a_3}^{\mu M} \frac{\mu^{k-1} d\mu}{M} + \int_{\lambda_0}^{\lambda_1 A} \frac{\lambda^{k-1} d\lambda}{A}$$

$$= \int_{a_2}^{\nu' N'} \frac{\nu^{k-1} d\nu}{N} - \int_{a_3}^{\mu' M'} \frac{\mu^{k-1} d\mu}{M} \quad k = 1,\, 2$$

als Relationen zwischen den Coordinaten $(\nu'\mu')$ der Berührungsdoppeltangente $(L_0 L_0')$ einer der 4 vom Geradenpaar (LL') an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 gehenden Doppelberührungshyperboloide und den Coordinaten $\lambda\mu\nu$ von (LL').

Nun können wir endlich auch Schliessungssätze aufstellen für Gebilde — den Polygonen entsprechend — die aus Teilen von Hyperboloiden zusammen gesetzt sind, welche zu der betrachteten ∞^2 Schaar gehören, Gebilde also, die den Flächen λ_0 und μ_0 umschrieben sind, und ausserdem einer Fläche der Schaar einbeschrieben sein mögen.

Man gelangt zu einem solchen aus Hyperboloidteilen bestehenden Gebilde, indem man von einem Doppeltangentenpaare, conjugirt in Bezug auf $x_5 = 0$ der Kummer'schen Fläche λ ausgeht und, eins der hindurch gehenden 4 Hyperboloide der Schaar beliebig herausgreifend, auf demselben von Erzeugender zur Erzeugender fortschreitet, bis man wiederum zu einem Erzeugendenpaare gelangt, das der Fläche

41) Das Hyperboloid wird durch die 2 $x_5 = 0$ angehörigen Erzeugenden in 2 Hälften geteilt.

λ angehört. Jetzt verlassen wir das Ausgangshyperboloid und gehen auf dem in Bezug auf λ conjugirten Hyperboloid weiter, für welches Λ das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Bleibt diese Festsetzung auch für alle späteren Schnitte mit der Fläche λ bestehen, so ist dadurch unsere Construction eindeutig bestimmt, nachdem Anfangserzeugendenpaar und Anfangsfläche gegeben sind.

Neben dem einen Polygon (im übertragenen Sinne) erhalten wir ein 2tes conjugirtes, dessen Kanten ebenfalls auf λ liegen, aber das vom ersten durch die Congruenz $x_4 = 0$ $x_6 = 0$ geschieden ist. Auch jetzt ist zu bemerken, dass wir im allgemeinsten Falle nicht 2, sondern ein einziges Polygon erhalten würden mit der doppelten Kantenzahl, welches die Congruenz $x_4 = 0$, $x_6 = 0$ durchsetzt.

Soll die Polygonconstruction sich schliessen, also Endkante mit Anfangskante zusammenfallen, und das letzte Hyperboloid mit dem ersten conjugirt in Bezug auf λ sein, so muss die Bedingung bestehen:

$$5)\qquad 2e\int_{\lambda\Lambda}^{\lambda_0}\frac{\lambda^{k-1}d\lambda}{\Lambda}-4m\int_{a_3}^{\mu_0}\frac{\mu^{k-1}d\mu}{M}+4n\int_{0|2}^{a_1}\frac{\nu^{k-1}d\nu}{N}.$$

Inhaltsübersicht.

II. Teil.

Kummer'sche Flächen und Cykliden.

I. Capitel.

Die Kummer'sche Fläche und die Lie'sche Berührungstransformation.

§ 1. Die Fundamentalgebilde in der Geometrie der Kummer'schen Fläche und ihre Uebertragung . . . . . p. 225

§ 2. Die Schaar der Kummer'schen Flächen in ihrer Beziehung zum Cyklidensystem 233

§ 3. Parameterverteilung auf der Kummer'schen Fläche und deren Uebertragung 236

§ 4. Abbildung von Linienflächen, deren Erzeugende dem ausgezeichneten linearen Complex angehören 238

§ 5. Abbildung von Curven 242

II. Capitel.

Kummer'sche Fläche und Cyklide unter Berücksichtigung der ΘFunctionen 245

§ 1. Die liniengeometrische Darstellung der Kummer'schen Fläche und die hierauf basirende Uebertragungsweise . 245

Curvensysteme 248

a. Die 6 ungeraden ΘFunctionen 248

b. Die 10 geraden ΘFunctionen 249

c. Die Curvenschaar $\Theta(u-e)=0$ $e_1 \mid e_2 \equiv$ einfachen Integralen 250

d. Die Curvenschaar $\Theta(u-e)$ bei beliebigem $e_1 | e_2$ 250

§ 2. Die Borchardt'sche Darstellung der Kummer'schen Fläche und die hierauf sich gründende Uebertragungsweise.

I. Allgemeine Bemerkungen 251

II. Curvensysteme.

a. Die 16 einfachen ΘFunctionen 253

b. Die ∞^1 Curvenschaar $\Theta(u-e)$ $e_1 \mid e_2 \equiv$ einfachen Integralen 254

c. Die ∞^2 Curvenschaar $\Theta'(u-e)=0$
$e_1 \mid e_2$ beliebig 255

§ 3. Die Cayley-Weber'sche Darstellung der Kummer'schen Fläche und ihre Uebertragung.

I. Die Gleichungsform 255

II. Curvensysteme 257

a. Die 16 einfachen ΘFunctionen 257

b. Die Curvenschaaren $\Theta''(u-e)=0$ 257

Schlusscapitel.

Beziehungen zwischen Kummer'schen Flächen und Flächen 2ten Grades 259

XI.

Ueber einen Satz der Zahlentheorie.

Von

Herrn **F. Gomes-Teixeira,**

Professor an der Universität Coimbra.

In einer Note, publicirt in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome XCIII, hat Herr Weill gezeigt, dass

$$\frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(a!)^\alpha(b!)^\beta\ldots(h!)^\lambda}$$

eine ganze Zahl ist, wofern

$$n = a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots h\lambda$$

Er beweist diesen Satz, indem er zeigt, dass obiger Ausdruck die Anzahl der Arten darstellt, auf welche man aus n Buchstaben eine Zusammenstellung von a Gruppen zu α Buchstaben, b Gruppen zu β Buchstaben, c Gruppen zu γ Buchstaben u. s. w. bilden kann.

Wir werden sehen, dass man diesen Satz mit Hülfe der Theorie der Derivirten beliebiger Ordnung begründen kann, ein Verfahren, welches die Bedeutung hat, dass es einen Platz zwischen zwei Doctrinen, der Combinatorik und der Lehre von den höhern Derivirten, aufstellt.

Betrachten wir die 2 Functionen

$$u = f(y), \quad y = \varphi(x)$$

Die successive Differentiation von u nach x gibt, wie leicht zu sehen, das Resultat:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \Sigma A u^{(i)} (y')^\alpha (y'')^\beta \dots (y^{(n)})^\lambda$$

wo A eine ganze Zahl ist.

Um den Satz in aller Allgemeinheit zu beweisen, betrachten wir die Functionen

$$u = f(y_1, y_2, \dots y_l);\; y_1 = \varphi_1(x);\; y_2 = \varphi_2(x); \dots\; y_l = \varphi_l(x)$$

In unserm Artikel — über die Derivirten beliebiger Ordnung, publicirt im XVIII. Bande des Giornale di Battaglini, haben wir gezeigt, dass die Derivirte $n$ter Ordnung von u nach x durch die Formel gegeben ist:

$$u^{(n)} = \Sigma A \frac{\partial^m f}{\partial u_1^{\,n}, \partial y_2^{\,\beta} \dots} (u_1')^\alpha (u_1'')^\beta \dots (u_2')^{\alpha'} (u_2'')^{\beta'} \dots$$

wo A eine ganze Zahl und durch die Formel ausgedrückt ist:

$$A = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda! \times \alpha'!\,\beta'!\dots\lambda'! \times \dots \times (2!)^{\beta+\beta'+\dots} (3'!)^{\gamma+\gamma'\dots} \dots (n!)^{\lambda+\lambda'+\dots}}$$

wo

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + 3\gamma' + \dots + n\lambda' + \dots = n$$

Der Satz ist hiernach vollständig bewiesen.

Aus dem eben Gesagten schliesst man, dass ein Band besteht zwischen den Coefficienten im analytischen Ausdruck der Derivirten $n$ter Ordnung und der Anzahl der Combinationen von n Buchstaben; und so ergibt ein beliebiger Satz aus der einen Doctrin einen entsprechenden Satz der andern, und die mit der einen verknüpften Gegenstände sind es auch mit der andern.

So sind z. B. die Bernoulli'schen Zahlen, gemäss ihrem Ausdruck

$$B_{2n-1} = (-1)^n \frac{2n}{2^{2n}-1} y_0^{(2n-1)}$$

wo $y_0^{(2n-1)}$ die $(2n-1)$te Derivirte der Function

$$y = (1+e^x)^{-1}$$

für $x = 0$ darstellt, verknüpft mit den in Rede stehenden Coefficienten A mittelst der folgenden Formel:

$$B_{2n-1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}-1} \Sigma \frac{(-1)^{i+n}\, i!}{2^{i+1} \alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda}$$

wo

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots (2n-1)\lambda = 2^n - 1$$

Um die Bedeutung der Zusammenstellung der Theorie der **Derivirten beliebiger Ordnung** mit den **Combinationen** ans Licht zu stellen, wollen wir einen Satz der Theorie der Derivirten herleiten.

Zu diesem Zwecke wollen wir zuerst mittelst einer Derivirten $n$ter Ordnung den Ausdruck der Summe der Coefficienten A suchen, für welche $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$ einen bestimmten Wert i hat.

Setzt man $u=y^i$ in der Formel

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \Sigma A u^{(i)} (y')^\alpha (y'')^\beta \ldots (y^{(n)})^\lambda$$

so werden alle Terme von der Ordnung i an null, weil man hat:

$$u^{(i)} = i!, \quad u^{(i+1)} = u^{(i+2)} = \ldots = 0$$

Macht man nachher $y=e^x-1$ und $x=0$, so erhält man gesondert den Term $i$ter Ordnung, weil $y=0$, $y'=1$, $y''=1$, etc., folglich

$$u=0, \quad u'=0, \quad u''=0, \quad \ldots u^{(i-1)}=0$$

Wir haben also

$$\Sigma' A = \frac{1}{i!}\left(\frac{\partial^n (e^x-1)^i}{\partial x^n}\right)_{x=0}$$

wo Σ' die Summe der Werte von A darstellt, welche den Lösungen der Gleichungen

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+h\lambda=n; \quad \alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=i$$

in positiven ganzen Zahlen entsprechen. Dafür kann man schreiben:

$$i+\beta+2\gamma+\ldots(h-1)\lambda=0$$

Andrerseits haben wir in Anwendung der Leibnitz'schen Formel:

$$\frac{\partial^n (e^x-1)^i}{\partial x^n} = \Big[(e^x-1)(e^x-1)\ldots\Big]^{(n)}$$
$$= S\,\frac{n!\,e^{(i-\mu)x}(e^x-1)^\mu}{h_1!\,h_2!\ldots h_i!}$$

wo die h alle ganzen Zahlen von 0 bis n zu durchlaufen haben, für welche

$$h_1+h_2+\ldots h_i=n \tag{1}$$

ist, und wo μ die Anzahl der h bezeichnet, welche $=0$ sind, und folglich

$$\left[\frac{\partial^n (e^x-1)^i}{\partial x^n}\right]_{x=0} = S\,\frac{n!}{h_1!\,h_2!\ldots h_i!}$$

wo die h unter der Beschränkung (1) von 1 bis n variiren. Wir haben also:

$$\Sigma' \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(2!)^\beta(3!)^\gamma\ldots(h!)^\lambda} = \frac{1}{i!} S \frac{n!}{h_1!h_2!\ldots h_i!}$$

Bezeichnet man nun durch $\varphi(a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)$ die Anzahl der Arten, auf welche man mit der Bedingung

$$n = a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots$$

eine Zusammenstellung von a Gruppen zu α, b Gruppen zu β, c Gruppen zu γ Buchstaben u. s. w. bilden kann, so haben wir folgenden Satz:

$$\Sigma\varphi[i+\beta+2\gamma+\ldots+(n-1)\alpha] = \Sigma\varphi(h_1+h_2+\ldots+h_i)$$

das heisst:

„Die Summe aller Anzahlen von Arten, auf welche man, nach „Zerlegung von n auf alle mögliche Arten in $i+\beta+2\gamma+\ldots(n-1)\lambda$, „Zusammenstellungen von i Buchstaben, β Buchstaben, 2 Gruppen zu „γ Buchstaben u. s. w. bilden kann, ist gleich der Summe, welche der Zer„legung von n auf alle möglichen Arten in $h_1+h_2+\ldots+h_i$ entspricht."

Zum Schluss dieses Artikels geben wir noch den Ausdruck von ΣA mittelst der Derivirten beliebiger Ordnung. Setzt man zu diesem Zwecke $u = e^y$ $y = e^x-1$, so hat man:

$$u^{(i)} = e^y, \quad u_0^{(i)} = 1, \quad y_0 = 0, \quad y_0' = 1, \quad y_0'' = 1, \text{ etc.}$$

und folglich

$$\Sigma A = \left[\frac{\partial^n(e^{e^x-1})}{\partial x^n}\right]_{x=0}$$

Porto, den 6. Januar 1885.

XII.

Zum Molins'schen Problem.

Von

R. Hoppe.

In den Mémoires de l'Acad. des sc., inscr. et b. l. de Toulouse. T. V. hat H. Molins die Aufgabe gestellt und gelöst: in voller Allgemeinheit diejenige Curve in Coordinaten darzustellen, von welcher der Radius der osculirenden Kugel gegebene Function des Krümmungsradius ist. Ohne in den wesentlichen Bestandteilen der Herleitung etwas abzuändern, nehme ich die Aufgabe noch einmal auf, um diese Bestandteile in einfachern Zusammenhang zu bringen, die teilweise Zuziehung geometrischer Betrachtungen, welche dem Einblick keinerweise dienlich ist, durch gleichmässig fortschreitende Rechnung zu ersetzen und zu zeigen, dass der Weg der Lösung, welcher in vorliegender Darstellung durchweg als Invention erscheint, aus der Aufgabe und der ergänzenden willkürlichen Bestimmung sichtlich hervorgeht.

Da zur Bestimmung einer Curve 2 Relationen notwendig sind, die Aufgabe aber nur eine liefert, so muss die allgemeine Lösung eine willkürliche Function enthalten. Es steht uns frei diese von Anfang festzusetzen. Molins hat das Krümmungsverhältniss zur willkürlichen Function des einen Richtungswinkels der Tangente gemacht; letzterer tritt dann als unabhängige Variable im Ausdruck der Curve auf. Wir behalten diese Wahl bei, führen jedoch die ergänzende Relation erst nach erster Integration ein; denn es ist bemerkenswert, dass sich eine solche schon unabhängig davon vollziehen lässt, was bei der Molins'schen Integrationsweise nicht ans Licht kommt.

Die Coordinaten eines Punktes der Curve s seien x, y, z, die Richtungscosinus der Tangente f, g, h, der Hauptnormale f', g', h', der Binormale l, m, n, der Contingenzwinkel der Tangente $\partial\tau$, der Schmiegungsebene $\partial\vartheta$, der Accent bezeichne die Differentiation nach τ

Der Krümmungsradius ist hiernach $= s'$. Der Radius der osculirenden Kugel, d. h. derjenigen Kugel, welche durch 4 consecutive Punkte geht, hat, wie bekannt, den Ausdruck:

$$\pi = \sqrt{s'^2 + \left(\frac{\partial s'}{\partial \vartheta}\right)^2} \tag{1}$$

woraus:

$$\partial\vartheta = \frac{\partial s'}{\sqrt{\pi^2 - s'^2}} \tag{2}$$

Der Aufgabe gemäss soll nun π gegebene Function von s' sein. Gl. (2) zeigt, dass dann auch der Torsionswinkel ϑ bekannte Function von s' ist.

Jetzt führen wir ϑ' als willkürliche Function von f ein. Aus dieser Relation allein geht mit Beachtung, dass $\partial l = -f'\partial\vartheta$ ist, hervor:

$$l = -\int f'\partial\vartheta = -\int \vartheta'\partial f$$

Nun ist

$$f^2 + f'^2 + l^2 = 1$$

folglich

$$f' = \sqrt{1 - f^2 - (\int \vartheta'\partial f)^2}$$

oder

$$\partial\tau = \frac{\partial f}{\sqrt{1 - f^2 - (\int \vartheta'\partial f)^2}} \tag{3}$$

oder

$$\partial\vartheta = \frac{\vartheta'\partial f}{\sqrt{1 - f^2 - (\int \vartheta'\partial f)^2}} \tag{4}$$

Dies identificirt mit (2) gibt zwischen s' und f die Relation:

$$\int \frac{\partial s'}{\sqrt{\pi^2 - s'^2}} = \int \frac{\partial\vartheta'\partial f}{\sqrt{1 - f^2 - (\int \vartheta'\partial f)^2}} \tag{5}$$

Was übrig bleibt, ist eine bekannte Aufgabe. Aus f, f', l findet man g, h, indem man setzt:

$$f = \cos\zeta; \quad g = \sin\zeta\cos\eta; \quad h = \sin\zeta\sin\eta \tag{6}$$

woraus durch Differentiation:

$$g' = \zeta'\cos\zeta\cos\eta - \eta'\sin\zeta\sin\eta$$
$$h' = \zeta'\cos\zeta\sin\eta + \eta'\sin\zeta\cos\eta$$

und in Verbindung mit (6):

$$l = \begin{vmatrix} gg' \\ hh' \end{vmatrix} = \eta' \sin^2 \zeta = \eta'(1-f^2)$$

mithin

$$\eta = \int \frac{l \partial \tau}{1-f^2} = -\int \frac{\partial \tau f \vartheta' \partial f}{1-f^2} \tag{7}$$

Da nun ausserdem $\partial s = s' \partial \tau$ bekannt ist, so hat man nach (6):

$$\left. \begin{aligned} x = \int f s' \partial \tau; \quad y &= \int s' \partial \tau \sqrt{1-f^2} \cos \eta \\ z &= \int s' \partial \tau \sqrt{1-f^2} \sin \eta \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

wo s' durch Gl. (5), $\partial \tau$ durch Gl. (3), η durch Gl. (7) als Function von f bestimmt ist.

Nach Einsetzung der Werte (3) von $\partial \tau$ und (6) von f erhält man die Formeln übereinstimmend mit den Resultaten von Molins.

Die Vergleichung beider Behandlungsweisen liefert eine neue Bestätigung der Regel, welche ich in meiner analytischen Curventheorie über das Verfahren bei der Lösung und Untersuchung curventheoretischer Probleme aufgestellt habe. Die Curventheorie gestattet eine Sonderung aller Linear- und Richtungsgrössen derart, dass die Fragen nach den letzteren unabhängig von erstern zur Entscheidung gebracht werden können. Die Lösung der so vereinfachten Aufgabe liegt öfters unmittelbar zutage, und die restirende Einführung der Lineargrösse ∂s bietet nachher gewöhnlich auch keine Schwierigkeit, andernfalls wird man meistens leicht finden, von welcher nicht integrabeln Gleichung die Lösung abhängt; während es bei Complication von Linear- und Richtungsgrössen als eine Sache glücklicher Speculation erscheint, wenn eine Lösung gefunden wird, und bis dies gelungen ist, die Lösbarkeit ungewiss bleibt.

In der Tat ist bei der von Molins gewählten ergänzenden Relation das Gelingen dadurch bedingt, dass sie frei von Lineargrössen ist. Diese Eigenschaft bleibt aber unbeachtet, wenn man, wie er es tut, statt $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$ schreibt $\frac{\varrho}{r}$ wo $\varrho = \frac{\partial s}{\partial \tau}$, $r = \frac{\partial s}{\partial \vartheta}$, also das Linienelement in eine Relation einführt, die nichts damit zu tun hat.

Knüpfen wir jetzt, mit Absehen von der Molins'schen Lösung, die orientirenden Gesichtspunkte an die Aufgabe selbst, so ist unmittelbar gegeben eine Differentialgleichung zwischen einer Richtungsgrösse ϑ und einer Lineargrösse s', welche sofort eine Trennung der Variabeln zulässt, so dass sie ϑ zur bekannten Function von s' macht. Ich bezeichne, um ein kurzes Wort dafür zu haben, mit „Richtungsgrössen" unter den Bestimmungsgrössen einer Curve diejenigen, welche

reine Zahlen sind, zum Unterschied von den „Lineargrössen", welche die Linieneinheit zum Factor haben.

Es handelt sich nun um die Wahl der zweiten Relation. Bedingung für dieselbe ist allein, dass sich aus den zwei in Beziehung gesetzten Variabeln die übrigen Bestimmungsstücke, namentlich aber f, g, h finden lassen. Der obigen Regel gemäss muss die Frage über die Richtungsgrössen entschieden sein, ehe die gegebene Relation in Anwendung kommt. Dazu ist die zweite Relation allein nur ausreichend, wenn sie keine Lineargrössen enthält.

Unter den genannten Richtungsgrössen, nämlich den 9 Richtungscosinus, τ, ϑ und deren Differentialquotienten gibt es zahlreiche Combinationen, welche der Bedingung entsprechen. Wir können daher noch weitere Zwecke mit der Auswahl verbinden. Zunächst ist es gewiss wünschenswert den Uebelstand zu vermeiden, welchen die Gl. (5) zeigt, dass sie nämlich auf beiden Seiten allgemeine Functionen enthält, sich daher nach keiner Seite auflösen lässt, so dass die Resultate nicht explicit aufgestellt werden können. Dies geschieht offenbar, indem wir ϑ zur einen, und zwar unabhängigen Variabeln nehmen. Die zweite Variable kann dann ein Richtungscosinus der Hauptnormale oder Binormale sein, während der der Tangente (desgl. die Grösse τ) unlösbare Differentialgleichungen herbeiführen würde. Die Rechnung mit der Binormale ist die einfachere; sei daher l willkürliche Function von ϑ. Dann hat man:

$$f' = -\frac{\partial l}{\partial \vartheta}; \quad f = \sqrt{1 - l^2 - \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2} \tag{9}$$

$$\partial \tau = \frac{\left(l + \frac{\partial^2 l}{\partial \vartheta^2}\right) \partial \vartheta}{\sqrt{1 - l^2 - \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2}} \tag{10}$$

$$\eta = \int \frac{l + \frac{\partial^2 l}{\partial \vartheta^2}}{l + \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2} \frac{l \partial \vartheta}{\sqrt{1 - l^2 - \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2}} \tag{11}$$

$$g = \cos \eta \sqrt{l^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2}; \quad h = \sin \eta \sqrt{l^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right)^2} \tag{12}$$

$$x = \int f s' \partial \tau; \quad y = \int g s' \partial \tau; \quad z = \int h s' \partial \tau \tag{13}$$

Setzt man nun $l = \varphi(\vartheta)$ und zur Vereinfachung

$$\pi = \frac{s'}{\sin \varkappa}$$

wo also $\varkappa$ gegebene Function von s ist, so wird

$$l = \varphi\left(\int \frac{\partial s' \operatorname{tg} \varkappa}{s'}\right); \quad \frac{\partial l}{\partial \vartheta} = \varphi'\left(\int \frac{\partial s' \operatorname{tg} \varkappa}{s'}\right); \quad \frac{\partial^2 l}{\partial \vartheta^2} = \varphi''\left(\int \frac{\partial s' \operatorname{tg} \varkappa}{s'}\right)$$

$$\partial \vartheta = \frac{\partial s' \operatorname{tg} \varkappa}{s'} \tag{14}$$

und man braucht nur erst in den Gleichungen (9) (10) (11) (12) die letzt genannten 4 Werte (14), überdies in (12) den Wert (11) von η und in (13) die Werte (9) (12) von f, g, h und den Wert (10) von $\partial \tau$ einzusetzen, um x, y, z explicit in s' ausgedrückt zu finden. Gleichzeitig ergibt sich der Bogen:

$$s = \int s' d\tau$$

In Betreff der geometrischen Bedeutung der vorkommenden Grössen mag erwähnt werden, dass der Mittelpunkt der osculirenden Kugel der Coincidenzpunkt der Krümmungsaxe ist. Demnach wird π durch die Verbindungsgerade der entsprechenden Punkte der Urcurve und der Einhüllenden ihrer Krümmungsaxe dargestellt. In dieser Lage ist π die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten in der Hauptnormale und Krümmungsaxe liegen, so dass der Krümmungsmittelpunkt den Scheitel des rechten Winkels bildet, und $\varkappa$ den Winkel zwischen der Verbindungsgeraden und der Krümmungsaxe bezeichnet.

XIII.

Bewegung eines senkrecht empor geworfenen Körpers.

Von

R. Hoppe.

Zu den Versuchen, welche die Axendrehung der Erde beweisen können, gehört offenbar auch der folgende. Ein senkrecht empor geworfener Körper muss (wenn keine zufälligen Störungen vorhanden sind) relativ zur Erde hinter deren Rotation zurückbleiben, also weiter westlich, und weiter nach dem Aequator zu den Erdboden wiedererreichen. Es wird erzählt, dass vor längerer Zeit einmal zur Beobachtung dieses Erfolges eine Kanone in verticaler Richtung abgeschlossen worden sei, dass man aber das Geschoss nicht wiedergesehen habe. Eine Berechnung des theoretischen Ergebnisses scheint nicht stattgefunden zu haben, obwol daraus erst zu ersehen gewesen wäre, welche (weit geringere) Schussgeschindigkeit für den Zweck am förderlichsten sein würde.

Im folgenden will ich die Berechnung unter den vereinfachenden Annahmen ausführen, dass die Erde eine homogene Kugel sei, und kein Luftwiderstand stattfinde. Auf diesen einfachen Fall sind wir nämlich beschränkt, wenn wir in geschlossenen Ausdrücken rechnen wollen, und können von diesen Ausdrücken als Hauptwerten ausgehen, um dann die Abplattung der Erde und den Luftwiderstand als Correction zu berücksichtigen.

Der Mittelpunkt der Erde, einer Kugel vom Radius c, sei Anfang der im Raume festen xyz, die Rotationsaxe Axe der x, in der

xy Ebene liege der Ausgangspunkt P des Wurfes in der Breite β; die z seien positiv nach Osten. Ferner sei g die Anziehung der Erde auf die Masseneinheit in ihrer Oberfläche und r der Radiusvector des geworfenen Körpers, α die Rotationsgeschwindigkeit. Dann ist dessen Bewegung bestimmt durch drei beliebige der 4 Gleichungen:

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2c^2 g}{r} - \varkappa^2 \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y\partial z - z\partial y}{\partial t} &= A \\ \frac{z\partial x - x\partial z}{\partial t} &= B \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\frac{x\partial y - y\partial x}{\partial t} = C \tag{3}$$

und durch die Anfangswerte, welche durch den Index 0 ausgedrückt seien.

Im Anfang ist

$$r_0 = c; \quad x_0 = c\sin\beta; \quad y_0 = c\cos\beta; \quad z_0 = 0$$

Die Anfangsgeschwindigkeit setzt sich zusammen aus der verticalen Wurfgeschwindigkeit p und der Geschwindigkeit von P in der z Richtung. Ihre Componenten sind also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_0 = p\sin\beta; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_0 = p\cos\beta; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 = \alpha c\cos\beta$$

Demnach wird Gl. (3):

$$x\partial y - y\partial x = 0$$

woraus:

$$\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} = \cot\beta \tag{4}$$

Hiermit werden die Gl. (2) identisch und geben:

$$\frac{y\partial z - z\partial y}{\partial t} = \alpha c^2 \cos^2\beta \tag{5}$$

Ist s ein Bogen der Bahn, so gibt Gl. (1):

$$\frac{\partial s^2}{\partial t^2} = \frac{2c^2 g}{r} - \varkappa^2 \tag{6}$$

das ist im Anfang:

$$p^2 + \alpha^2 c^2 \cos^2\beta = 2cg - \varkappa^2 \tag{7}$$

ferner die Quadratsumme der Gl. (2) (3):

$$r^2 \frac{\partial s^2 - \partial r^2}{\partial t^2} = \alpha^2 c^4 \cos^2\beta \tag{8}$$

und nach Elimination von ∂s^2 durch Gl. (6):

$$\frac{r^2 \partial r^2}{\partial t^2} = -\varkappa^2 r^2 + 2c^2 gr - \alpha^2 c^4 \cos^2\beta \tag{9}$$

Sei nun

$$\sin\gamma = \frac{\alpha\varkappa}{g} \cos\beta \tag{10}$$

$$r = \frac{c^2 g}{\varkappa^2}(1 + \cos\gamma\cos\psi) \tag{11}$$

dann werden die Gl. (9) (5):

$$\left(\frac{r\,\partial r}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{c^2 g \cos\gamma \sin\psi}{\varkappa}\right)^2 \tag{12}$$

$$\frac{y\,\partial z - z\,\partial y}{\partial t} = \frac{c^2 g \sin\gamma \cos\beta}{\varkappa} \tag{13}$$

Nehmen wir im Anfang, wo r mit t wächst, $\sin\psi$ positiv, so wird nach Gl. (12) (11):

$$\partial t = -\frac{r\,\partial\psi}{\varkappa} = -\frac{c^2 g}{\varkappa^3}(1 + \cos\gamma\cos\psi)\,\partial\psi \tag{14}$$

integrirt:

$$t = \frac{c^2 g}{\varkappa^3}\{\psi_0 - \psi + \cos\gamma(\sin\psi_0 - \sin\psi)\} \tag{15}$$

und zwar ist nach Gl. (11)

$$\cos\gamma\cos\psi_0 = \frac{\varkappa^2}{cg} - 1 \tag{16}$$

Jetzt wird nach Gl. (7)

$$p^2 = -\varkappa^2 + 2cg - \frac{c^2 g^2}{\varkappa^2}\sin^2\gamma = \left(\frac{cg}{\varkappa}\cos\gamma\right)^2 - \left(\varkappa - \frac{cg}{\varkappa}\right)^2$$

$$= \left(\frac{cg}{\varkappa}\cos\gamma\sin\psi_0\right)^2$$

daher

$$\cos\gamma\sin\psi_0 = \frac{p\varkappa}{cg} \tag{17}$$

woraus sich der kleine Winkel ψ_0 besser bestimmt als aus Gl. (16).

Ferner ist mit Zuziehung von Gl. (4)

$$\left(\frac{y}{\cos\beta}\right)^2 + z^2 = r^2 \tag{18}$$

Hiermit Gl. (13) dividirt und mit Gl. (14) multiplicirt gibt:

$$\partial \operatorname{arc tg} \frac{z\cos\beta}{y} = -\frac{c^2 g \sin\gamma}{\varkappa^2}\frac{\partial\psi}{r} \tag{19}$$

Setzt man

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} \tag{20}$$

so erhält man nach Gl. (11):

$$\frac{\partial\psi}{r} = \frac{\varkappa^2}{c^2 g}\frac{\partial\psi}{1+\cos\gamma\cos\psi} = \frac{2\varkappa^2\partial\varphi}{c^2 g\sin\gamma}$$

und die Integration von Gl. (19) gibt:

$$\operatorname{arc tg}\frac{z\cos\beta}{y} = 2(\varphi_0 - \varphi) \tag{21}$$

Verbindet man hiermit die Gl. (18) (4), so findet man leicht:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\beta\cos 2(\varphi_0-\varphi) \\ y &= r\cos\beta\cos 2(\varphi_0-\varphi) \\ z &= r\sin 2(\varphi_0-\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Sobald nun der geworfene Körper die Erdoberfläche wieder erreicht, wird $r = c$, daher nach Gl. (16), indem ψ beständig abnimmt, $\psi = -\psi_0$, und nach Gl. (20) $\varphi = -\varphi_0$, folglich

$$\left.\begin{aligned} x &= c\sin\beta\cos 4\varphi_0 \\ y &= c\cos\beta\cos 4\varphi_0 \\ z &= c\sin 4\varphi_0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Geht alsdann die Breite β über in $\beta-\beta'$, die Länge null in die westliche Länge λ, so ist gleichzeitig

$$\left.\begin{aligned} x &= c\sin(\beta-\beta') \\ y &= c\cos(\beta-\beta')\cos(\alpha t-\lambda) \\ z &= c\cos(\beta-\beta')\sin(\alpha t-\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

also

$$\operatorname{tg}(\alpha t-\lambda) = \frac{\operatorname{tg}4\varphi_0}{\cos\beta} \tag{25}$$

$$\sin(\beta-\beta') = \sin\beta\cos 4\varphi_0 \tag{26}$$

Nimmt man besonders grosse Werte, nämlich für p die von einer Kanone erzeugte Geschwindigkeit 500 Meter, und den Ausgangspunkt im Aequator, so werden die Grössen

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{\alpha^2 c \cos^2\beta}{g} = 0{,}0032283 \\ \nu &= \frac{p^2}{gc} = 0{,}0039988 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

in denen sich alle Grössen darstellen, noch immer klein genug zur schnellen Annäherung, wenn wir Reihen nach Potenzen derselben entwickeln.

Unmittelbar gibt Gl. (7):

$$\varkappa^2 = 2cg\left(1 - \frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \tag{28}$$

woraus nach Gl. (10):

$$\sin\gamma = \sqrt{2\mu}\left\{1 - \frac{\mu+\nu}{4} - \frac{(\mu+\nu)^2}{32} - \dots\right\}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\left(1 + \frac{\mu-\nu}{4} + \frac{3\mu^2 - 14\mu\nu - \nu^2}{32} + \dots\right)$$

nach Gl. (17)

$$\cos\gamma\sin\psi_0 = \sqrt{2\nu}\left\{1 - \frac{\mu+\nu}{4} - \frac{(\mu+\nu)^2}{32} - \dots\right\}$$

$$\sin\psi_0 = \sqrt{2\nu}\left(1 + \frac{3\mu-\nu}{4} + \frac{23\mu^2 - 26\mu\nu - \nu^2}{32} + \dots\right)$$

$$\psi_0 = \sqrt{2\nu}\left(1 + \frac{3\mu}{4} + \frac{\nu}{12} + \frac{23\mu^2}{32} - \frac{\mu\nu}{16} + \frac{3\nu^2}{160} + \dots\right)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2} = \sqrt{\frac{\nu}{2}}\left(1 + \frac{3\mu+\nu}{4} + \frac{23\mu^2 + 10\mu\nu + 3\nu^2}{32} + \dots\right)$$

$$\psi_0 + \cos\gamma\sin\psi_0 = 2\sqrt{2\nu}\left(1 + \frac{\mu}{4} - \frac{\nu}{12} + \frac{11\mu^2}{32} - \frac{\mu\nu}{16} - \frac{\nu^2}{160} - \dots\right)$$

dann nach Gl. (15), wo $\psi = -\psi_0$ zu setzen, mit Berücksichtigung, dass

$$\varkappa^{-3} = (2gc)^{-\frac{3}{2}}\left\{1 + 3\,\frac{\mu+\nu}{4} + \frac{15(\mu+\nu)}{32} + \dots\right\}$$

ist:

$$\alpha t = \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{\cos\beta}\left(1+\mu+\frac{2\nu}{3}+\mu^2+\mu\nu+\frac{2\nu^2}{5}+\dots\right) \tag{29}$$

und nach Gl. (20):

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu\nu}\left(1+\mu+\mu^2-\frac{\mu\nu}{4}+\dots\right)$$

$$\operatorname{tg}4\varphi_0 = 2\sqrt{\mu\nu}(1+\mu+\mu^2+\mu\nu+\dots)$$

woraus nach Gl. (25):

$$\alpha t - \lambda = \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{\cos\beta}\left(1+\mu+\mu^2+\mu\nu-\frac{4\mu\nu}{3\cos^2\beta}+\dots\right)$$

Dies subtrahirt von (29) gibt:

$$\lambda = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{\mu\nu^3}}{\cos\beta}\left(1+\frac{2\mu}{\cos^2\beta}+\frac{3\nu}{5}+\dots\right)$$

Aus Gl. (24) findet man:

$$\beta' = 2\mu\nu\left(1+2\mu+3\mu^2-\frac{\mu\nu}{\cos^2\beta}+\dots\right)\operatorname{tg}\beta$$

das ist nach Substitution der Werte (27):

$$\lambda = \frac{4p^3\alpha}{3g^2c}\left(1+\frac{2\alpha^2c}{g}+\frac{3p^2}{4gc}+\dots\right)$$

$$\beta' = \frac{p^2\alpha^2\sin 2\beta}{g^2}\left(1+\frac{2\alpha^2c\cos^2\beta}{g}+\dots\right).$$

Der Hauptwert von β' ist in der Breite 45° am grössten. Nehmen wir diese durchgängig an, so dass

$$\log c = 6{,}80392;\quad \log g = 0{,}99149;\quad \log\alpha = 5{,}86285-10$$

und reduciren λ und β' durch Multiplication mit

$$\frac{10000\,000}{\mathrm{R}}$$

auf Meter, so kommt:

$$\lambda = 0{,}000\;\;001\;\;0180p^3(1+0{,}000\;000\;011\;931p^2)$$
$$\beta' = 0{,}000\;\;353\;\;27\,p^2$$

das ist im obigen Beispiel $p = 500$:

$$\lambda = 127{,}63;\quad \beta' = 88{,}32;\quad \sqrt{\lambda^2+\beta'^2} = 155{,}44$$

In dieser Entfernung = 155 Meter hätte das Geschoss noch gesehen werden können, doch konnte es auch leicht der Beachtung entgehen, wenn die Richtung nicht vorher berechnet war. Aus λ und β' ergibt sich eine Richtung fast 35° von West nach Süd.

Die umgekehrte Aufgabe, aus der Entfernung

$$\delta = \sqrt{\lambda^2 + \beta'^2}$$

die Anfangsgeschwindigkeit zu berechnen, lässt sich nicht direct durch Reihenentwickelung lösen; doch kann man, da p Function von δ ist, eine Tafel darüber aufstellen. Man findet, wenn $\frac{\beta'}{\lambda} = \operatorname{tg} \zeta$:

δ	p	ζ
0,001	1,686	90°
0,01	5,320	89°,12
0,1	16,815	87°,23
1	52,90	81°,33
10	160,30	65°,21
100	423,36	39°,29
1000	971,17	$19_0{}'$,63

Es liegt nahe, auch für beliebige Elevation die Abweichung der Geschosse vom Zielpunkte infolge der Erdrotation zu berechnen. Unter diesem Gesichtspunkt hat Biehringer in Schlömilch's Zeitschrift Bd. XXVIII. S. 157. die Frage behandelt. In beiden Fällen ist die absolute Bewegung geometrisch bekannt als Ellipse, um den Erdmittelpunkt als Brennpunkt beschrieben, also kein Problem zu lösen.

XIV.

Die Cono-Cunei.

Ein Beitrag zur Lehre von den geradlinigen Flächen.

Von

Dr. **Carl Pabst.**

I. Abschnitt.

Einleitung.

§ 1.

In den „Opera mathematica“ von Joh. Wallis findet sich eine Abhandlung über einen Körper, welchen der Verfasser Cono-Cuneus nennt und den er, wie folgt, definirt: Super plana Basi, quae Circuli Quadrans erat (ut in Quadrantali Cono, vel Cylindro) erectum insistebat Solidum; cujus Altitudo (pro arbitrio sumenda) erat dupla Radii Quadrantis istius Circularis: Et a singulis Peripheriae Quadrantalis punctis, ductae ad verticem rectae, coibant, non in Puncto (ut in Apice Coni,) nec in Quadrante parallelo (ut in Quadrantali Cylindro,) sed in Linea recta, ut in acie Cunei. Quamobrem ei nomen feci Cono-Cunei; ut qui in Base Conum repraesentet; in Vertice, Cuneum[1]). Man kann diesen Körper gleichsam als eine Verallgemeinerung des Kegels ansehen, und sich denselben so aus diesem hervorgehen denken, dass die Spitze des Kegels in eine Gerade ausgezogen wird, bis alle erzeugenden Geraden einer gegebenen Ebene parallel sind.

Dieser Körper hat später die Veranlassung zu einer Gruppe von geradlinigen Flächen gegeben, welche die Einen Keilflächen, die

---

1) cf. J. Wallis: Opera mathematica. vol. II. pag. 681.

Anderen Conoidflächen nennen, und deren Entstehungsweise folgende ist: Gegeben ist eine Ebene, die Director-Ebene, eine auf dieser Ebene senkrecht stehende Gerade und eine ebene Curve, deren Ebene auf der Directorebene senkrecht steht. Eine gerade Linie bewegt sich längs dieser Curve so hin, dass sie stets der Directorebene parallel bleibt und durch die gegebene feste Gerade geht.

Unsere Aufgabe ist es, aus dieser Gruppe diejenigen Flächen zu untersuchen, deren Leitlinie ein Kegelschnitt ist, unter der näheren Voraussetzung, dass die singuläre Kante, durch welche alle erzeugenden Geraden gehen, einer Axe des Leitkegelschnitts parallel ist. Wir wollen die Flächen in Folgendem als C o n o - C u n e i bezeichnen, und zwar je nachdem der Leitkegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, als e l l i p t i s c h e n, p a r a b o l i s c h e n und h y p e r b o l i s c h e n C o n o - C u n e u s.

Wie man nun gerade und schiefe Kegel unterscheidet, so können wir auch einen Unterschied zwischen geraden und schiefen Cono-Cuneis machen. Unter den g e r a d e n C o n o - C u n e i s verstehen wir dabei diejenigen, bei denen die Ebene, welche durch die singuläre Kante und durch die entsprechende Axe des Leitkegelschnittes geht, auf der Ebene des Leitkegelschnitts senkrecht steht. Ist dies nicht der Fall, sondern bilden diese beiden Ebenen einen schiefen Winkel mit einander, so nennen wir diese Flächen s c h i e f e C o n o - C u n e i. Von den letzteren wollen wir diejenigen etwas näher untersuchen, bei denen die Projection der singulären Kante auf die Leitkegelschnittebene mit einer Scheiteltangente des Leitkegelschnitts zusammenfällt und diese Flächen wollen wir als S c h e i t e l - C o n o - C u n e i bezeichnen.

§ 2.

Jeder Kegelschnitt hat im Allgemeinen zwei aufeinander senkrecht stehende Axen. Es würden sich demnach 6 verschiedene gerade Cono-Cunei ergeben. Von diesen sind indessen, wie sich später zeigen wird, zunächst die beiden elliptischen identisch. Anders verhält es sich, wenn der Leitkegelschnitt eine Hyperbel ist. Wir wollen hierbei diejenige Fläche, welche entsteht, wenn die Projection der singulären Kante auf die Leithyperbelebene mit der reellen Axe der Leithyperbel zusammenfällt, den g e t e i l t e n, und diejenige, bei welcher die Projection der singulären Kante in die imaginäre Axe der Leithyperbel fällt, den e i n f a c h e n h y p e r b o l i s c h e n C o n o - C u n e u s nennen.

Was schliesslich die Parabel betrifft, so hat diese nur eine im Endlichen liegende Axe; die andere ist ins Unendliche gerückt. Be-

achten wir zunächst, wie sich die Sache im letzteren Falle gestaltet, so folgt aus der Definition der geraden Cono-Cunei, dass die singuläre Kante der betreffenden Fläche ebenfalls im Unendlichen liegen muss. Um diesen Fall näher zu untersuchen, denken wir uns eine im Endlichen liegende, der Leitparabelebene parallele Gerade, deren Projection auf die Leitparabelebene auf der im Endlichen liegenden Axe der Parabel senkrecht steht, als singuläre Kante. Entfernt sich diese Gerade vom Scheitel der Parabel parallel der Parabelebene, so wird der Unterschied der Winkel, welche die einzelnen Erzeugenden mit der Parabelebene bilden, allmählich kleiner. Bei unendlicher Entfernung der singulären Kante von dem Parabelscheitel sind demnach die Erzeugenden einander parallel. Da nun das Verhältniss des Abstandes der singulären Kante von der Leitparabelebene zur Entfernung der zweiten Axe der Parabel von ihrem Scheitel gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels ist, welchen die Erzeugenden mit der Leitparabelebene bilden, so fallen die Erzeugenden in die Parabelebene, wenn der Abstand der singulären Kante von dieser Ebene eine endliche Grösse ist; denn alsdann ist das betrachtete Verhältniss unendlich klein. In den anderen Fällen erhält man einen parabolischen Cylinder, und zwar einen geraden oder einen schiefen, je nachdem das in Rede stehende Verhältniss unendlich gross oder eine endliche Grösse ist.

Hieraus folgt, dass sich keine neue Fläche ergiebt, wenn die singuläre Kante senkrecht über der im Unendlichen liegenden Axe der Leitparabel liegt. Einen wirklichen parabolischen Cono-Cuneus erhalten wir nur, wenn die Projection der singulären Kante auf die Leitparabelebene mit der im Endlichen liegenden Axe der Parabel zusammenfällt. Wir können diese Fläche daher kurz als den **geraden parabolischen Cono-Cuneus** bezeichnen.

§ 3.

Analoge Betrachtungen wie die obigen lassen sich über die Scheitel-Cono-Cunei anstellen. Wir haben auch hierbei im Allgemeinen 6 Flächen, deren Zahl sich aber ebenso wie bei den geraden Cono-Cuneis auf 4 reducirt. Denn erstlich giebt es nur einen **elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus**. Was dann die hyperbolischen betrifft, so wollen wir denjenigen, dessen singuläre Kante der imaginären Axe der Leithyperbel parallel ist, wobei also die Projection der singulären Kante auf die Leithyperbelebene mit der Tangente in einem reellen Scheitel der Hyperbel zusammenfällt, als den **einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus** bezeichnen. Die beiden anderen Scheitel der Hyperbel sind imaginär. Wir wollen

indessen diejenige Fläche, bei welcher die Projection der singulären Kante auf die Leithyperbelebene in einem Endpunkte der imaginären Axe auf dieser Axe senkrecht steht, den **geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus** nennen.

Für die parabolischen Scheitel-Cono-Cunei ergeben sich ähnliche Beziehungen wie für die geraden. Man erhält hierbei nur einen eigentlichen Cono-Cuneus, da es nur eine im Endlichen liegende Scheiteltangente der Parabel giebt. Wir können diesen mithin kurz den **parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus** nennen. Der andere wird ebenso wie der betreffende gerade im Allgemeinen ein parabolischer Cylinder, mit dem einzigen Unterschiede, dass hier die Projectionen der Erzeugenden auf die Leitparabelebene auf der im Endlichen liegenden Axe der Parabel senkrecht stehen, während sie bei den anderen dieser Parabelaxe parallel waren.

Bemerkt sei schliesslich noch, dass die Kegelschnitte in speciellen Fällen zu geraden Linien degeneriren können. Alsdann erhält man im Allgemeinen die aus der analytischen Geometrie bekannten hyperbolischen Paraboloide.

Wir haben demnach folgende 8 Flächen zu betrachten:

1) den geraden elliptischen Cono-Cuneus
2) den geteilten } geraden hyperbolischen Cono-Cuneus
3) den einfachen } geraden hyperbolischen Cono-Cuneus
4) den geraden parabolischen Cono-Cuneus
5) den elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus
6) den einfachen } hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus
7) den geteilten } hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus
8) den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus.

§ 4.

Bevor wir auf die Betrachtung der definirten Cono-Cunei eingehen, wollen wir allgemein die Gleichung der Flächen ableiten, deren Leitlinie durch die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \eta = f(\xi) \\ \zeta = c \end{cases}$$

dargestellt wird. Die Erzeugenden sollen der YZ-Ebene parallel sein und durch die X-Axe gehen. Dieselben müssen daher den Gleichungen genügen:

(2) $$\begin{cases} x = v \\ y = u \cdot z \end{cases}$$

hierbei sind u und v beliebige Grössen, welche nur der Bedingung unterworfen sind, dass die Erzeugenden die Leitlinie (1) schneiden, welche Bedingung darin besteht, dass die Coordinaten x, y, z den Gleichungen (1) genügen. Für dieselbe ergiebt sich demnach:

(3) $$c \cdot u = f(v)$$

Eliminirt man nun u und v aus den Gleichungen (2) und (3), so erhält man als Gleichung der gesuchten geradlinigen Fläche:

(4) $$cy = z \cdot f(x)$$

Diese Gleichung lässt erkennen, dass für den Fall, wo die Leitlinie der Gleichung:

(5) $$y^n = f(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$$

genügt, wobei A_0, $A_1, \ldots A_m$ Constante bedeuten, die Fläche vom $(m+n)$ten Grade ist. Hat die Leitlinie speciell die Gleichung:

(6) $$y = f(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

so ist die vorgelegte Fläche vom $(m+1)$ten Grade.

§ 5.

An die Gleichung (4) wollen wir einige allgemeine Bemerkungen knüpfen. Schneiden wir zu diesem Zwecke die vorgelegte Fläche (4) durch die zur XY-Ebene parallele Ebene:

$$z = h,$$

so ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve dieser Ebene mit der Fläche (4) auf die XY-Ebene:

(7) $$y = \frac{h}{c} f(x)$$

Aus der Vergleichung von (1) und (7) resultirt:

Die zur XY-Ebene parallelen Ebenen schneiden aus der vorgelegten Fläche (4) Curven, deren Ordinaten für dasselbe x proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der XY-Ebene wachsen. Für $z = h = 0$ degenerirt die ausgeschnittene Curve zur X-Achse, für $z = h = \infty$ besteht dieselbe aus so vielen zur Y-Achse parallelen Geraden, in wie viel Punkten die Leitlinie der Fläche (4) die XZ-Ebene schneidet.

Ferner erhält man für die Projection der Durchschnittscurve der Ebene

$$y = k$$

mit der vorgelegten Fläche auf die XZ-Ebene:

(8) $$ck = z.f(x)$$

Daraus geht hervor, dass jede zur XZ-Ebene parallele Ebene die vorgelegte Fläche (4) im Allgemeinen in einer Curve schneidet, deren Grad gleich dem Grade der Fläche ist.

Um diese Curve genauer zu untersuchen, bilden wir:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{ck f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{ck\{f(x).f''(x) - [f'(x)]^2\}}{[f(x)]^3}$$

Hieraus ergeben sich die Relationen:

Die Tangenten in denjenigen Punkten der Durchschnittscurve (8), welche Punkten der Leitlinie der betreffenden Fläche entsprechen, in denen die Tangenten an die Leitlinie der XZ-Ebene parallel ist, sind der X-Axe parallel.

Die Durchschnittscurve (8) nähert sich asymptotisch den auf der X-Axe senkrecht stehenden Ebenen, welche durch die Durchschnittspunkte der Leitlinie mit der XZ-Ebene gehen.

Ist $k > 0$, so ist die Durchschnittscurve convex oder concav nach der X-Axe hin, je nachdem:

$$f(x).f''(x) - [f'(x)]^2 \lesseqgtr 0$$

ist. Wendepunkte kann diese Curve nur besitzen, wenn die Gleichung:

$$f(x).f''(x) - [f'(x)]^2 = 0$$

reelle Werte für x liefert.

Schliesslich folgt für die Projection der Durchschnittscurve der Ebene

$$x = l$$

mit der Fläche (4) auf die YZ-Ebene:

(9) $$cy = z.f(l)$$

d. h. die zur Directorebene parallelen Ebenen schneiden aus der vorgelegten Fläche die Erzeugenden derselben aus.

§ 6.

Gehen wir nun zur Tangentialebene im Punkte xyz der Fläche (4) über, so erhalten wir als Gleichung derselben, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$zf'(x)(\xi - x) - c(\eta - y) + f(x)(\zeta - z) = 0$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (4):

$$zf'(x).\xi - c\eta + f(x).\zeta - xzf'(x) = 0 \tag{10}$$

Für $z = 0$ geht dieselbe über in:

$$c\eta - f(x).\zeta = 0$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich für $f'(x) = 0$. Daraus fliesst der Satz: Die Tangentialebenen in denjenigen Punkten der Fläche (4), welche auf der singulären Kante liegen, und in denjenigen, welche Punkten der Leitlinie entsprechen, in denen die Tangente an die Leitlinie der XZ-Ebene parallel ist, gehen durch die singuläre Kante.

Ausserdem resultirt hieraus, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene im Allgemeinen eine Tangentialebene der vorgelegten Fläche ist.

Setzt man $f(x) = 0$, so erhält man aus der Gleichung (10):

$$zf'(x).\xi - c\eta - xzf'(x) = 0$$

Die Tangentialebenen in den Durchschnittspunkten der Fläche (4) mit der XZ-Ebene stehen demnach auf der XY-Ebene senkrecht. Ist zugleich $f'(x) = 0$, so resultirt: $\eta = 0$. D. h. die XZ-Ebene berührt die vorgelegte geradlinige Fläche (4) in allen Punkten derjenigen Erzeugenden, welche durch die Durchschnittspunkte der Leitlinie mit der XZ-Ebene gehen, in denen die Leitlinie die XZ-Ebene berührt.

Ist dagegen zugleich $f(x) = 0$ und $f'(x) = \infty$, so geht die Gleichung der Tangentialebene über in:

$$\xi - x = 0$$

Dasselbe Resultat erhalten wir aus der Gleichung (10) für $f'(x) = \infty$, gleichgültig welchen Wert $f(x)$ annimmt, vorausgesetzt dass es nicht selbst unendlich gross wird. Daraus fliesst der Satz: die Tangentialebenen in denjenigen Punkten der Fläche (4), welche Punkten ihrer Leitlinie entsprechen, in denen die Tangente an die Leitlinie auf der XZ-Ebene senkrecht steht, sind der Directorebene parallel.

Betrachten wir noch die Durchschnittscurve der Fläche (4) mit der Tangentialebene (10), so ergiebt sich für die Projection derselben auf die XZ-Ebene:

$$zf'(x)(\xi - x) - [f(\xi) - f(x)]\zeta = 0 \tag{11}$$

Angenommen, $f(x)$ genüge der Gleichung (6), dann ist $f(\xi) - f(x)$ durch $(\xi - x)$ ohne Rest teilbar. Die Gleichung (11) zerfällt demnach in die beiden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\xi - x = 0 \\ &zf'(x) - \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}\zeta = 0 \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Daraus folgt, dass die Tangentialebene aus der Fläche (4) $(m+1)$ten Grades im Allgemeinen die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende der Fläche und eine Curve $m$ten Grades ausschneidet. Aendert sich z, während x constant bleibt, so ändert sich damit die Curve $m$ten Grades; d. h. gleitet der Berührungspunkt der Tangentialebene auf der durch ihn gehenden erzeugenden Geraden der Fläche fort, so ändert sich die Tangentialebene. Daraus resultirt, dass die Tangentialebene die vorgelegte geradlinige Fläche im Allgemeinen nicht längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben berührt.

Ausnahmen von diesem Satze finden für $f'(x) = 0$ und für $f'(x) = \infty$ statt; d. h. die Tangentialebene in denjenigen Punkten der Fläche (4), welche Punkten ihrer Leitlinie entsprechen, in denen die Tangente an die Leitlinie der XZ-Ebene parallel ist oder auf ihr senkrecht steht, berührt die Fläche längs der ganzen durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben.

Ist $f'(x) = 0$, so schneidet die Tangentialebene aus der Fläche (4) ausser der erzeugenden Geraden noch die X-Axe aus.

Hat die Leitlinie der vorgelegten Fläche die Gleichung (5), so ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve der Tangentialebene mit der Fläche auf die XZ-Ebene:

(13)

$$\left\{\begin{aligned} &\xi - x = 0 \\ &n^n [f(x)]^{n-1} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \zeta^n - z^n [f'(x)]^n (\xi - x)^{n-1} \\ &- \binom{n}{1} n z^{n-1} f(x) [f'(x)]^{n-1} (\xi - x)^{n-2} . \zeta - \dots \\ &\qquad \dots - \binom{n}{1} n^{n-1} z f'(x) [f(x)]^{n-1} \zeta^{n-1} = 0 \end{aligned}\right.$$

Auch für diesen Fall gelten mithin die eben abgeleiteten Sätze.

§ 7.

Analoge Erwägungen wie im vorigen § lassen sich für die Normale im Punkte xyz der vorgelegten geradlinigen Fläche (4) durchführen. Die Gleichungen derselben sind, wenn x_1, y_1, z_1 die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$\text{(14)} \qquad \frac{x_1 - x}{-zf'(x)} = \frac{y_1 - y}{c} = \frac{z_1 - z}{-f(x)}$$

Eliminiren wir y_1 und z_1 aus diesen Gleichungen und der Gleichung: $cy_1 = z_1 f(x_1)$, so erhalten wir für die Durchschnittspunkte der Normalen mit der Fläche (4):

$$[f(x).f(x_1) + c^2](x_1 - x) + z^2 f'(x)[f(x_1) - f(x)] = 0$$

Daraus folgt: Wenn $f(x)$ der Gleichung (6) genügt, so durchsticht die Normale die Fläche (4) $(m+1)$ten Grades im Allgemeinen in $(m+1)$ Punkten.

Nach dem analogen Verfahren wir bei der Tangentialebene ergeben sich folgende Sätze:

1) Die Normale in den Durchschnittspunkten der Fläche (4) mit der XZ-Ebene ist der XY-Ebene parallel und durchsticht die Fläche im Allgemeinen in m Punkten. Ist die Tangentialebene in diesen Punkten der Directorebene parallel, so giebt es m Durchschnittspunkte der Normale mit der Fläche, welche den m Durchschnittspunkten der Leitlinie mit der XZ-Ebene entsprechen.

2) Die Normale in denjenigen Punkten der Fläche (4), welche Punkten ihrer Leitlinie entsprechen, in denen die Tangente an die Leitlinie der XZ-Ebene parallel ist, ist der Directorebene parallel.

3) Die Normale in denjenigen Punkten der Fläche (4), welche Punkten ihrer Leitlinie entsprechen, in denen die Tangente an die Leitlinie auf der XZ-Ebene senkrecht steht, ist der singulären Kante parallel und trifft die Fläche im Allgemeinen in m Punkten.

Die analogen Resultate ergeben sich, wenn die Leitlinie der vorgelegten geradlinigen Fläche (4) der Gleichung (5) genügt.

§ 8.

Eine andere Eigenschaft der vorgelegten Fläche (4) ergiebt sich, wie folgt. Schneiden wir diese Fläche durch die zur Directorebene parallelen Ebenen $x = x_1$, $x = x_2$ und durch die zur XY-Ebene parallele Ebene $z = z_0$, so erhalten wir für das Volumen V, welches

von diesen Ebenen, der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teil der Fläche begrenzt wird:

$$V = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \int_{z=0}^{z=z_0} y\,dx\,dz = \frac{1}{c} \int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x)\,.\,dx \int_{z=0}^{z=z_0} z dz$$

$$V = \frac{z_0^2}{2c} \int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x)\,.\,dx$$

Wir wissen aber, dass die zur XY-Ebene parallele Ebene $z = z_0$ die vorgelegte geradlinige Fläche in der Curve: $cy = z_0 f(x)$ schneidet. Projiciren wir diese Curve auf die XY-Ebene, so resultirt für das Volumen V' zwischen den Ebenen $x = x_1$, $x = x_2$, $z = 0$, $z = z_0$ der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teil der Cylinderfläche:

$$V' = z_0 \int_{x=x_1}^{x=x_2} y dx = \frac{z_0^2}{c} \int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x)\,.\,dx$$

Aus den beiden erhaltenen Resultaten folgt:

$$V : V' = 1 : 2 \tag{15}$$

Die vorgelegte Fläche hat demnach die Eigenschaft, den zugehörigen Cylinder zu halbiren.

Bisher haben wir eine bestimmte Fläche angenommen. Wir wollen nun die Flächenschaar in Betracht ziehen, welche durch die Gleichung:

$$F \equiv cy - z\,.\,\varphi(x, \alpha) = 0$$

dargestellt wird, wenn α ein variabler Parameter ist. Für die einhüllende Fläche dieser Flächenschaar ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$F = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -z \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$$

Daraus geht hervor, dass die einhüllende Fläche der vorgelegten Flächenschaar eine geradlinige Fläche derselben Art wie die Fläche (4) ist; dass nur dann eine wirkliche einhüllende Fläche dieser Schaar existirt, wenn die Leitlinien der einzelnen Flächen dieser Schaar eine Enveloppe besitzen. Diese Enveloppe ist die Leitlinie der einhüllenden Fläche der vorgelegten Flächenschaar.

II. Abschnitt.

Der gerade elliptische Cono-Cuneus.

§ 9.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen gehen wir zu unserer eigentlichen Aufgabe über, indem wir zunächst den geraden elliptischen Cono-Cuneus in Betracht ziehen. Hierbei nehmen wir ein rechtwinkliges XYZ-Coordinatensystem an, dessen X-Axe die singuläre Kante und dessen YZ-Ebene die Directorebene sein mag. Sind nun die Gleichungen der Leitellipse:

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$$

so ergiebt sich als Gleichung des geraden elliptischen Cono-Cuneus:

$$c^2y^2=\frac{b^2}{a^2}z^2(a^2-x^2)$$

oder, wenn wir c^2 für $\frac{a^2c^2}{b^2}$ setzen:

$$(17) \qquad c^2y^2=z^2(a^2-x^2)$$

Aus dieser Gleichung geht zunächst hervor, dass die vorgelegte Fläche vom vierten Grade ist. Ferner folgt daraus, dass der absolute Wert von x nicht grösser als a sein darf, weil sonst y oder z imaginär wird. Die Fläche (17) erstreckt sich demnach von $x=-a$ bis $x=+a$.

Für die Projection der Durchschnittscurve dieser Fläche mit der Ebene $z=h$ auf die XY-Ebene ergiebt sich:

$$(18) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{c^2y^2}{a^2h^2}=1$$

Diese Durchschnittscurve ist daher im Allgemeinen eine Ellipse mit den Halbaxen a und $\frac{ah}{c}$, deren Mittelpunkt auf der Z-Axe liegt, und deren Axen bezüglich in die Ebenen der xz und der yz fallen. Für $h=0$ geht die ausgeschnittene Ellipse in die singuläre Kante, für $h=c$ in einen Kreis mit dem Radius a über. Die Axen in der XZ-Ebene sind für alle diese ausgeschnittenen Ellipsen gleich $2a$, die Axen in der YZ-Ebene dagegen wachsen proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante.

Der elliptische Cono-Cuneus kann daher auch so entstanden gedacht werden, dass sich eine Ellipse, deren eine Axe constant, deren andere variabel ist, parallel mit sich selbst bewegt, während ihr Mittelpunkt eine Gerade senkrecht auf der Ellipsenebene beschreibt, und die variable Axe proportional dem Abstande der Ellipsenebene von einer gegebenen Ebene wächst.

Zunächst folgt hieraus, dass der Cono-Cuneus von Wallis mit einem Kreise als Leitlinie identisch mit unserem geraden elliptischen Cono-Cuneus ist, denn auch hierbei wird ein Kreis und durch eine dem Kreise parallele Ebene im Allgemeinen eine Ellipse ausgeschnitten. Ferner ist ersichtlich, dass es gleichgültig ist, welcher von beiden Axen der Leitellipse die singuläre Kante parallel geht; denn ist $a > b$, so ist $h = \frac{a}{b} \cdot c > c$, wenn h und c die Entfernungen bezüglich des Kreisschnittes und der Leitellipse von der singulären Kante bezeichnen; d. h. ist die singuläre Kante der grösseren Axe der Leitellipse parallel, so liegt der Kreis ausserhalb der Leitellipse und der singulären Kante. Ist dagegen $a < b$, so ist $h = \frac{a}{b} c < c$, d. h. ist die singuläre Kante der kleineren Axe der Leitellipse parallel, so liegt der Kreis zwischen dieser Kante und der Leitellipse. Im Wesentlichen wird dadurch nichts geändert, womit wir die Behauptung in der Einleitung bewiesen haben.

Ferner erhält man für die Projection der Durchschnittscurve der Ebene $y = k$ mit dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) auf die XZ-Ebene:

$$z^2(a^2 - x^2) = c^2 k^2 \tag{19}$$

d. i. im Allgemeinen eine Curve vierten Grades, welche die Z-Axe in den Punkten $x = 0$, $z = \pm \frac{ck}{a}$ schneidet. Sie ist in allen ihren Punkten convex nach der X-Axe hin und besteht aus zwei ins Unendliche sich erstreckenden Geraden, welche symmetrisch zu den Axen der x und der z liegen und sich asymptotisch den beiden Geraden $x = \pm a$ nähern. In ihren Durchschnittspunkten mit der Z-Axe sind die Tangenten an die Curve der X-Axe parallel. Für $k = 0$ geht diese Curve über in die X-Axe von $-a$ bis $+a$ und in die beiden Geraden $x = \pm a$.

Schneiden wir schliesslich die vorgelegte geradlinige Fläche (17) durch die Ebene $x = l$, so ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve dieser Ebene mit der Fläche auf die YZ-Ebene:

(20) $$z = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 - e^2}} y$$

Daraus folgt, dass jede zur YZ-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der Directorebene absolute kleiner als a ist, den elliptischen Cono-Cuneus (17) in zwei Geraden schneidet, welche durch die X-Axe gehen und mit der XZ-Ebene gleiche Winkel bilden. Für $l = \pm a$ fallen diese beiden Geraden in eine einzige zusammen, welche in der XZ-Ebene liegt. Alle diese ausgeschnittenen Geraden sind die Erzeugenden des geraden elliptischen Cono-Cuneus.

§ 10.

Verweilen wir noch etwas bei den im vorigen § erhaltenen Resultaten. Aus der Gleichung (18) geht hervor, dass durch Ebenen parallel der XY-Ebene zwischen $h = -c$ und $h = +c$ aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) Ellipsen ausgeschnitten werden, deren grosse Axen in der XZ-Ebene, deren kleine Axen in der YZ-Ebene liegen. Diejenigen Ebenen parallel der XY-Ebene dagegen zwischen $h = -\infty$ bis $h = -c$ und zwischen $h = +c$ bis $h = +\infty$, schneiden aus der vorgelegten Fläche Ellipsen aus, deren grosse Axen in der YZ-Ebene und deren kleine Axen in der XZ-Ebene liegen.

Beachten wir die Brennpunkte dieser Ellipsen, so wissen wir, dass diejenigen der ersteren in der XZ-Ebene liegen. Für den Abstand eines solchen Brennpunktes von der Z-Axe ergiebt sich: $\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}}$. Man erhält demnach als Gleichung des geomotrischen Ortes dieser Brennpunkte:

(21) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

d. h. in Worten: Der geometrische Ort der Brennpunkte aller Ellipsen welche durch Ebenen parallel der XY-Ebene zwischen $z = -c$ und $z = +c$ aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) ausgeschnitten werden, ist eine Ellipse in der XZ-Ebene mit den Halbaxen a und c, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist, und deren Axen bezüglich in die Axen der x und der z fallen.

Ist $c < a$, so liegt die grosse Axe dieser Ellipse in der X-Axe, die kleine in der Z-Axe; ist $c = a$, so ist der geometrische Ort ein Kreis mit dem Radius a, und ist $c > a$, so liegt die grosse Axe des geometrischen Ortes in der Z-Axe, die kleine in der X-Axe.

Durch Vergleichung von (18) und (21) ergiebt sich, wenn man

$$\frac{ah}{c} = c$$

setzt:

$$h = \frac{c^2}{a}.$$

Daraus folgt: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu a und c ist, schneidet aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) eine Ellipse aus, welche gleich dem geometrischen Ort der Brennpunkte aller Ellipsen ist, die durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus der vorgelegten Fläche ausgeschnitten werden.

Ferner folgt aus dem Obigen, dass die Brennpunkte derjenigen Ellipsen des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17), deren Abstand von der singulären Kante absolute grösser als c ist, in der YZ-Ebene liegen. Als Gleichung des geometrischen Ortes dieser Brennpunkte erhält man:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{22}$$

Mithin resultirt der Satz: Der geometrische Ort der Brennpunkte derjenigen Ellipsen des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17), deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich oder grösser als c ist, ist eine Hyperbel in der YZ-Ebene mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren reelle Axe $2c$ in der Z-Axe, und deren imaginäre Axe $2a$ in der Y-Axe liegt. Ist $c = a$, so wird dieser geometrische Ort eine gleichseitige Hyperbel mit dem Parameter $2a$.

Betrachtet man ferner die beiden Ellipsen des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) in den Entfernungen h_1 und h_2 von der singulären Kante, so ergiebt sich, wenn $h_1 < c$ ist, für das Verhältniss der Axen der zu h_1 zugehörigen Ellipse: $\frac{c}{h_1}$; andererseits erhält man, wenn $h_2 > c$ ist, als Axenverhältniss der zu h_2 zugehörigen Ellipse $\frac{h_2}{c}$. Sollen diese beiden Verhältnisse einander gleich sein, so folgt:

$$h_1 . h_2 = c^2. \tag{23}$$

Daraus fliesst der Satz: Das Product der Entfernungen der beiden Ellipsen des geraden elliptischen Cono-Cuneus von der singulären Kante, welche dasselbe Axenverhältniss haben und auf derselben Seite der singulären Kante liegen, ist gleich dem Quadrat des Abstandes des Kreises dieses Cono-Cuneus von seiner singulären Kante.

Oder m. a. W. Die Entfernung derjenigen Ellipse des geraden elliptischen Cono-Cuneus von der singulären Kante, deren Axen in demselben Verhältniss zu einander stehen wie die einer gegebenen Ellipse, und welche mit der gegebenen auf derselben Seite der singulären Kante liegt, ist die vierte Proportionale zu dem Abstande der gegebenen Ellipse und dem Abstande des Kreises des geraden elliptischen Cono-Cuneus von seiner singulären Kante.

Bezeichnen h' und h'' die Abstände der zu h_1 und h_2 zugehörigen Ellipsen von dem Kreise des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17), d. h. ist

$$h_1 = c - h' \quad \text{und} \quad h_2 = c + h'',$$

so ergiebt sich nach der Formel (23):

$$h' = \frac{c}{c + h''} h'' \quad \text{und} \quad h'' = \frac{c}{c - h'} h'$$

Demnach kann man die vorige Relation auch so deuten: Der Abstand derjenigen Ellipse des geraden elliptischen Cuno-Cuneus von dem Kreisschnitte desselben, welche dasselbe Axenverhältniss hat wie eine gegebene Ellipse derselben Fläche und mit der gegebenen auf derselben Seite der singulären Kante liegt, ist gleich der vierten Proportionale zum Abstande der gegebenen Ellipse, dem des Kreises von der singulären Kante und der Entfernung der gegebenen Ellipse vom Kreise.

Ferner folgt daraus: $h' < h''$, d. h. in Worten: Liegt die gegebene Ellipse zwischen der singulären Kante und dem Kreise des geraden elliptischen Cono-Cuneus, so ist diejenige Ellipse, welche mit ihr dasselbe Axenverhältniss hat und auf derselben Seite der singulären Kante liegt, weiter von dem Kreise des Cono-Cuneus entfernt als die gegebene, und umgekehrt, liegt die gegebene Ellipse jenseits des Kreises von der singulären Kante, so ist die gesuchte Ellipse näher an dem Kreise als die gegebene.

§ 11.

Wir wollen noch einige schiefe Schnitte des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) analytisch untersuchen, welche sich bei Wallis rein geometrisch behandelt finden.

Zunächst schneiden wir ihn durch die auf der XY-Ebene senkrechte Ebene, welche mit der X-Axe den Winkel φ bildet und von der Y-Axe das Stück δ abschneidet.

Um die entsprechende Durchschnittscurve zu untersuchen, führen wir die Coordinatentransformation ein:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$
$$y = \delta + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$
$$z = z'$$

Setzen wir dann $y' = 0$, so ergiebt sich als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$c^2(\delta + x'\sin\varphi)^2 = z'^2(a^2 - x'^2\cos^2\varphi) \tag{24}$$

Daraus folgt:

$$\frac{dz'}{dx'} = \pm\frac{c(\delta x'\cos^2\varphi + a^2\sin\varphi)}{(a^2 - x'^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2z'}{dx'^2} = \pm\frac{c\cos^2\varphi\{2\delta x'^2\cos^2\varphi + 3a^2x'\sin\varphi + a^2\delta\}}{(a^2 - x'^2\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}}$$

Bei der näheren Discussion haben wir 3 Fälle zu unterscheiden:

1) $\delta\operatorname{cosec}\varphi < a\sec\varphi$ oder $\delta < a\operatorname{tg}\varphi$.

Alsdann besteht die Durchschnittscurve vierten Grades aus zwei symmetrischen Zweigen, welche sich im Punkte $x' = -\delta\operatorname{cosec}\varphi$, $z' = 0$ schneiden. Die beiden Zweige schneiden die z'-Axe in den Punkten $x' = 0$, $z' = \pm\frac{c\delta}{a}$ und erstrecken sich für $x' = \pm a\sec\varphi$ nach beiden Seiten der Z'-Axe ins Unendliche. Sie nähern sich asymptotisch den beiden Geraden $x' = \pm a\sec\varphi$. Diese Curve besitzt zwei Wendepunkte, welche zur Abscisse:

$$x' = \frac{a}{4\delta\cos^2\varphi}\{-3a\sin\varphi + \cos\varphi\sqrt{9a^2\operatorname{tg}^2\varphi - 8\delta^2}\}$$

gehören. Ein specieller Fall findet für $\delta = 0$ statt.

Alsdann schneiden sich die beiden Zweige im Coordinatenanfang und liegen sowohl zur X'-Axe als zur Z'-Axe symmetrisch.

2) $\delta = a\operatorname{tg}\varphi$.

Dadurch geht die Gleichung (24) über in:

$$c^2(a + x'\cos\varphi)\operatorname{tg}^2\varphi = z'^2(a - x'\cos\varphi)$$

Die Durchschnittscurve ist mithin alsdann vom dritten Grade. Sie liegt symmetrisch zur X'-Axe und schneidet dieselbe im Punkte $x' = -a\sec\varphi$, $z' = 0$. Diese Curve erstreckt sich sowohl auf der

positiven als auf der negativen Seite der Z'-Axe für $x' = a \sec\varphi$ ins Unendliche und hat die Asymptote $x' = a \sec\varphi$. In ihrem Durchschnittspunkte mit der X'-Axe steht die Tangente an die Curve auf dieser Axe senkrecht. Ausserdem besitzt diese Curve zwei Wendepunkte, welche zur Abscisse $x' = -\frac{1}{2}a \sec\varphi$ gehören.

3) $\delta > a \operatorname{tg}\varphi$.

In diesem Falle besteht die Durchschnittscurve vierten Grades aus zwei Zweigen, welche symmetrisch zur X'-Axe liegen, dieselbe aber nicht schneiden. Von der Z'-Axe schneiden sie bezüglich die Stücke $\pm \frac{c\delta}{a}$ ab. Für $x' = -\frac{a^2 \sin\varphi}{\delta \cos^2\varphi}$ ist die Tangente an dieselbe der X'-Axe parallel. Ausserdem besitzt diese Curve die beiden Asymptoten $x' = \pm a \sec\varphi$.

Auf analoge Weise ergiebt sich als Gleichung der Durchschnittscurve des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) mit der Ebene senkrecht auf der xz-Ebene, welche mit der X-Axe den Winkel ψ bildet und von der Z-Axe das Stück e abschneidet:

$$c^2 y'^2 = (e + x' \sin\varphi)^2 (a^2 - x'^2 \cos^2\psi) \tag{25}$$

d. i. eine Curve vierten Grades, welche symmetrisch zur X'-Axe liegt. Auch hierbei haben wir die 3 Fälle zu unterscheiden $e \lesseqgtr a \operatorname{tg}\psi$. Diese Curve ist in allen Fällen geschlossen und besitzt, wenn $e < a \operatorname{tg}\psi$ ist, einen Doppelpunkt. Für $e = 0$ erhält man eine Curve vierten Grades, welche eine ähnliche Gestalt wie die Lemniskate hat.

Schneiden wir schliesslich den geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) durch eine Ebene senkrecht auf der YZ-Ebene, welche mit der Y-Axe den Winkel ϑ bildet und von der Z-Axe das Stück f abschneidet, so erhält man auf die oben ausgeführte Weise als Gleichung der betreffenden Durchschnittscurve:

$$c^2 y'^2 \cos^2\vartheta = (f + y' \sin\vartheta)^2 (a^2 - x'^2) \tag{26}$$

d. i. im Allgemeinen eine Curve vierten Grades.

Die verschiedenen Fälle, welche sich hieraus ergeben, je nachdem $\text{val. abs.} \operatorname{tg}\vartheta \lesseqgtr \frac{c}{a}$ ist, entsprechen den Kegelschnitten. Für $\text{val. abs.} \operatorname{tg}\vartheta < \frac{c}{a}$ stellt die Gleichung (26) eine geschlossene Curve

entsprechend der Ellipse beim Kegel dar, welche für $\vartheta = 0$ in eine Ellipse übergeht. Für $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{c}{a}$ erstreckt sich die Durchschnittscurve nach der positiven Seite der Y-Axe ins Unendliche.

Sie schneidet die Y'-Axe im Punkte $x' = 0$, $y' = -\frac{f}{c}\sqrt{a^2+c^2}$, die X'-Axe in den Punkten $x' = \pm a$, $y' = 0$ und liegt zwischen den in den letzteren Punkten auf der X'Axe errichteten Senkrechten. Diese Curve entspricht dem Parabelschnitt des Kegels. Für val. abs. $\operatorname{tg}\vartheta > \frac{c}{a}$ besteht die Durchschnittscurve (26) aus zwei nach beiden Seiten der Y'-Axe ins Unendliche sich erstreckenden Zweigen, von denen der eine Zweig die X'-Axe in den Punkten $x' = \pm a$, $y' = 0$, die Y'-Axe im Punkte $x' = 0$, $y' = -\frac{af}{a\sin\vartheta + c\cos\vartheta}$ schneidet. Der andere Zweig schneidet die Y'-Axe in dem Punkte $x' = 0$, $y' = -\frac{af}{a\sin\vartheta - c\cos\vartheta}$. Diese Curve entspricht der Hyperbel beim Kegel.

Für $f' = 0$ geht die Gleichung (26) über in:

$$x' = \pm\sqrt{a^2 - c^2\operatorname{ctg}^2\vartheta}$$

Die Ebenen, welche durch die singuläre Kante gehen, schneiden daher aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) zwei erzeugende Geraden desselben aus, wenn val. abs. $\operatorname{tg}\vartheta > \frac{c}{a}$ ist. Für $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{c}{a}$ fallen diese beiden Geraden in eine einzige zusammen.

§ 12.

Wir wollen nun die Untersuchungen ebener Schnitte des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) verlassen und zur Betrachtung seiner T a n g e n t i a l e b e n e übergehen.

Als Gleichung derselben im Punkte xyz der Fläche ergibt sich:

$$xz^2(\xi - x) - c^2y(\eta - y) - z(a^2 - x^2)(\zeta - z) = 0$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (17):

$$xz^2(\xi - x) - cy\,.\,c\eta - z(a^2 - x^2)\zeta = 0 \tag{27}$$

Nach den allgemeinen Bemerkungen in der Einleitung berührt diese Tangentialebene den geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) im Allgemeinen nicht längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden desselben. Die Ausnahmen hiervon finden für $x = 0$ und für $x = \pm a$ statt. Im ersteren Falle schneidet die Tangentialebene aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende und die singuläre Kante aus, in den beiden anderen Fällen dagegen nur die durch ihren Berührungspunkt gehende erzeugende Gerade.

Die singuläre Kante des geraden elliptischen Cono-Cuneus ist noch dadurch ausgezeichnet, dass es in den Punkten derselben je zwei Tangentialebenen giebt, welche sich in der X-Ebene schneiden, und mit der XZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Denn setzt man in der Gleichung (27) für cy seinen Wert aus der Gleichung (17) und nimmt dann $z = 0$ an, so geht dieselbe über in:

$$\zeta = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 - x^2}} \eta$$

Es sind dies die am Schlusse des vorigen § für $f = 0$ betrachteten Ebenen. Daraus folgt, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene, welche mit der XZ-Ebene einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente absolute gleich oder kleiner als $\frac{c}{a}$ ist, eine Tangentialebene des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) ist.

Im Allgemeinen erhält man für die Projection der Durchschnittscurve der Tangentialebene mit der vorgelegten Fläche auf die XZ-Ebene, wenn man η aus der Gleichung (27) und der Gleichung:

$$c^2 \eta^2 = \zeta^2 (a^2 - \xi^2)$$

eliminirt:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & \xi - x = 0 \\ & (a^2 - x^2)(\xi + x)\zeta^2 - 2xz(a^2 - x^2)\zeta + x^2 z^2 (\xi - x) = 0 \end{aligned} \right.$$

d. h. diese Durchschnittscurve besteht im Allgemeinen aus der durch den Berührungspunkt der Tangentialebene mit der Fläche gehenden Erzeugenden der letzteren und aus einer Curve dritten Grades.

Für die Normale im Punkte xyz des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) ergeben sich die Gleichungen, wenn x_1, y_1, z_1 die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$(29) \quad \frac{x_1 - x}{xz^2} = \frac{y_1 - y}{-c^2 y} = \frac{z_1 - z}{z(a^2 - x^2)}.$$

§ 13.

Unsere nächste Aufgabe sei, das Volumen V zu bestimmen, welches von den Ebenen $x = 0$, $x = x_0$, $z = z_0$, der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teile des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) begrenzt wird. Für dasselbe ergiebt sich:

$$V = \int_0^{x_0}\int_0^{z_0} y\,dx\,dz = \frac{1}{c}\int_0^{x_0} dx\sqrt{a^2 - x^2}\int_0^{z_0} z\,dz$$

(30) $$V = \frac{z_0^2}{2c}\left\{\tfrac{1}{2}x_0\sqrt{a^2 - x_0^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right)\right\}$$

oder, wenn man die zu x_0, z_0 gehörige Coordinate y mit y_0 bezeichnet

(31) $$V = \tfrac{1}{4}x_0 y_0 z_0 + \tfrac{1}{4}a^2 \frac{z_0^2}{c} \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right)$$

Das Volumen V mit der vorgeschriebenen Begrenzung ist demnach gleich dem vierten Teil des rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0 vermehrt um ein Prisma, dessen Grundfläche ein Quadrat mit der Seite $\frac{1}{2}a$, und dessen Höhe die mit $\arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right)$ multiplicirte vierte Proportionale zu c und z_0 ist.

Setzt man in der Gleichung (30) $x_0 = a$, so geht dieselbe über in

$$V = \frac{\pi a^2 z_0^2}{8c}$$

d. i. aber der vierte Teil desjenigen Volumens V', welches von dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) und der Ebene $z = z_0$ begrenzt wird. Daraus folgt:

(32) $$V' = \tfrac{1}{2}\pi a^2 \frac{z_0^2}{c}.$$

Das von dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) und der Ebene $z = z_0$ begrenzte Volumen ist also gleich der Hälfte eines Cylinders, dessen Grundkreis den Radius a hat, und dessen Höhe die vierte Proportionale zu c und z_0 ist.

Ziehen wir in Betracht, dass die zur XY-Ebene parallele Ebene $Z = Z_0$ aus der vorgelegten Fläche eine Ellipse mit den Halbaxen a und $\frac{az_0}{c}$ ausschneidet, so lässt sich die Formel (52) so deuten:

Das Volumen V' ist gleich dem halben Volumen des Cylinders mit der durch die Ebene $Z = Z_0$ aus der vorgelegten Fläche ausgeschnittenen Ellipse als Grundfläche und der Höhe Z_0.

Allgemein ist diese Beziehung in der Einleitung (§ 8.) nachgewiesen worden; wir wollen daher hier nicht näher darauf eingehen. Bemerkt sei nur noch, dass die Formel (32) auch mit Hilfe einer Mittenfigur deuten lässt. Die Ebene $z = \frac{1}{2}z_0$ schneidet nämlich aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) eine Ellipse mit den Halbaxen a und $\frac{az_0}{2c}$ aus. Bezeichnet man diese Mittenfigur mit M, so geht die Gleichung (32) über in:

$$V' = M \cdot z_0 \tag{33}$$

Diese Formel gilt auch, wenn man das Volumen zwischen den Ebenen $z = z_1$, $z = z_2$ und dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) in Betracht zieht. Man hat alsdann nur für z_0 den Abstand der beiden begrenzenden Ebenen zu setzen. Denn aus der Gleichung (32) folgt für dieses Volumen, wenn $z_2 > z_1$ ist:

$$V = \tfrac{1}{2}\pi a^2 \frac{z_2^2 - z_1^2}{c} = \tfrac{1}{2}\pi a^2 h \frac{z_1 + z_2}{c}$$

wobei $h = z_2 - z_1$ ist. Nun ist aber: $z = \frac{c}{a} b$, wenn b die zu z zugehörige variabele Halbaxe der Ellipse ist. Mithin erhält man:

$$V = \pi a \cdot \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$$

Setzt man ferner: $\frac{b_1 + b_2}{2} = b_3$, so ergiebt sich:

$$V = \pi a b_3 h$$

Ist z_3 das zu b_3 zugehörige z, so ist:

$$z_3 = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

also:

$$z_2 - z_3 = \tfrac{1}{2}(z_2 - z_1) = \tfrac{1}{2}h$$

Demnach resultirt der oben ausgesprochene Satz:

$$V = M \cdot h \tag{34}$$

Wir hatten erhalten:

$$V = \pi a \frac{b_1 + b_2}{2} h.$$

Diese Formel lässt sich noch anders deuten. Es ergiebt sich nämlich daraus:

$$V = \tfrac{1}{6}\pi\, ab_1 h + \tfrac{1}{6}\pi\, ab_2 h + \tfrac{1}{3}\pi\, a(b_1 + b_2)h$$

$$V = \frac{h}{3}\left\{ \tfrac{1}{2}(\pi\, ab_1 + \pi\, ab_2) + 2\pi\, ab_3 \right\}$$

Setzt man nun:

$$\pi\, ab_1 = G_1$$
$$\pi\, ab_2 = G_2$$
$$\pi\, ab_3 = M,$$

wobei G_1 und G_2 die begrenzenden Ellipsen, M die Mittenfigur des Körpers V bedeutet, so ist:

$$V = \frac{h}{3}\{\tfrac{1}{2}(G_1 + G_2) + 2M\} \tag{35}$$

d. i. die Formel, welche in der Stereometrie vom Prismatoid bewiesen wird.

Die beiden Formeln (34) und (35) lassen sich noch verallgemeinern. Wir wollen diese Verallgemeinerung kurz für die erstere durchführen. Betrachtet man nämlich das Volumen zwischen den Ebenen $x = 0$, $x = x_0$, $z = z_1$, $z = z_2$, der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teil des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17), so erhält man für dasselbe:

$$V' = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2c}\left\{ \tfrac{1}{2}x_0\sqrt{x_0^2 - a^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right)\right\}$$

Nun ist aber:

$$\frac{z_2^2 - z_1^2}{2c} = \frac{h(z_1 + z_2)}{2c} = h\,\frac{z_3}{c}$$

und

$$\frac{z_3}{c}\left\{ \tfrac{1}{2}x_0\sqrt{a^2 - x_0^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right)\right\} = M',$$

wenn M' den Teil von M bezeichnet, welcher von den zu $x = 0$, $x = x_0$ zugehörigen Ordinaten der Ellipse, von der X-Axe und dem zugehörigen Bogen begrenzt wird. Folglich resultirt:

$$V' = M'.\, h.$$

Auf analoge Weise ergiebt sich der entsprechende Ausdruck für die Formel (35).

III. Abschnitt.

Die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei.

§ 14.

Um zunächst den geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus zu betrachten, nehmen wir als Gleichungen der Leithyperbel:

$$(36)\qquad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$$

Demnach wird die X-Axe singuläre Kante, die YZ-Ebene Directorebene. Also erhält man als Gleichungen des betreffenden Cono-Cuneus, wenn man wieder c^2 für $\frac{a^2 c^2}{b^2}$ setzt:

$$(37)\qquad c^2 y^2 = z^2 (x^2 - a^2)$$

Da diese Gleichung nur die Quadrate von x, y, z enthält, so ist zunächst klar, dass die vorgelegte Fläche symmetrisch zu den drei Coordinatenebenen liegt. Ferner folgt ohne Weiteres, dass es nur reelle Werte für y und z giebt, wenn val. abs. $x \overset{=}{>} a$ ist. Der in Rede stehende Cono-Cuneus besteht daher aus zwei gesonderten Teilen zu beiden Seiten der Directorebene, woher die Bezeichnung „geteilt" entnommen ist.

Wir wollen nicht näher auf ebene Schnitte des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus eingehen, da wir dabei auf ganz ähnliche Betrachtungen wie beim geraden elliptischen Cono-Cuneus geführt werden. Bemerkt sei hier nur, dass die zur XY-Ebene parallele Ebene $z = h$ aus der vorgelegten Fläche (37) die Hyperbel:

$$(38)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{c^2 y^2}{a^2 h^2} = 1$$

ausschneidet. Für $h = c$ ergiebt sich demnach eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a. Die Mittelpunkte aller dieser Hyperbeln liegen auf der Z-Axe, ihre reellen Axen in der YZ-Ebene, ihre imaginären Axen in der YZ-Ebene. Die reellen Axen der ausgeschnittenen Hyperbeln sind einander gleich $2a$, die imaginären dagegen wachsen proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante.

Ziehen wir die Brennpunkte dieser ausgeschnittenen Hyperbeln in Betracht, so liegen diese, wie sich aus dem Gesagten ergiebt, in

der XZ-Ebene. Als Gleichung des geometrischen Ortes dieser Brennpunkte erhält man:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{39}$$

d. h. in Worten: Der geometrische Ort der Brennpunkte aller Hyperbeln, welche aus dem geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) durch Ebenen parallel der XY-Ebene ausgeschnitten werden, ist eine Hyperbel in der XZ-Ebene mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren reelle Axe $2a$ in der X-Axe, deren imaginäre Axe $2c$ in der Z-Axe liegt. Ist $c = a$, so ist dieser geometrische Ort eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a.

Aus der Vergleichung von (38) und (39) folgt, wenn wir $\frac{ah}{c} = c$ setzen:

$$h = \frac{c^2}{a}$$

Daraus fliesst der Satz: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu a und c ist, schneidet aus dem geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) eine Hyperbel aus, welche gleich ist dem geometrischen Orte der Brennpunkte aller durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus der vorgelegten Fläche ausgeschnittenen Hyperbeln.

Es ist dies ein ganz ähnliches Resultat, wie wir es beim geraden elliptischen Cono-Cuneus erhalten haben.

Vergleichen wir die beiden Resultate (22) und (39), so erhalten wir den Satz:

Sind der gerade elliptische und der geteilte gerade hyperbolische Cono-Cuneus, welche dieselbe Directorebene und dieselbe singuläre Kante haben, so beschaffen, dass die Ebene in der Entfernung a von der singulären Kante aus dem elliptischen einen Kreis mit dem Radius a, aus dem hyperbolischen eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a ausschneidet, so ist der geometrische Ort der Brennpunkte der Ellipsen des elliptischen Cono-Cuneus, deren Entfernung von der singulären Kante absolute gleich oder grösser als a ist, gleich dem geometrischen Orte der Brennpunkte der Hyperbeln des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus.

Die durch die Gleichung (38) dargestellte Hyperbel besitzt zwei Asymptoten, welche der Gleichung genügen:

$$y = \pm \frac{h}{c} x$$

Die Asymptoten aller Hyperbeln, welche aus dem geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) durch Ebenen parallel der XY-Ebene ausgeschnitten werden, liegen demnach auf einer Fläche, welche durch die Gleichung dargestellt wird:

$$cy = \pm xz$$

Diese zerfällt in die beiden Gleichungen:

$$(40) \qquad \begin{cases} cy - xz = 0 \\ cy + xz = 0 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass die Asymptoten der Hyperbeln des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus auf zwei hyperbolischen Paraboloiden liegen. Um die Gleichungen derselben auf die übliche Form zu bringen, wenden wir die Coordinatentransformation an:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - z'\sin\varphi \\ y &= y' \\ z &= x'\sin\varphi + z'\cos\varphi \end{aligned}$$

Dadurch gehen die Gleichungen (40) über in:

$$cy' = \pm\left[(x'^2 - z'^2)\sin\varphi\cos\varphi + x'z'(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right]$$

Für $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi = 0$ ergiebt sich $\varphi = \frac{\pi}{4}$, wodurch man erhält:

$$x'^2 - z'^2 = \pm 2cy'$$

Die beiden hyperbolischen Paraboloide genügen also den Gleichungen:

$$(41) \qquad \begin{cases} \dfrac{x'^2}{2c} - \dfrac{z'^2}{2c} = y' \\[2ex] \dfrac{z'^2}{2c} - \dfrac{x'^2}{2c} = y' \end{cases}$$

Diese Paraboloide sind demnach der Art, dass Ebenen parallel der $X'Z'$-Ebene gleichseitige Hyperbeln aus ihnen ausschneiden. Ausserdem sind ihre Spuren in den Ebenen der $x'y'$ und der $y'z'$ einander gleich.

§ 15.

Als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) ergiebt sich, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$xz^2(\xi - x) - c^2y(\eta - y) + z(x^2 - a^2)(\zeta - z) = 0$$

oder:

$$(42) \qquad xz^2(\xi - x) - cy \, . \, c\eta + z(x^2 - a^2)\zeta = 0$$

Schon aus den allgemeinen Erörterungen der Einleitung geht hervor, dass diese Tangentialebene den geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) im Allgemeinen in der durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden und in einer Curve dritten Grades schneidet. Sie berührt aber im Allgemeinen die vorgelegte Fläche nicht längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben. Eine Ausnahme hiervon findet nur für $x = \pm a$ statt; d. h. nur die Tangentialebenen in den Durchschnittspunkten des in Rede stehenden Cono-Cuneus (37) mit der XZ-Ebene berühren denselben längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden. Diese Tangentialebenen sind zugleich der Directorebene parallel und schneiden aus der vorgelegten Fläche nur die betreffende erzeugende Gerade aus.

Ein anderer specieller Fall ergiebt sich für $z = 0$, und zwar erhält man dafür aus der Gleichung (42):

$$\zeta = \pm \frac{c}{\sqrt{x^2 - a^2}} \eta$$

In den Punkten der singulären Kante des geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) giebt es demnach im Allgemeinen je zwei Tangentialebenen, welche durch die X-Axe gehen und mit der XZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Analog dem Resultate beim geraden elliptischen Cono-Cuneus folgt, dass diese Tangentialebenen aus der vorgelegten Fläche ausser der singulären Kante zwei auf beiden Seiten der Directorebene liegende, von derselben gleich weit entfernte erzeugende Geraden ausschneiden.

Jede durch die singuläre Kante gehende Ebene ist mithin im Allgemeinen eine Tangentialebene des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus.

Für die Gleichungen der Normale im Punkte xyz des vorgelegten Cono-Cuneus (37) erhält man, wenn x_1, y_1, z_1 die laufenden Cordinaten sind:

$$(43) \qquad \frac{x_1 - x}{xz^2} = \frac{y_1 - y}{-c^2 y} = \frac{z_1 - z}{z(x^2 - a^2)}$$

§ 16.

Betrachten wir jetzt in der Gleichung:

$$(44) \qquad F \equiv c^2 y^2 - z^2 (x^2 - a^2) = 0$$

c als variabel, so stellt dieselbe eine Schaar von geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneis dar. Alle Flächen dieser Schaar gehen

durch die X-Axe und berühren sich in den beiden Geraden $x = \pm a$, $y = 0$. Sie besitzen also keine eigentliche einhüllende Fläche.

Anders verhält es sich, wenn wir in der Gleichung (44) c als constant, a dagegen als variabel annehmen. Wenden wir hierauf das in § 8. erhaltene Resultat an, so erhält man als Gleichung der einhüllenden Fläche der vorgelegten Flächenschaar:

$$\begin{cases} cy - xz = 0 \\ cy + xz = 0 \end{cases}$$

Das sind aber die Gleichungen (40). Die einhüllende Fläche der vorgelegten Flächenschaar besteht demnach aus den beiden hyperbolischen Paraboloiden, auf denen die Asymptoten aller Hyperbeln des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) liegen.

Für die erste Schaar von geradlinigen Flächen, welche durch die Gleichung (44) dargestellt wird, wollen wir noch die Orthogonalflächen bestimmen. Angenommen, eine dieser Orthogonalflächen habe die Gleichung $\varphi = 0$, dann sind die cosinus der Winkel, welche die Normale derselben mit den drei Coordinatenaxen bildet, bezüglich proportional:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Ferner sind die cosinus der Winkel, welche die Normale einer Fläche der vorgelegten Flächenschaar mit den drei Coordinatenaxen bildet, bezüglich proportional:

$$\frac{\partial F}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Da diese beiden Normalen nach der obigen Bedingung auf einander senkrecht stehen, so erhält man:

$$(45) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Setzen wir hierin für $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ ihre Werte und eliminiren dann c^2 zwischen der erhaltenen Gleichung und der Gleichung (44) der gegebenen Flächenschaar, dann ergiebt sich als partielle Differentialgleichung der gesuchten Orthogonalflächen:

$$(46) \qquad xyz \frac{\partial \varphi}{\partial x} - z(x^2 - a^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y(x^2 - a^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Nach der Lagrange'schen Reduction der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf ein System gewöhnlicher

Differentialgleichungen gelangt man zum allgemeinen Integral der Gleichung (46) durch Integration von:

$$dx : dy : dz = xyz : -z(x^2 - a^2) : y(x^2 - a^2)$$

Daraus folgt

$$dx : dy = xy : -(x^2 - a^2)$$

$$x^2 + y^2 - 2a^2 \lg x = c_1$$

$$dy : dz = -z : y$$

$$y^2 + z^2 = c_2$$

Die Orthogonalflächen der vorgelegten Flächenschaar sind demnach enthalten in der Gleichung:

$$F(x^2 + y^2 - 2a^2 \lg x,\ y^2 + z^2) = 0 \tag{47}$$

Zu demselben Resultat gelangt man bei der Betrachtung der Orthogonalflächen der Schaar von geraden elliptischen Cono-Cuneis, welche durch die Gleichung:

$$F \equiv c^2 y^2 - z^2 (a^2 - x^2) = 0 \tag{48}$$

dargestellt werden, wenn c variabel und a constant ist. Denn setzt man in die Bedingungsgleichung (45) für $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ die aus der Gleichung (48) folgenden Werte ein und eliminirt dann c^2 zwischen (48) und der erhaltenen Gleichung, so resultirt als partielle Differentialgleichung der betreffenden Orthogonalflächen:

$$xyz \frac{\partial \varphi}{\partial x} + z(a^2 - x^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y(a^2 - x^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

oder:

$$xyz \frac{\partial \varphi}{\partial x} - z(x^2 - a^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y(x^2 - a^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

d. i. aber die Gleichung (46). Daraus fliesst der Satz: Ist c variabel, hat dagegen a einen constanten Wert, so schneiden die Orthogonalflächen der durch die Gleichung (44) dargestellten Schaar von geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneis die durch die Gleichung (48) dargestellte Schaar von geraden elliptischen Cono-Cuneus recht winklig.

§ 17.

Unsere nächste Aufgabe sei die Cubatur des geteilten geraden hyberbolischen Cono-Cuneus (37). Es ergiebt sich:

$$V = \int_a^{x_0} \int_0^{z_0} y \, dx \, dz = \frac{1}{c} \int_a^{x_0} dx \sqrt{x^2 - a^2} \int_0^{z_0} z \, dz$$

(49) $$V = \frac{z_0^2}{2c}\left\{\tfrac{1}{2}x_0\sqrt{x_0^2 - a^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \lg\left(\frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a}\right)\right\}$$

Beachten wir, dass: $c^2 y_0^2 = z_0^2(x_0^2 - a^2)$ ist, so geht die Gleichung (49) über in:

(50) $$V = \tfrac{1}{4}x_0 y_0 z_0 - \tfrac{1}{4}\frac{a^2 z_0^2}{c}\lg\left(\frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a}\right)$$

Von diesem Volumen gelten analoge Sätze wie von demjenigen des geraden elliptischen Cono-Cuneus. Wir wollen diese hier nicht erst entwickeln, sondern auf eine andere Betrachtungsweise eingehen.

Lässt man längs einer durch die Ebene $x = x_0$ aus der vorgelegten Fläche (37) ausgeschnittenen Geraden eine gerade Linie parallel der XY-Ebene so hingleiten, dass sie stets durch die Z-Axe geht, zo erzeugt sie ein hyperbolisches Paraboloid, welches der Gleichung:

$$cy = xz$$

genügt. Für das Volumen V' zwischen den Ebenen $x = x_0$, $z = z_0$ der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teil dieser Fläche erhält man:

$$V' = \tfrac{1}{4}x_0 y_0 z_0$$

Mithin resultirt:

(51) $$V' - V = v = \frac{a^2 z_0^2}{4c}\lg\left(\frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a}\right)$$

Bezeichnen wir ferner den Hyperbelsector OPA (Fig. 1.) mit s, so ist, wenn die Hyperbel der Gleichung (38) genügt, und wenn man z_0 für h setzt:

(52) $$s = \frac{a^2 z_0}{2c}\lg\left(\frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a}\right)$$

Demnach geht die Gleichung (51) über in:

(53) $$v = \tfrac{1}{2}s \,.\, z_0$$

d. h. bei constantem z_0 und variablem x_0 verhalten sich die Volumina v wie die zugehörigen Hyperbelsectoren.

Wir haben im § 14. gesehen, dass die Ebene $z = c$ aus dem geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a ausschneidet. Setzen wir $z_0 = c$ in die Gleichungen (52) und (53) ein, so erhalten wir:

(54) $$\left\{\begin{aligned} v &= \tfrac{1}{2}s \,.\, c \\ s &= \tfrac{1}{2}a^2 \lg\left(\frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a}\right)\end{aligned}\right.$$

Hieran wollen wir einige Bemerkungen über Summen und Differenzen von v knüpfen, wenn x_0 verschiedene Werte annimmt. Wie sich aus den Gleichungen (54) ergiebt, haben wir dazu nur die entsprechenden Sectoren s zu betrachten.

Unter den gemachten Voraussetzungen lässt sich die zweite Gleichung in (54) auch so schreiben:

$$s = \tfrac{1}{2} a^2 \lg\left(\frac{x+y}{a}\right) \tag{55}$$

d. h. der Sector einer gleichseitigen Hyperbel ist gleich dem halben Quadrat des halben Parameters multiplicirt mit dem natürlichen Logarithmus von dem Quotienten aus der Summe der zugehörigen Endcoordinaten dividirt durch den halben Parameter.

Aus der Gleichung (55) folgt:

$$2s = \tfrac{1}{2} a^2 \lg\left(\frac{x+y}{a}\right)^2$$

Ist nun: $2s = s'$ und sind x', y' die zum Sector s' zugehörigen Endcoordinaten, so ist demnach:

$$x' + y' = \frac{(x+y)^2}{a} \tag{56}$$

Daraus fliesst der Satz: Die Summe der Coordinaten des doppelten Sectors einer gleichseitigen Hyperbel ist die vierte Proportionale zum halben Parameter derselben und der Summe der Coordinaten des einfachen Sectors.

Es ist aber: $x'^2 - y'^2 = a^2$. Mithin erhält man aus der Gleichung (56):

$$x' = \frac{x^2 + y^2}{a} \tag{57}$$

Den vorigen Satz kann man daher auch so aussprechen: Die Abscisse des doppelten Sectors einer gleichseitigen Hyperbel ist die vierte Proportionale zum halben Parameter derselben und der Verbindungslinie des Endpunktes der Ordinate des einfachen Sectors mit dem Hyperbelmittelpunkt.

Um mithin den Sector OP_1A (Fig. 1.) zu verdoppeln, construire man die vierte Proportionale zu OA und OP_1, trage dieselbe auf OA von O aus bis Q_2 ab, errichte in Q_2 die Senkrechte P_2Q_2 auf OQ_2, so ist Sector $OP_2A = 2$ Sect. OP_1A.

Damit ist zugleich die Aufgabe gelöst, einen gegebenen Sector einer gleichseitigen Hyperbel zu halbiren. Denn nach der Gleichung (57) ist

(58) $$x^2 + y^2 = a.x'$$

Um daher den Sector OP_2A zu halbiren, construire man über OQ_2 als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die Scheiteltangente der Hyperbel in R schneidet, mache $OP_1 = OR$, so ist

$$\text{Sect. } OP_1A = \tfrac{1}{2}\text{Sect. } OP_2A.$$

Aus der Gleichung (58) folgt noch, wenn man $y^2 = x^2 - a^2$ setzt:

(59) $$x^2 = \tfrac{1}{2}a(a + x')$$

Beachtet man ferner, dass der Krümmungsradius für die gleichseitige Hyperbel

$$\varrho = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}$$

ist, so ergiebt sich nach der Gleichung (57):

$$\overline{OQ_2}^2 = OP_1 . \varrho$$

d. h. in Worten: OQ_2 ist die mittlere Proportionale zu OP_1 und dem Krümmungsradius in P_1.

Zugleich ist klar, dass für den Scheitel der gleichseitigen Hyperbel der Krümmungsradius gleich dem halben Parameter derselben ist.

Die Relation (56) lässt sich leicht verallgemeinern. Ist nämlich $s_n = n.s$ und gehört s_n zu den Endcoordinaten x_n, y_n, so erhält man:

(60) $$x_n + y_n = \frac{(x+y)^n}{a^{n-1}}$$

Daraus resultirt der Satz: Die Summe der Coordinaten des n-fachen, Sectors einer gleichseitigen Hyperbel ist gleich der $n$ten Potenz der Summe der Coordinaten des einfachen Sectors dividirt durch die $(n-1)$te Potenz des halben Parameters derselben.

Sind ferner die beiden Sectoren s_1 und s_2 gegeben, welche bezüglich zu den Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gehören, so ist nach (55):

$$s_1 + s_2 = \tfrac{1}{2}a^2 \lg\left(\frac{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)}{a^2}\right)$$

Ist nun: $s_1 + s_2 = s_3$, wobei s_3 zu den Coordinaten x_3, y_3 gehört, so ergiebt sich die Relation:

$$(61)\qquad x_3+y_3=\frac{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}{a}$$

d. h. in Worten: Ist die Summe zweier Sectoren s_1 und s_2 einer gleichseitigen Hyperbel gleich einem dritten Sector s_3, so ist die Summe der Coordinaten dieses dritten Sectors die vierte Proportionale zum halben Parameter und den beiden Summen aus den Coordinaten der beiden zu summirenden Sectoren.

Setzt man: $\frac{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}{a}=c$, so erhält man:

$$x_3=\frac{a^2+c^2}{2c}$$

Um daher einen Sector s_3 zu finden (Fig. 2.), welcher gleich der Summe der beiden Sectoren OP_1A und OP_2A ist, construire man die vierte Proportionale OS zu OA, $OQ_1+Q_1P_1=OR_1$ und $OQ_2+Q_2P_2=OR_2$, halbire AS in T, trage AS von S aus auf SO bis U ab, ziehe durch U die Parallele UV zu OT, mache $OQ_3=SV$, errichte in Q_3 die Senkrechte P_3Q_3 auf OQ_3, so ist Sect. OP_3A der gesuchte Sector.

Damit ist zugleich die Aufgabe gelöst: Es sei ein beliebiger Punkt P_2 auf dem Bogen einer gleichseitigen Hyperbel gegeben, man bestimme hierzu einen Punkt P_3 so, dass der Sector OP_2P_3 gleich einem gegebenen Sector OP_1A ist.

Durch Wiederholung derselben Operation lässt sich die Gleichung (61) verallgemeinern. Sind die Hyperbelsectoren $s_1, s_2, \dots s_n$ gegeben, und ist:

$$s_{n+1}=s_1+s_2+\dots+s_n,$$

so ist, wenn die Sectoren bezüglich zu den Endcoordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; $\dots x_{n+1}, y_{n+1}$ gehören:

$$(62)\qquad x_{n+1}+y_{n+1}=\frac{(x_1+y_1)(x_2+y_2)\dots(x_n+y_n)}{a^{n-1}}$$

Aus der Gleichung (61) folgt ferner:

$$(63)\qquad x_1+y_1=\frac{x_3+y_3}{x_2+y_2}a$$

d. h. in Worten: Ist der Sector s_1 einer gleichseitigen Hyperbel gleich der Differenz s_3-s_2 zweier Sectoren, so ist die Summe der Coordinaten von s_1 die vierte Proportionale zu der Summe der Coordinaten von s_2, der Summe der Coordinaten von s_3 und dem halben Parameter der Hyperbel.

Daraus ergiebt sich eine der vorigen ähnliche Construction.

§ 18.

Wir wollen jetzt einige Beziehungen an der gleichseitigen Hyperbel entwickeln, wenn die Punkte P_1 und P_2 (Fig. 3.) so auf dem Hyperbelbogen liegen, dass O, A, Q_1 und Q_2 vier harmonische Punkte sind. Man hat demnach die Proportion:

(64)
$$OA : AQ_1 = OQ_2 : Q_1 Q_2$$

Finden ferner die Relationen statt:

$$\text{Sect. } OP_3 A = \tfrac{1}{2} \text{ Sect. } OP_1 A$$
$$\text{Sect. } OP_4 A = \tfrac{1}{2} \text{ Sect. } OP_2 A,$$

so folgt zunächst aus (58):

$$\overline{OP_4}^2 = OA \,.\, OQ_2$$
$$\overline{OP_4}^2 = \tfrac{1}{2}(OA \,.\, OQ_2 + OA \,.\, OQ_2)$$
$$\overline{OP_4}^2 = \tfrac{1}{2}(OA \,.\, OQ_1 + OA \,.\, Q_1 Q_2 + OQ_1 \,.\, OQ_2 - AQ_1 \,.\, OQ_2)$$

Daraus folgt mit Anwendung der Proportion (64):

$$\overline{OP_4}^2 = \tfrac{1}{2} OQ_1 (OA + OQ_2)$$

Nach (59) ist nun: $\tfrac{1}{2} OA (OA + OQ_2) = \overline{OQ_4}^2$, folglich erhält man:

$$\overline{OP_4}^2 \,.\, OA = OQ_1 \,.\, \overline{OQ_4}^2$$

Wenden wir hierauf noch die Gleichung (58) an, nach welcher $OA \,.\, OQ_1 = \overline{OP_3}^2$ ist, so resultirt:

$$\overline{OP_4}^2 \,.\, \overline{OA}^2 = \overline{OP_3}^2 \,.\, \overline{OQ_4}^2$$

also

$$OQ_4 : OP_4 = OA : OP_3$$

Aus der Figur 3. folgt, wenn R der Durchschnittspunkt der Scheiteltangente mit OP_4 ist:

$$OQ_4 : OP_4 = OA : OR$$

Aus beiden Proportionen ergiebt sich:

(65)
$$OP_3 = OR$$

Daraus fliesst der Satz: Ist der Sector $OP_4 A$ die Hälfte des Sectors $OP_2 A$ und liegen P_1 und P_2 so auf dem Bogen der gleichseitigen Hyperbel, dass die senkrecht darunter liegenden Punkte Q_1 und Q_2 mit dem Mittelpunkt O und dem Scheitel A der Hyperbel vier harmonische Punkte bilden, so schneidet die Scheiteltangente von der Verbindungslinie des Mittelpunktes O mit P_4 ein Stück OR ab, welches die mittlere Proportionale zu OA und OQ_1 ist.

Zugleich geht hieraus hervor: Wenn O, A, Q_1 und Q_2 vier harmonische Punkte sind, und man halbirt den Sector OP_2A, so dass Sect. $OP_4A = \frac{1}{2}$ Sect. OP_2A ist, so hat man damit auch den Sector OP_1A halbirt, denn man hat nur $OP_3 = OR$ zu machen, so ist Sect. $OP_3A = \frac{1}{2}$ Sect. OP_1A.

Diese Beziehungen lassen sich zu einer Construction von Punkten einer gleichseitigen Hyperbel verwenden, wenn der Mittelpunkt O und der Scheitel A derselben gegeben sind. Man wählt nämlich vier harmonische Punkte O, A, Q_1 und Q_2, construirt über OQ_1 und OQ_2 als Durchmesser Halbkreise, welche die in A auf OA errichtete Senkrechte in R und R_1 schneiden, trägt OR_1 von O aus auf OR bis P_4 ab, so ist P_4 ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel.

Andererseits lässt sich hierauf, wenn die gleichseitige Hyperbel gegeben ist, eine Construction des zu A zugeordneten vierten harmonischen Punktes zu O, A und Q_1 gründen, wie auch eine Construction des zu O conjugirten vierten harmonischen Punktes zu O, A und Q_2.

Construirt man ferner in P_4 unter Beibehaltung derselben Bedingungen die Tangente P_4T an die gleichseitige Hyperbel, so ist:

$$\overline{P_4T^2} = \left(x_4 - \frac{a^2}{x_4}\right)^2 + y_4^2$$

$$\overline{P_4T^2} = \frac{y_4^2(x_4^2 + y_4^2)}{x_4^2}$$

Da aber die Bedingung besteht:

$$\text{Sect. } OP_4A = \tfrac{1}{2} \text{Sect. } OP_2A,$$

so folgt nach (59):

$$x_4^2 + y_4^2 = ax_2,$$

also:

$$\frac{y_4^2}{x_4^2} = \frac{x_2 - a}{x_2 + a}$$

Mithin erhält man:

$$\overline{P_4T^2} = \frac{ax_2(x_2 - a)}{x_2 + a}$$

$$\overline{P_4T^2} = \frac{OA \,.\, OQ_2 \,.\, AQ_2}{OA + OQ_2}$$

$$\overline{P_4T^2} = \frac{OA \,.\, OQ_2 \,.\, AQ_1 + OA \,.\, OQ_2 \,.\, Q_1Q_2}{OA + OQ_2}$$

Mit Anwendung der Proportion (64) ergiebt sich hieraus:

$$\overline{P_4T^2} = \frac{OA \,.\, OQ_2 \,.\, AQ_1 + \overline{OQ_2}^2 \,.\, AQ_1}{OA + OQ_2}$$

$$\overline{P_4T^2} = AQ_1 \,.\, OQ_2 = OA \,.\, Q_1Q_2 \tag{66}$$

Daraus fliesst der Satz: Sind O, A, Q_1 und Q_2 vier harmonische Punkte auf der Axe einer gleichseitigen Hyperbel, und bestimmt man P_4 so auf dem Hyperbelbogen, dass: Sect $OP_4A = \frac{1}{2}$ Sect OP_2A ist, dann ist die Tangente in P_4 die mittlere Proportionale zwischen AQ_1 und OQ_2 oder zwischen OA und Q_1Q_2

Wir haben vorhin erhalten:

$$\frac{y_4^2}{x_4^2} = \frac{x_2 - a}{x_2 + a}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\overline{OQ_4}^2}{\overline{Q_4P_4}^2} = \frac{OA + OQ_2}{AQ_2} = \frac{OA(Q_1Q_2 + AQ_1)}{AQ_1 \,.\, AQ_2},$$

wenn man die Proportion (64) berücksichtigt.. Mithin resultirt:

$$\overline{OQ_4}^2 : \overline{Q_4P_4}^2 = OA : AQ_1$$

Fällt man von Q_4 die Senkrechte Q_4N auf OP_4, so ist:

$$\overline{OQ_4}^2 : \overline{Q_4P_4}^2 = ON : NP_4$$

Aus beiden Proportionen ergiebt sich:

$$OA : AQ_1 = ON : NP_4$$

d. h.

$$AN \parallel Q_1P_4$$

Hierauf kann man, wenn die gleichseitige Hyperbel gegeben ist, eine Construction des zu O conjugirten vierten harmonischen Punktes zu O, A und Q_2 gründen. Man construire über OQ_2 als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die Scheiteltangente in R_1 schneidet, mache $OP_4 = OR_1$, fälle von P_4 die Senkrechte P_4Q_4 auf OQ_2 und von Q_4 die Senkrechte Q_4N auf OP_4; ziehe durch P_4 die Parallele zu AN, so schneidet diese Parallele die Hyperbelaxe in dem zu O zugeordneten vierten harmonischen Punkt Q_1.

§ 19.

Gehen wir nun zur Betrachung des **einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus** über. Nehmen wir hierbei als

Leitlinie dieselbe Hyperbel wie beim geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$z = c$$

als Directorebene demnach die XZ-Ebene und die Y-Axe als singuläre Kante, so müssen die erzeugenden Geraden den Gleichungen genügen:

$$y = v; \quad x = uz,$$

so dass man als Gleichung des in Rede stehenden Cono-Cuneus erhält:

$$\frac{c^2 x^2}{a^2 z^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{67}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass x jeden beliebigen Wert annehmen kann. Ferner folgt daraus, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene den einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) in einer Hyperbel schneidet, deren Mittelpunkt auf der Z-Axe liegt, und deren Axen bezüglich in die Ebenen der xz und der yz fallen. Darin stimmen die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei überein. Während aber beim geteilten alle ausgeschnittenen Hyperbeln dieselbe reelle Axe haben, wachsen beim einfachen diese Axen proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante. Die reellen Axen der Hyperbeln des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus verhalten sich also genau so wie die imaginären der Hyperbeln des geteilten, und umgekehrt sind die imaginären Axen der Hyperbeln des einfachen einander gleich wie die reellen derjenigen des geteilten.

Hieraus folgt, dass beim einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) die Scheitel der ausgeschnittenen Hyperbeln von $z = \infty$ bis $z = 0$ sich einander nähern, bis sie für $z = 0$ zusammenfallen, während die Entfernung der Scheitel der Hyperbeln des geteilten constant bleibt. Die beiden Teile des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) liegen daher nicht von einander getrennt, sondern treffen in der singulären Kante zusammen, womit die Bezeichnung „einfach“ zusammenhängt.

Die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei unterscheiden sich in Betreff der ausgeschnittenen Hyperbeln noch darin, dass beim geteilten die Zweige der Hyperbeln sich von ihrer reellen Axe mit wachsendem Abstande von der singulären Kante entfernen, während sie umgekehrt beim einfachen sich mit wachsendem Abstande von der singulären Kante ihrer reellen Axe nähern.

Der einfache gerade hyperbolische Cono-Cuneus stimmt wieder darin mit dem geteilten überein, dass auch bei ihm die Brennpunkte der ausgeschnittenen Hyperbeln auf einer Hyperbel liegen, deren Gleichung ist:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2 z^2}{b^2 c^2} = 1 \tag{68}$$

Der Mittelpunkt dieser Hyperbel ist demnach der Coordinatenanfang, ihre reelle Axe $2a$ liegt in der X-Axe, ihre imaginäre $2\frac{bc}{a}$ in der Z-Axe.

Berücksichtigen wir hierbei die Gleichung (39), so resultirt der Satz: Schneiden sich die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, in einer gleichseitigen Hyperbel, so liegen die Brennpunkte der durch Ebenen parallel dieser Durchschnittslinie aus ihnen ausgeschnittenen Hyperbeln auf einer und derselben Hyperbel.

Die Asymptoten einer durch eine Ebene parallel der XY-Ebene aus dem einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) ausgeschnittenen Hyperpel genügen der Gleichung:

$$y = \pm \frac{bc}{az} x$$

Die Asymptoten aller dieser ausgeschnittenen Hyperbeln liegen demnach auf den beiden hyperbolischen Paraboloiden:

$$\begin{cases} ayz - bcx = 0 \\ ayz + bcx = 0 \end{cases} \tag{69}$$

Vertauschen wir in diesen Gleichungen y mit x, so gehen dieselben über in:

$$\begin{cases} axz - bcy = 0 \\ axz + bcy = 0 \end{cases} \tag{70}$$

Das sind aber die Flächen, auf denen die Asymptoten der Hyperbeln des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) liegen, wenn man denselben um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$ dreht.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (40) resultirt daher der Satz: Schneiden sich die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, in einer gleichseitigen Hyperbel, und dreht man den einen um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so liegen die Asymptoten der aus beiden

Flächen durch Ebenen parallel ihrer Durchschnittslinie ausgeschnittenen Hyperbeln auf denselben beiden hyperbolischen Paraboloiden.

Da diese Paraboloide, wie beim geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus nachgewiesen worden ist, zugleich die einhüllende Fläche der Schaar von Cono-Cuneis bilden, welche durch ihre Gleichung dargestellt wird, wenn der Parameter der aus einer solchen Fläche ausgeschnittenen gleichseitigen Hyperbel variabel ist, so kann man diesen Satz auch so deuten:

Schneiden sich die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, in einer gleichseitigen Hyperbel mit dem halben Parameter a, so bestehen die einhüllenden Flächen der beiden Flächenschaaren, welche durch die Gleichungen der beiden Cono-Cunei dargestellt werden, wenn a variabel ist, und der eine um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$ gedreht wird, aus denselben beiden hyperbolischen Paraboloiden.

§ 20.

Als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) ergiebt sich, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten sind:

$$\frac{c^2 x\xi}{a^2 z^2} - \frac{y(\eta - y)}{b^2} - \frac{c^2 x^2 \zeta}{a^2 z^3} = 0 \tag{71}$$

Von derselben gelten analoge Beziehungen wie von derjenigen des geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus. Die Berührungspunkte derjenigen Tangentialbenen, welche die vorgelegte Fläche (67) längs einer ganzen Erzeugenden berühren, liegen auf den Durchschnittslinien der XZ-Ebene mit der Fläche. In den Punkten der singulären Kante giebt es ebenfalls je zwei Tangentialebenen, welche durch die singuläre Kante gehen und mit der YZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden.

Betrachten wir jetzt das Volumen V zwischen den Ebenen $y = 0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $x = 0$ und dem zugehörigen Teile des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67), so erhält man für dasselbe:

$$V = \frac{a z_0^2}{2bc}\left\{\tfrac{1}{2} y_0 \sqrt{y_0^2 + b^2} + \tfrac{1}{2} b^2 \lg\left(\frac{y_0 + \sqrt{y_0^2 + b^2}}{b}\right)\right\} \tag{72}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (67) lässt sich diese Gleichung auch so schreiben:

$$(73)\quad V = \tfrac{1}{4}x_0 y_0 z_0 + \frac{ab z_0^2}{4c} \lg\left(\frac{a y_0 z_0 + b c x_0}{ab z_0}\right)$$

Ferner folgt aus der Gleichung (50), wenn man darin: $\sqrt{x_0^2 - a^2}$ durch $\frac{c y_0}{z_0}$ ersetzt:

$$(74)\quad V' = \tfrac{1}{4}x_0 y_0 z_0 - \frac{a^2 z_0^2}{4c} \lg\left(\frac{x_0 z_0 + c y_0}{a z_0}\right)$$

Vertauschen wir in (73) x mit y, d. h. drehen wir den einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so geht diese Gleichung über in:

$$(73a)\quad V = \tfrac{1}{4}x_0 y_0 z_0 + \frac{ab z_0^2}{4c} \lg\left(\frac{a x_0 z_0 + b c y_0}{ab z_0}\right)$$

Setzen wir hierin $a = b$, so resultirt:

$$V + V' = \tfrac{1}{2}x_0 y_0 z_0$$

Daraus fliesst der Satz: Schneiden sich die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, in einer gleichseitigen Hyperbel, und dreht man den einen um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so ist die Summe der zu denselben Coordinaten x_0, y_0, z_0 gehörenden Volumina der beiden Flächen gleich dem halben Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

XV.

Miscellen.

1.

Mehrfach collineare Dreiecke bei Kegelschnitten.

Für zwei collineare Dreiecke giebt es bekanntlich stets einen Kegelschnitt, in Bezug auf welchen die beiden Dreiecke polarreciprok sind. Wenn nun die Dreiecke r-fach collinear ($r = 2, 3, 4, 6$) sind*), so giebt es r solche Kegelschnitte. Die Beziehungen dieser Kegelschnitte unter einander wollen wir erörtern.

Es seien die Dreiecke abc und 123 in $(a_1\, b_2\, c_3)$-Collineation. Bei passend gewähltem Coordinatensystem sind dann:

$$\overline{bc} : x = 0 \qquad \overline{23} : \lambda x + y + z = 0$$
$$\overline{ca} : y = 0 \qquad \overline{31} : x + \mu y + z = 0$$
$$\overline{ab} : z = 0 \qquad \overline{12} : x + y + \nu z = 0$$

und der Kegelschnitt, in Bezug auf welchen die Polarreciprocität statt hat:

$$k \equiv \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0$$

Nehmen wir nun nach einander die Fälle der mehrfachen Collineation in Betracht.

1. Die Dreiecke sind auch in $(a_1\, b_3\, c_2)$-Collineation, wenn $\mu = \nu$ ist. Der zu dieser Collineation gehörige Kegelschnitt ist:

$$k \equiv \lambda x^2 + y^2 + z^2 + 2\mu yz + 2zx + 2xy = 1$$

---

*) Mehrfache Collineation von zwei Dreiecken. Gruner'ts Archiv Bd. 70. Seite 105.

also $k - k_1 \equiv (\mu - 1)(y - z)^2$, woraus folgt, dass die beiden Kegelschnitte sich doppelt berühren, mit $\overline{a1}$ als Berührungssehne.

Sehen wir nach, ob diese Beziehung, die sich als notwendig herausstellte, auch hinreichend ist?

Es seien k und k_1 in doppelter Berührung. Bei passend gewähltem Coordinatensystem seien ihre Gleichungen:

$$k \equiv \xi^2 + 2\eta\zeta = 0 \qquad k_1 \equiv l\xi^2 + 2\eta\zeta = 0$$

Der Punkt 1 habe die Coordinaten $0, \eta_1, \zeta_1$

„ 2 „ „ „ ξ_2, η_2, ζ_2.

k gehöre zur $(a_1 b_2 c_3)$-, k_1 zur $(a_1 b_3 c_2)$-Collineation.

Dann wird

$$\overline{ac}: \quad \zeta_2\xi + \zeta_2\eta + \eta_2\zeta = 0 \quad \text{(Polare von 2 bis } k)$$

$$\overline{ab}: \quad l\xi_2\zeta + \zeta_2\eta + \eta_2\zeta = 0 \quad \text{(Polare von 2 bei } k_1)$$

Nun ist aber 3 einerseits der Pol von $\overline{ab}$ bei $k(l\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$, andererseits der Pol von $\overline{ac}$ bei $k_1\left(\frac{\xi_2}{l}, \eta_2, \zeta_2\right)$, also muss

$$l^2 = 1 \quad \text{folglich} \quad l = -1$$

sein. ($l = 1$ würde k_1 mit k identisch machen).

Die Bedingungen sind also:

a) k und k_1 sollen sich doppelt berühren;

b) die Summe der beiden Factoren (l), wodurch $k + lk_1$ sich in lineare Factoren zerlegt, muss $= 0$ sein.

Dann kann man den Punkt 2 ganz beliebig, den Punkt 1 auf der Berührungssehne annehmen, dann erst bestimmt sich 3 eindeutig so, dsss 123 in Bezug auf k und k_1 dasselbe Dreieck zum polarreciproken besitzt.

2. Die Dreiecke sind vierfach collinear, wenn $\lambda = \mu = \nu$ ist.

$k \equiv \lambda x^2 + \lambda\eta^2 + \lambda z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0$ gehört zur $(a_1 b_2 c_3)$-Collection

$k_1 \equiv \lambda x_2 + y^2 + z^2 + 2\lambda y^2 + 2zx + 2xy = 0$ „ „ $(a_1 b_3 c_2)$ „

$k_2 = x^2 + \lambda y^2 + z^2 + 2yz + 2\lambda zx + 2xy = 0$ „ „ $(a_3 b_2 c_1)$ „

$k_3 \equiv x^2 + y^2 + \lambda z^2 + 2yz + 2zx + 2\lambda xy = 0$ „ „ $(a_2 b_1 c_3)$ „

also

$$k-k_1\equiv(\lambda-1)(y-z)^2 \qquad k_2-k_3\equiv(\lambda-1)(y-z)(-2x+y+z)$$
$$k-k_2\equiv(\lambda-1)(z-x)^2 \qquad k_3-k_1\equiv(\lambda-1)(z-x)(x-2y+z)$$
$$k-k_3\equiv(\lambda-1)(x-y)^2 \qquad k_1-k_2\equiv(\lambda-1)(x-y)(x+y-2z)$$

woraus man ganz deutlich die gegenseitige Lage der vier Kegelschnitte sieht. Wenn man noch beachtet, dass die Tangente an Q vom gemeinschaftlichen Punkte (1, 1, 1) der Berührungssehnen von k und k_1, k und k_2, k und k_3 sind:

$$x+\alpha y+\alpha^2 z=0 \qquad x+\alpha^2 y+\alpha z=0$$

(α eine complexe dritte Einheitswurzel) kann man die Ergebnisse so aussprechen:

Die binäre kubische Form, die $=0$ gesetzt die drei Berührungssehnen ($y-z=0$, $z-x=0$, $x-y=0$) darstellt, hat die erzeugenden gemeinschaftlichen Sehnen von k_1, k_2, k_3 ($-2x+y+z=0$, $x-2y+z=0$, $x+y-2z=0$) zur kubischen Covariante, und die Tangenten zur Hesse'schen Covariante.

Wenn man aber diese Tangenten und die zugehörige Berührungssehne zu Coordinatenaxen wählt, werden die Gleichungen einfacher:

$$k\equiv\xi^2+2\eta\zeta=0 \qquad \text{oder} \qquad k\equiv\xi^2+2\eta\zeta=0$$
$$k_1\equiv\xi^2+2\eta\zeta+(\eta-\zeta)=0 \qquad k_1\equiv\xi^2+\eta^2+\zeta^2=0$$
$$k_2\equiv\xi^2+2\eta\zeta+(\alpha^2\eta-\alpha\zeta)^2=0 \qquad k_2\equiv\xi^2+\alpha\eta^2+\alpha^2\zeta^2=0$$
$$k_3\equiv\xi^2+2\eta\zeta+(\alpha\eta-\alpha^2\zeta)^2=0 \qquad h_3\equiv\xi^2+\alpha^2\eta^2+\alpha\zeta^2=0$$

die Gleichungen erscheinen in reeller Form, wenn man statt η, ζ resp. mit $\eta+\zeta i$ und $-\eta+\zeta i$ proportionale Grössen einführt.

Der Punkt 1 kann auf der Geraden $\eta-\zeta=0$ beliebig gewählt werden, dadurch aber bestimmt sich 123 eindeutig so, dass die zugehörigen polarreciproken Dreiecke identisch werden.

3. Die Dreiecke sind in $(a_1b_2c_3)$-, $(a_2b_3c_1)$-, $(a_3b_1c_2)$-Collineationen, wenn $\lambda\mu\nu=1$ ist.

$k_1\equiv\lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2+2yz+2zx+2xy=0$ gehört zu $(a_1b_2c_3)$-Collineation
$k_2\equiv x^2+\mu y^2+\mu\nu z^2+2\mu\nu yz+2zx+2\mu xy=0$ „ „ $(a_2b_3c_1)$- „
$k_3\equiv x^2+\mu\nu y^2+\nu z^2+2\mu\nu yz+2\nu zx+2xy=0$ „ „ $(a_3b_1c_2)$- „

Diese Kegelschnittte berühren sich im Allgemeinen nicht. Beziehen wir die beiden ersten auf ihr gemeinschaftliches Poldreieck. Ihre Gleichungen seien:

$$k_1 \equiv \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$
$$k_2 \equiv l\xi^2 + m\eta^2 + n\zeta^2 = 0$$

Die Coordinaten von 1. seien ξ_1, η_1, ζ_1. Dann sind:

$\overline{bc}$: $\xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \zeta_1 \zeta = 0$ (Polare von 1 bei k_1)

$\overline{ab}$: $l\xi_1 \xi + m\eta_1 \eta + n\zeta_1 \zeta = 0$ (Polare von 1 bei k_2)

Die Coordinaten von 3: $l\xi_1$, $m\eta_1$, $n\zeta$ (Pol von $\overline{ab}$ bei k_1)

Die Coordinaten von 2: $\frac{\xi_1}{l}$, $\frac{\eta_1}{m}$, $\frac{\zeta_1}{n}$ (Pol von bc bei k_2)

Nun aber wird ac einerseits:

$l^2\xi_1 \xi + m^2\eta_1 \eta + n^2\zeta_1 \zeta = 0$ (als die Polare von 3 bei k_2

andererseits:

$\frac{\xi_1}{l} \xi + \frac{\eta_1}{m} \eta - \frac{\zeta_1}{n} \zeta = 0$ (als die Polare von 2 bei k_1)

es muss also sein

$$l^3 = m^3 = n^3 \quad (= 1, \text{ wie wir annehmen})$$

Zwei wesentlich verschiedene Fälle sind zu unterscheiden:

a) $l = m = 1, \quad n = \alpha,$

dann sind

$$k_1 \equiv \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$
$$k_2 \equiv \xi^2 + \eta^2 + \alpha\zeta^2 = 0$$
$$k_3 \equiv \xi^2 + \eta^2 + \alpha^2\zeta^2 = 0$$

diese können aber nicht in reelle Form übergeführt werden.

b) $l = 1, \quad m = \alpha, \quad n = \alpha^2,$

dann sind

$$k_1 \equiv \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$
$$k_2 \equiv \xi^2 + \alpha\eta^2 + \alpha^2\xi^2 = 0$$
$$k_3 \equiv \xi^2 + \alpha^2\eta^2 + \alpha\zeta^2 = 0$$

Dieser Fall tritt ein, wenn die kubische Gleichung, deren Wurzeln l, m, n sind, eine reine Gleichung wird.* Dies bedingt das gleichseitige Verschwinden der beiden wohl bekannten simultanen Invarianten, die bei Salmon mit Θ und Θ' bezeichnet werden.

Zu den obigen drei Kegelschnitten kann ein vierter auf dreierlei Art so bestimmt werden, dass das System der vier Kegelschnitte vierfach polarreciproke Dreiecke zulässt. Diese Kegelschnitte sind:

$$k_4 \equiv \xi^2 + 2\eta\zeta = 0, \quad k_5 \equiv \eta^2 + \zeta\xi = 0, \quad k_6 \equiv \zeta^2 + 2\xi\eta = 0$$

Die sechs Kegelschnitte endlich bilden ein System, in Bezug auf welches die Dreiecke 123 und abc:

$$\begin{array}{llll} \overline{23}: & \alpha\xi + \eta + \zeta = 0 & \overline{bc}: & \alpha^2\xi + \eta + \zeta = 0 \\ \overline{31}: & \xi + \alpha\eta + \zeta = 0 & \overline{ca}: & \xi + \alpha^2\eta + \zeta = 0 \\ \overline{12}: & \xi + \eta + \alpha\zeta = 0 & \overline{ab}: & \xi + \eta + \alpha^2\zeta = 0 \end{array}$$

sechsfach polorreciprok sind.

Unter den 6 Kegelschnitten giebt es höchstens vier reelle, die beiden Dreiecke sind immer imaginär.

Klausenburg (Ungarn) 1884 Februar.

J. Vályi.

2.

Ueber drei geometrische Kreisörter.

Bei der Construction von Dreiecken aus gegebenen Stücken spielt die Lehre von den geometrischen Oertern eine wichtige Rolle. Wenn ich im folgenden auf drei solche Oerter die Aufmerksamkeit lenke, so bin ich weit entfernt zu behaupten, dass dieselben nicht schon anderweitig bekannt seien; indessen habe ich sie in keinem der bekannteren Werke über elementare Geometrie angetroffen. Auch dürfte die analytische Ableitung derselben, wenigstens meines Wissens, mir eigentümlich sein. Ich gehe nun an die Formulirung der Aufgabe:

„Wenn bei constanter Basis und constantem Radius des umschriebenen Kreises eines Dreieckes der Scheitel des Dreieckes sich längs der Peripherie des Kreises bewegt, so ist die Frage nach den geometrischen Oertern, welche der Schwerpunkt des Dreieckes, der Durchschnittspunkt seiner Höhen und der Mittelpunkt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises beschreiben.“

Das System rechtwinkliger Coordinaten werde für alle drei Fälle so gelegt, dass die X-Axe mit der Basis des Dreieckes zusammenfällt, während die Y-Axe den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises enthält. Der Punkt A der Basis habe die Coordinaten $(-p, 0)$, der Punkt B $(+p, 0)$. Der Scheitel des Dreieckes besitze die variablen Coordinaten (x_1, y_1); endlich sei die Gleichung des Kreises:

(1) $$(y-q)^2+x^2 = r^2$$

p und q sind an die Bedingung gebunden:

$$p^2+q^2 = r^2$$

Nimmt man für die Coordinaten des Schwerpunktes S ξ und η, so ist bekanntlich

$$\xi = \frac{x_1}{3} \quad . \quad \eta = \frac{y_1}{3}$$

Da nun x_1 und y_1 einem Punkte des Kreises angehören, also die Gleichung (1) identisch erfüllen müssen, so ergibt sich für den geometrischen Ort als Gleichung

$$\left(\eta-\frac{q}{3}\right)^2+\xi^2 = \left(\frac{r}{3}\right)^2$$

ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Ordinatenaxe in der Entfernung $\frac{q}{3}$ sich befindet, und dessen Radius gleich dem dritten Teile des Radius des umschriebenen Kreises ist.

Es sei H der Schnittpunkt der Höhen, seine Coordinaten ξ und η; übrigens sei alles wie zuvor; für ξ und η findet sich:

$$\xi = x_1 \qquad \eta = -\frac{\xi^2-p^2}{y_1} = \frac{p^2-x_1^2}{y_1}$$

Aus der Gleichung (1) aber folgt:

$$p^2-x_1^2 = y_1^2-2y_1q$$

mithin

$$\eta = y_1-2q$$

und daher also Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\xi^2+(\eta+q)^2 = r^2$$

d. i. ein Kreis, der mit dem umschriebenen gleichen Radius hat, und dessen Mittelpunkt auf der Ordinatenaxe in der Entfernung $-q$ liegt.

Etwas schwieriger gestaltet sich der Beweis für den dritten Fall den geometrischen Ort des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises betreffend, da das Auftreten von Wurzelgrössen weitläufige Rechnungen notwendig macht. Indessen ist es mir gelungen durch einige einfache geometrische Betrachtungen die Auflösung, wie ich glaube, möglichst einfach zu gestalten.

Aus der bekannten Gleichung für die Grösse des Radius des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises folgt für $\omega\pi = \eta$ der Wert

$$\eta = \frac{2p \cdot y_1}{2p + \sqrt{y_1^2 + (x_1 - p)^2} + \sqrt{y_1^2 + (x_1 + p)^2}}$$

Schafft man die Wurzelzeichen weg, und drückt mit Hilfe der Gleichung (1) alle x_1 durch y_1 aus, so resultirt folgende Bedingungsgleichung:

$$\alpha)\quad y_1 = \frac{\eta^2 + 2(r-q)\eta}{r-q}$$

Andrerseits muss der Punkt ω aus leicht einzusehenden Gründen immer auf der Geraden CO' liegen, deren Gleichung lautet:

$$\beta)\quad y = \frac{y_1 + r - q}{x_1} x + q - r$$

Eliminirt man mit Hilfe von (1) aus (β) die Grösse x_1, setzt ferner $x = \xi$ und $y = \eta$ aus der Gleichung (α), so wird

$$\frac{-p^2 \pm p\sqrt{r^2 - q^2 + y_1(r+q)}}{r+q} + r - q = \frac{y_1 + r - q}{\sqrt{r^2 - (y_1 - q)^2}}\xi$$

nach gehöriger Reduction folgt hieraus

$$\frac{p^2}{q+r} = \frac{\xi^2}{r+q+y_1}$$

Ersetzt man hierin den Wert y_1 durch η gemäss (α), so findet sich als Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\xi^2 + (\eta + r - q)^2 = 2r(r-q)$$

d. i. ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem unteren Durchschnitt des umschriebenen Kreises mit der Ordinatenaxe liegt (O'), und dessen Radius gleich ist AO'.

Der Beweis für den letzteren Ort lässt sich auch unschwer synthetisch führen. Bezeichnet man nämlich die Dreieckswinkel in gewohnter Weise mit α, β, γ, so ist

$$VAO' = \frac{\gamma}{2}$$

Nennt man einen Basiswinkel des gleichschenkligen Dreieckes $A\omega O'$ ψ, so ist wegen

$$\text{Wkl. } AO'C = \beta$$

$$\psi = 90^0 - \frac{\beta}{2}$$

und daher

$$\text{Wkl. } \omega A V = \psi - \frac{\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{w. z. } b. \text{ w.}$$

Es würde mich zu weit führen alle Fälle anzuführen, in denen vorstehende Oerter sehr einfache und elegante Dreiecksconstructionen erlauben; es genüge nur für den letzten Fall drei Aufgaben dieser Art anzuführen:

Von einem Dreiecke seien die Radien des um- und eingeschriebenen Kreises und die Basis oder ihr Gegenwinkel gegeben; oder: von einem Dreiecke sei die Basis, die Summe der Scheitelseiten und der Radius des eingeschriebenen Kreises gegeben. In diesen Fällen erlaubt der letzte geometrische Ort eine weit einfachere Construction als dies mit Hilfe der Rechnung und nachheriger Construction der berechneten Formel geschehen kann.

Karl Zelbr,
Assistent der k. k. Sternwarte zu Wien.

3.

Ueber die vollkommenen Zahlen, insbesondere über die bis jetzt zweifelhaften Fälle $2^{40}.(2^{41}-1)$, $2^{46}.(2^{47}-1)$ und $2^{52}.(2^{53}-1)$.

In einem Aufsatze von Krafft über die numeri perfecti (Comm. Petrop. T. VII. p. 7—14.) giebt dieser im Ganzen zehn solcher Zahlen an, als die einzigen bekannten. Die vollkommenen Zahlen (numeri perfecti) sind bekanntlich solche, für welche die Teilersumme der Zahl gleich dieser Zahl selbst ist. Die einfachste dieser Zahlen ist $6 = 1+2+3$; die allgemeine Formel ist $2^n(2^{n+1}-1) = N$ und zwar mit der Bedingung, dass der zweite Factor eine Primzahl ist. Bildet man nämlich unter dieser Voraussetzung die Divisorensumme von $2^n.(2^{n+1}-1)$, so erhält man für diese $(2^{n+1}-1).2^{n+1}$, mithin das Doppelte von N. Zieht man von der Divisorensumme N selbst ab, um die Summe der aliquoten Teiler zu erhalten, so ist letztere demnach gleich N.

Die von Krafft aufgeführten zehn numeri perfecti sind nun $2.(2^2-1)$, $2^2(2^3-1)$, $2^4(2^5-1)$, $2^6(2^7-1)$, $2^{12}(2^{13}-1)$, $2^{16}(2^{17}-1)$, $2^{18}(2^{19}-1)$, $2^{30}(2^{31}-1)$, $2^{40}(2^{41}-1)$ und $2^{46}(2^{47}-1)$.

Für die Zahlen 2^2-1 bis $2^{19}-1$ ist ihre Eigenschaft als Primzahlen sofort zu constatiren; $2^{31}-1=2147483647$ hat L. Euler als Primzahl erwiesen, und ich fand dies dadurch bestätigt, dass für die vier zusammengehörigen Formenclassen (1, 0, 13398); (22, 0, 609); (58, 0, 231); 42, 0, 319) nur eine einzige quadratische Darstellung möglich ist, nämlich $22.7001^2+609.1325^2$. Euler selbst hat den Nachweis dadurch geliefert, dass er die Zahl durch sämmtliche Primzahlen von den einzig möglichen Formen $248z+1$ und $248z+63$ bis zu der Quadratwurzel hin dividirte, ohne dass irgend einmal der Divisor aufging.

In Betreff der Zahlen $2^{41}-1$ und $2^{47}-1$ bemerkt Krafft, dass Euler in einer gelegentlichen Bemerkung diese für Primzahlen erklärt habe. Ich fand mich nun bewogen, nachdem ich schon vorher $2^{34}-1=223.616318177$ und $2^{43}-1=431.20408568497$ gefunden hatte[1]), auch jene beiden einer Prüfung zu unterwerfen. Es sei mir gestattet, das hierbei beobachtete Verfahren für eine der beiden, etwa $2^{47}-1$ kurz anzugeben.

Durch Ausziehung der Quadratwurzel aus $2^{47}-1=140737488355327$ findet man $2^{47}-1=11863283^2+4817238.1^2$.

Da nun jeder Prim-Divisor von 2^n-1, wenn n eine Primzahl ist, die Form $2nz+1$ haben muss, also für $2^{47}-1$ die Form $94z+1$, mit anderen Worten, da jeder Divisor $\equiv 1(47)$ ist, so muss auch -47 quadratischer Rest jedes Divisors sein. Es kam also darauf an, aus obiger quadratischen Darstellung, deren Determinante -4817238 ist, eine andere zu gewinnen, deren Determinante den Factor 47 enthielt. Setzt man zu dem Ende $(11863283-\alpha)^2$ statt 11863283^2, so hat man als Ausgleich zu dem zweiten Gliede $2.11863283\alpha-\alpha^2$ zu addiren. Für $\alpha=12$ wird dann der neue Wert des zweiten Gliedes $\equiv 0(47)$ und die weiteren Werte für α, unter welchen diese Congruenz fortbesteht, sind durch die Form $47x+2$ bestimmt. So findet man unter anderen

$$2^{47}-1=11863081^2+2.3.43.47(629^2)$$

Behält man jetzt für die Determinante die Factoren 3.43.47 bei, so muss von da an für α die Form $6063x+1643$ gebraucht werden, damit das zweite Glied $\equiv 0(3.43.47)$ bleibt. Es ergiebt sich dann ferner als Darstellung

$$2^{47}-1=11843249^2+2.3.43.47.17.37.73.853.$$

---

1) Zur Zeit war mir unbekannt, dass Krafft in dem citirten Aufsatze diese beiden Zerlegungen schon angiebt.

Auf diese beiden Darstellungen soll sich die Untersuchung im weiteren Verlaufe gründen. Das zweite Glied oder genauer gesprochen, der Coefficient der zweiten Glieder ist unter Hinzunahme des Vorzeichens (—) in beiden Fällen nichts anderes, als die Determinante. Erwägt man noch, dass $2^{47}-1$ mit 2 multiplicirt sich schreiben lässt $(2^{24})^2-2.1^2$, dass also -2 für sämmtliche Divisoren Rest sein muss, so können diese nur den Formen $8n+1$ oder $8n+4$ angehören. Sei also $N=2^{47}-1$, und F ein Factor von N, so folgt aus der ersten Dasstellung, dass $\left(\frac{F}{3}\right)$ und $\left(\frac{F}{43}\right)$ zugleich $=+1$ oder $=-1$ ist, da ja $\left(\frac{F}{47}\right)$ stets $=+1$ ist.

Aus der zweiten Darstellung ergiebt sich dann ferner, dass für

$$\left(\frac{F}{17}\right),\ \left(\frac{F}{37}\right),\ \left(\frac{F}{73}\right) \text{ und } \left(\frac{F}{853}\right)$$

die Anzahl der Nichtreste eine gerade sein muss. Die Anzahl der möglichen Primdivisoren ist somit wesentlich verringert, und man findet, wenn man für die zurückbleibende die Division ausführt, $N=2351.59862819377$. In ähnlicher Weise findet man

$$2^{41}-1=2199023255551=13767.164511353.$$

Endlich untersuchte ich noch $2^{53}-1$ und fand dies gleich

$$9007199254740991=69431.129728784761.$$

Beiläufig sei erwähnt, dass in allen diesen Zerlegungen der zweite Factor, sowol wie der erste Primzahlen sind.

Als Resultat der Untersuchungen ergiebt sich demnach, dass die aufeinanderfolgenden Zahlen $2^{37}-1$, $2^{41}-1$, $2^{43}-1$, $2^{47}-1$, $2^{53}-1$ keine Primzahlen sind und dass also die vollkommenen Zahlen bis jetzt auf die bekannten acht beschränkt bleiben müssen, nämlich

$$2(2^2-1),\ 2^2(2^3-1),\ 2^4(2^5-1),\ 2^6(2^7-1),\ 2^{12}(2^{13}-1),\ 2^{16}(2^{17}-1),$$
$$2^{18}(2^{19}-1),\ 2^{30}(2^{31}-1).$$

Seelhoff.

4.

Zur Analyse sehr grosser Zahlen.

In dem Folgenden möchte ich vorläufig nur kurz eine Methode angeben, welche die Schwierigkeiten der Analyse sehr grosser Zahlen wenigstens bedeutend vermindert. Ich habe hierbei Zahlen im Auge, welche über 1000 Million hinausgehen; denn bis zu dieser Grenze

und in manchen Fällen auch noch darüber hinaus verdienen die von mir der Mehrzahl nach erst gefundenen cca 160 Determinanten, welche sämtlich für die entsprechenden Zahlengattungen nur Darstellungen in der Form (m, o, n) zulassen, bei weitem der Vorzug.

Die Methode besteht wesentlich darin, eine Anzahl von einfachst möglichen Determinanten auf leichte Weise zu gewinnen, vermöge deren sich die in Frage kommenden Primdivisoren je auf die Hälfte reduciren lassen, so dass also beispielsweise sich deren Anzahl bei 10 Determinanten bis auf den 1024ten Teil vermindert. Ich lege zu ihrer Auseinandersetzung eine bestimmte Zahl zu Grunde, um mich kurz fassen zu können; es sei dies

$$N = 2^{64} + 1 = 18 \cdot 446744 \cdot 073709 \cdot 551617.$$

Setzt man

$$N = (4\,294\,967\,296 - \alpha)^2 + (8\,589\,934\,592 - \alpha)\,\alpha + 1$$

und nennt das erste Glied rechts A, die beiden anderen zusammengenommen B, die beiden Teile B_1 und B_2, so handelt es sich darum, B als ein Product $m.n \ldots b^2$ darzustellen, wobei dann, jenachdem B positiv oder negativ ist, die gesuchte Determinante $\mp mn \ldots$ wird. Die Primzahlen m, $n \ldots$ und ebenso die Functionen von b^2 können nur solche sein, für welche $\left(\frac{N}{m}\right)$, $\left(\frac{N}{n}\right)$ u. s. w. $= +1$ ist. In unserem Falle ist dies zunächst 13. Man hat aber $B_1 \equiv 5\,(13)$. Setzt man daher $(5 - \alpha)\,\alpha \equiv -1\,(13)$, damit das ganze B durch 13 teilbar wird, oder auch statt 5 die congruente Zahl -8, so ist die Congruenz $\alpha^2 + 8\alpha \equiv 1\,(13)$ zu lösen. Es sei zu diesem Zwecke $\alpha = -4 + z$, so ergiebt sich $z^2 - 4 \equiv 0\,(13)$ und $z = \pm 2$, also $\alpha \equiv -4 \pm 2$ oder $= 13u + 7$ oder 11. Ferner hat man $B_1 \equiv 57\,(13^2)$. Setzt man wieder $(57 - \alpha)\,\alpha \equiv -1\,(13^2)$ oder $\alpha^2 + 112\alpha \equiv 1\,(13^2)$ und $\alpha = -56 + z$, so findet man $z^2 - 95 \equiv 0\,(13^2)$ und $z = \pm 67$, also $\alpha \equiv -56 \pm 67 = 13^2 u + 11$ oder 46.

Für $\alpha = 13u + 7$ oder 11 oder für $\alpha = 13^2 u + 11$ oder 46 wird also B stets den Factor 13, resp. 13^2 haben. Bestimmt man den Wert von α in gleicher Weise für die übrigen hierher gehörigen Primzahlen bis 100 oder 200, so lassen sich leicht Combinationen finden, um gleichzeitig eine Anzahl von bestimmten Factoren resp. von deren Quadraten in B einzuführen, so dass die neuen, sich noch ergebenden Factoren nicht zu gross werden. Diese selbst kann man dann, da sich die Wurzeln der betreffenden Congruenz sofort ergeben, selbst mit in die Reihe der übrigen aufnehmen. Jenachdem man nun den Wert für α positiv oder negativ gewählt hat, wird die Determinante negativ resp. positiv.

Da diejenigen Factoren m ausgeschlossen waren, für welche $\left(\frac{N}{m}\right) = -1$ ist, so setze man ferner

$$N = 2 = 2(3037000499 - \alpha)^2 + 2(6074000998 - \alpha)\alpha + 11857053615$$

und nenne wieder die Teile rechts A und B, resp. B_1 und B_2.

Jetzt treten die Primzahlen m ein, für welche $\left(\frac{2N}{m}\right) = +1$ ist. Die erste ist 3. Man hat $B_1 \equiv 1\,(3)$ und $B_2 \equiv 0\,(3)$, also ist die Congruenz $2(\alpha^2 + 2\alpha) \equiv 0\,(3)$ oder $\alpha^2 + 2\alpha \equiv 0\,(3)$ zu lösen. Zu dem Ende sei $\alpha = -1 + z$, dann ist $z = \pm 1$, woraus $\alpha = 3u + 0$ oder 1 folgt. Ferner $B_1 \equiv 7\,(3^2)$ und $B_2 \equiv 6\,(3^2)$, mithin $2(\alpha^2 + 2\alpha) \equiv 6\,(3^2)$ oder $\alpha^2 + 2\alpha \equiv 3\,(3^2)$. Man erhält $\alpha = 3^2 u + 1$ oder 6 u. s. w.

Aehnlich kann man noch für

$$N = 3(24797000524 - \alpha)^2 + 3(4959401048 - \alpha)\alpha + 7531927889$$

u. s. w. verfahren, wobei jedesmal eine Anzahl der früheren Primzahlen austritt, um durch andere ersetzt zu werden. Es ist wol kaum nötig, zu bemerken, dass die rechte Seite der jedesmaligen Congruenz so umzuformen ist, dass sie sich zunächst durch den gewählten Factor a in $a.A$ teilen lässt.

Auf diese Weise erhielt ich für die vorliegende Zahl unter anderen folgende Determinanten, deren Vorzeichen weggelassen ist, weil die Zahl von der Form $4n + 1$ ist.

3.11.67.157.673
3.13.31.599.1069
13.17.29.317.421
3.5.13.97.563.757
13.191.2777
41.97.1597
3.5.397.2113
3.7.19.421.3041
13.163.193.1091 u. s. w.

Aus dem Canon arithmeticus von C. G. J. Jacobi kann man ohne Weiteres für die Primzahlen bis 1000 die quadratischen Reste entnehmen und benutzt man die Determinanten mit grösseren Factoren erst gegen Ende hin, so machen auch diese keine besonderen Schwierigkeiten.

Dies ist in kurzen Umrissen die Methode, um die Determinanten zu finden; wie dieselbe benutzt wird, um die nicht geeigneten Primzahlen auszuschliessen, kann als bekannt vorausgesetzt werden.

Was nun den speciell vorliegenden Fall anderweit betrifft, so hatte ich schon früher festgestellt, dass $2^{64}+1$ keine Primzahl ist und ich vermutete ferner auf Grund einiger Untersuchungen, dass einer der Factoren nicht allzu hoch sein würde. Meine Prüfung erstreckte sich daher mit Hülfe obiger Determinanten auf die Zahlen bis 400000, und ich blieb zuletzt bei den Zahlen 211969, 267649 und 274177 stehen, deren letzte ein Divisor von $2^{64}+1$ ist. Man hat nämlich, wie bereits von M. Landry (Mondes 2. série LII.) gefunden:

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,617 = 274\,177 . 67\,280\,421\,310\,721$$

Bis jetzt kennt man von den Zahlen $2^{2^n}+1$ vier als zusammengesetzte:

$2^{2^5}+1$ mit dem Factor 641. (L. Euler. Mémoires de Berlin. Année 1772).

$2^{2^{12}}+1$ mit dem Factor 114689 } Bulletin de l' Ac. des sciences St. Petersburg 1878 u. 1879. J. Pervouchine.

$2^{2^{23}}+1$ mit dem Factor 167772161 }

$2^{2^{26}}+1$ mit dem Factor 274177.

direct analysirt sind die erste und letzte.

Beiläufig erwähne ich noch die beiden Darstellungen als Summe zweier Quadrate.

$$2^{64}+1 = 4\,294\,967\,296^2+1$$

$$4\,046\,803\,256^2+1\,438\,793\,759^2.$$

Bremen, März 1885. P. Seelhoff.

5.

Bemerkungen über Gleichungsauflösung.

1.

Die Methoden, Gleichungen aufzulösen, wie sehr sie auch im Einzelnen von einander abweichen mögen, haben doch das Eine ge-

meinsam: Sie beruhen sämtlich in letzter Instanz auf irgend einem unendlichen Process, der zur Grenze führt. [Dass der Process in besondern Fällen auch abbrechen kann, ist bekannt.] Dieses gilt für die sogenannten exacten Methoden, welche in der Reduction der Gleichungen der vier ersten Grade auf Wurzelgrössen bestehen, ganz ebenso, wie bei dem Newton'schen Näherungsverfahren oder bei Lagrange's Entwicklung einer Wurzel der Gleichung in einen Kettenbruch.

Die folgende Bemerkung bezieht sich auf alle derartige Algorithmen und hat den Zweck, die überaus grosse Mannichfaltigkeit denkbarer Methoden der Gleichungs**auflösung** zu veranschaulichen.

Sei $f(x = 0$ die Gleichung, um deren Auflösung es sich handelt, so bringe man dieselbe auf irgend eine Weise auf die Form

$$x = \varphi(x),$$

[was sich auf unendlich viele Arten bewerkstelligen lässt.]

Alsdann wähle man einen beliebigen Anfangswert x_0 und bilde dann vermittelst der Function φ successive die Reihe von Werten:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0) \\ x_2 &= \varphi(x_1) \\ x_3 &= \varphi(x_2) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n+1} &= \varphi(x_n) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Erweist sich sich die gefundene Reihe als eine einem bestimmten Grenzwert zustrebende Zahlenfolge, so ist der Grenzwert eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Der Beweis dieser Behauptung folgt unmittelear aus den Prämissen.

2.

Die Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung kann entweder **direct** in Angriff genommen, also ein dazu dienlicher unendlicher Process aufgestellt werden, oder man **reducirt** die gegebene Gleichung zunächst auf eine andere, deren Auflösung bereits bekannt ist. Dieses letztere Verfahren, die Reduction, ist es nun, welches

vorzugsweise gemeint wird, wenn man von der Auflösung der Gleichungen spricht. Man weiss, auf wie mannichfaltige Weise sich die Reduction der Gleichungen der vier ersten Grade auf Wurzelgrössen, also auf die binomische Gleichung $x^n = w$, bewerkstelligen lässt.

Das hohe Interesse dieser Reductionen (Auflösungen) für den Mathematiker ist wohl vornehmlich in dem Umstande begründet, dass die Function $\sqrt[n]{w}$ nur von der einzigen Variabeln w abhängt, falls man nämlich den Wurzelexponenten n nicht ebenfalls als einen Paramater des Problems ansehen will.

Man kann aber auch, wie seit Jerrard's Entdeckung betreffs der Gleichung fünften Grades bekannt ist, die Gleichungen der fünf ersten Grade auf Functionen von nur einer Variabeln zurückführen, nämlich auf die trinomischen Gleichungen $z^n - z = w$.

Allerdings darf nicht übersehen werden, dass die Auffassung der Wurzeln der Gleichung $z^n - z = w$ als Functionen nur eines Parameters als eine künstliche, eigentlich nicht ganz zutreffende angesehen werden muss; denn w ist im Allgemeinen eine complexe Grösse, und eine Function $f(u + iv)$ einer complexen Veränderlichen $u + iv$ wird, wenn man die Berechnung durchführt, in den meisten Fällen (nicht immer) doch schliesslich von Functionen zweier Argumente abhängig.

Die Function $\sqrt[n]{w}$ dagegen lässt sich, wie man weiss, auf die Form bringen:

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{u^2 + v^2} \,.\, e^{\frac{i}{n}\left(2k\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{u}\right)}.$$

also das Product zweier Functionen je eines linearen Arguments darstellen, und hierin allein beruht meines Erachtens der theoretische Vorzug der Reduction einer Gleichung auf Wurzelgrössen vor der Reduction auf beliebige andere Functionen nur eines complexen Arguments, wie beispielsweise auf die Wurzeln der Gleichung $z^n - z = w$.

3.

Der folgende Algorithmus, welcher zur Berechnung der Wurzeln der Gleichung $z^n - z = w$ dient, scheint mir aus mehreren Gründen bemerkenswert.

Berechnet man vermittelst der Formel

$$z_{k+1} = \sqrt[n]{w + z_k}$$

indem man von einem beliebigen Anfangswerte z_0 ausgeht und einen beliebigen von den n Wurzelwerten $\sqrt[n]{\ }$, aber stets denselben, benutzt, successive die Reihe $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k, \ldots$, so convergirt dieselbe zu einem bestimmten Grenzwert, und dieser ist eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Da ich im Besitz eines allgemeinen und stringenten Beweises dieser Behauptung noch nicht bin, so wäre es nicht undenkbar (wiewol mir unwahrscheinlich), dass dieselbe noch eingeschränkt werden müsste.

Vielleicht genügt Folgendes zur Verification derselben.

a) Für $w = 0$ ist der Satz richtig. Sei nämlich $z_0 = \varrho_0 e^{i\vartheta_0}$ der beliebige Anfangswert, so folgt leicht, wenn man jedesmal den νten der n Wurzelwerte wählt,

$$z_k = e^{i\left(\frac{2\nu\pi}{n} + \frac{2\nu\pi}{n^2} + \frac{2\nu\pi}{n^3} + \cdots + \frac{2\nu\pi}{n^k} + \frac{\vartheta_0}{n^k}\right)} \sqrt[n^\nu]{\varrho_0}$$

$$\text{also für } h = \infty,\ z_\infty = z = e^{i\frac{2\nu\pi}{n-1}}.$$

Das giebt für $\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1$ in der Tat $n-1$ der n Wurzeln der Gleichung $z^n - z = 0$. Die Wurzel $z = 0$ folgt freilich hieraus nicht und bleibt demnach auf diesem Wege unerreichbar.

b) Es ist leicht für einen beliebigen positiven reellen Wert w die reelle Wurzel der Gleichung auf diesem Wege numerisch zu berechnen.

Beispiel. $z^5 - z = 100$, also $z = \sqrt[5]{100+z}$.

Ich setze willkürlich $z_0 = 1000$, so folgt:

$$z_1 = 4{,}0576$$
$$z_2 = 2{,}5320$$
$$z_3 = 2{,}5245$$
$$z_4 = 2{,}5244.$$

Also ist eine reelle Wurzel der Gleichung so genau, als es sich vermittelst fünfstelliger Logarithmen ausführen lässt, gefunden.

Anmerkung. Für complexe Grössen verliert dieser Algorithmus viel von seiner Einfachheit, weil die jedesmalige Separation des Reellen und Imaginären Umstände macht. Man könnte demselben aber seine Einfachheit erhalten, wenn man im Besitz einer

Tafel wäre, in welcher die Logorithmen complexer Zahlen (für die Basis 10) zusammengestellt sind. Die Aufgabe, eine derartige Tafel zu construiren ist, wenn man sich auf eine geringe Anzahl von Decimalstellen beschränkt, ganz gut durchführbar, und würden solche Tafeln bei der steigenden Wichtigkeit der Theorie der conformen Abbildungen für die Physik auch sonst von Nutzen sein.

4.

Der soeben betrachtete Algorithmus kann mit Leichtigkeit auf jede beliebige Gleichung ausgedehnt werden, indem man sie auf die Form bringt:

$$z = \sqrt[n]{a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n};$$

derselbe ist aber nur einer unter vielen, welcher freilich durch den Umstand, dass er n-deutig ist und daher (falls er convergirt) sämtliche Wurzeln der Gleichung geben kann, einen Vorzug vor andern zu haben scheint.

Um zu zeigen, dass auch andere Formeln zur Grenze führen können, möge das Beispiel

$$z^2 - 2z - 35 = 0$$

betrachtet werden. Hieraus folgt unter Andern:

$$z = 2 + \frac{35}{z}.$$

Die Benutzung dieser Formel liefert für den willkürlichen Anfangswert $z_0 = \infty$:

$$z_0 = \infty,\ z_2 = 19{,}5,\ z_4 = 11{,}4,\ z_6 = 7{,}8,\ z_{10} = 7{,}4,\ z_{12} = 7{,}2,\ z_{14} = 7{,}1$$

$$z_1 = 2,\ z_3 = 3{,}7,\ z_5 = 5,\ z_9 = 6{,}5,\ z_{11} = 6{,}7,\ z_{13} = 6{,}9,\ z_{15} = 6{,}93$$

Also nähert sich diese Folge von Werten der Wurzel $z = 7$.

Benutzt man dagegen die Formel $z = \frac{z^2 - 35}{2}$ beispielsweise mit $z_0 = 7{,}1$, so divergirt der Algorithmus.

Die Frage, wann derartige Algorithmen convergiren und wann sie divergiren involvirt meines Erachtens ein höchst interessantes Problem [falls dasselbe noch nicht gelöst sein sollte].

Königsberg, Sept. 1884. Th. Sanio.

XVI.

Die Cono-Cunei.

Von

Carl Pabst.

Fortsetzung von Nr. XIV.

IV. Abschnitt.

Der elliptische und die hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei.

§ 21.

Bevor wir in der Betrachtung der geraden Cono-Cunei fortfahren und zum geraden parabolischen Cono-Cuneus übergehen, wollen wir uns zu den elliptischen und den hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei wenden.

Was zunächst den elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus betrifft, so nehmen wir hierbei als Gleichungen der Leitellipse:

$$(75) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} &= 1 \\ z &= c \end{aligned} \right.$$

die XZ-Ebene demnach als Directorebene und als singuläre Kante die Y-Axe. Die erzeugenden Geraden müssen mithin den Gleichungen genügen:

$$x = u.z; \quad y = v,$$

wodurch man als Gleichung des in Rede stehenden Cono-Cuneus erhält:

$$\frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2}{\left(\frac{a}{c}z\right)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{76}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die vorgelegte Fläche ebenso wie der gerade elliptische Cono-Cuneus vom vierten Grade ist. Ferner stimmen die beiden elliptischen Cono-Cunei darin überein, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene aus ihnen eine Ellipse ausschneidet, deren eine Axe für alle ausgeschnittenen Ellipsen constant ist, und deren andere Axe proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante wächst. Ein Kreis wird aus dem elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) für $z=\frac{bc}{a}$ ausgeschnitten.

Diejenigen Ellipsen des vorgelegten Cono-Cuneus (76), deren Entfernung von der singulären Kante absolute kleiner als $\frac{bc}{a}$ ist, haben ihre grossen Axen $=2b$ in einer Ebene, welche durch die singuläre Kante geht und mit der Ellipsenebene einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{c}{a}$ ist, ihre kleinen Axen $=2\frac{a}{c}z$ in der XZ-Ebene; diejenigen dagegen, deren Abstand von der singulären Kante absolute grösser als $\frac{bc}{a}$ ist, haben ihre grossen Axen $=2\frac{a}{c}z$ in der XZ-Ebene, und ihre kleinen in der eben beschriebenen, durch die singuläre Kante gehenden Ebene.

Daraus geht hervor, dass der gerade elliptische Cono-Cuneus und der elliptische Scheitel-Cono-Cuneus sich darin unterscheiden, dass bei jenem die Mittelpunkte der ausgeschnittenen Ellipsen auf einer Geraden liegen, die auf der Ellipsenebene senkrecht steht, während bei diesem der geometrische Ort der Mittelpunkte der Ellipsen eine Gerade ist, welche mit der Ellipsenebene einen schiefen Winkel bildet. Bei beiden Cono-Cuneis gehen diese Geraden durch die singuläre Kante und stehen auf derselben senkrecht.

Ferner ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve der Ebene $x=k$ mit der vorgelegten Fläche auf die YZ-Ebene:

$$y^2=\left(\frac{bc}{az}\right)^2 k\left(2\frac{a}{c}z-k\right) \tag{77}$$

Ist $k > 0$, so giebt es demnach nur reelle Werte von y, wenn $z > 0$ ist, und umgekehrt ist $k < 0$, so giebt es nur reelle Werte von y, wenn $z < 0$ ist. D. h. die Durchschnittscurve liegt entweder auf der positiven oder auf der negativen Seite der z-Axe, nicht aber auf beiden zugleich. Sie schneidet die z-Axe im Punkte $y = 0$, $z = \frac{ck}{2a}$. Ist $z < \frac{ck}{2a}$, wenn $k > 0$ ist, so giebt es keine reellen Werte für y, Die Curve liegt symmetrisch zur z-Axe und erstreckt sich von $z = \frac{ck}{2a}$ bis $z = \infty$. Sie ist in allen ihren Punkten convex nach der Y-Axe hin; in ihrem Durchschnittspunkte mit der z-Axe ist ihre Tangente der Y-Axe parallel.

Daraus geht hervor, dass der elliptische Scheitel-Cono-Cuneus (76) nur in 4 Octanten liegt, während der gerade elliptische Cono-Cuneus (17) sich in allen 8 Octanten erstreckt.

Die auf der singulären Kante senkrecht stehende Ebene $y = h$ schneidet aus dem elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) die beiden Erzeugenden aus, deren Projectionen auf die XZ-Ebene der Gleichung genügen:

$$x = \frac{a(b \pm \sqrt{b^2 - h^2})}{bc} z \tag{78}$$

§ 22.

Wir haben im vorigen § gesehen, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene aus dem elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) eine Ellipse ausschneidet. Betrachten wir die beiden Ellipsen in den Entfernungen h_1 und h_2 von der singulären Kante, so ergiebt sich, wenn $h_1 > \frac{bc}{a}$ ist, für das Axenverhältniss der zu h_1 zugehörigen Ellipse $\frac{ah_1}{bc}$, und wenn $h_2 < \frac{bc}{a}$ ist, für das Axenverhältniss der zu h_2 zugehörigen Ellipse: $\frac{bc}{ah_2}$. Sollen diese beiden Verhältnisse einander gleich sein, so erhält man demnach die Relation:

$$h_1 . h_2 = \left(\frac{bc}{a}\right)^2$$

Nun war $\frac{bc}{a}$ die Entfernung des Kreisschnittes von der singulären Kante des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76). Mithin resultirt der Satz: Diejenigen beiden Ellipsen des elliptischen Scheitel-

Cono-Cuneus, welche so auf dieser Fläche liegen, dass das Product ihrer Abstände von der singulären Kante gleich dem Quadrat der Entfernung des Kreisschnittes von derselben Kante ist, haben dasselbe Axenverhältniss.

Es ist dies derselbe Satz, den wir beim geraden elliptischen Cono-Cuneus in § 10 nachgewiesen haben. Hieraus ergeben sich auch dieselben Beziehungen in Bezug auf die Entfernungen der beiden Ellipsen von dem Kreisschnitte wie dort.

Betrachtet man ferner die Brennpunkte der ausgeschnittenen Ellipsen, so geht aus dem vorigen § hervor, dass die Brennpunkte derjenigen Ellipsen, deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich oder kleiner als $\frac{bc}{a}$ ist, in einer durch die singuläre Kante gehenden Ebene liegen, welche mit der Z-Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{a}{c}$ ist. Der Abstand eines solchen Brennpunktes von der XZ-Ebene ist $\sqrt{b^2-\left(\frac{az}{c}\right)^2}$.

Für den geometrischen Ort dieser Brennpunkte ergiebt sich demnach die Ellipse:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{a^2 z^2}{b^2 c^2}=1 \tag{79}$$

Vergleichen wir hiermit das Resultat (21) in § 10., so folgt der Satz: Sind der gerade elliptische Cono-Cuneus und der elliptische Scheitel-Cono-Cuneus, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, so beschaffen, dass eine und dieselbe Ebene aus jedem einen Kreis mit dem Radius a ausschneidet, so ist der geometrische Ort der Brennpunkte der Ellipsen des geraden Cono-Cuneus, deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich oder kleiner als der des Kreises derselben Fläche ist, gleich dem geometrischen Ort der Brennpunkte der entsprechenden Ellipsen des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus.

Auf analoge Weise erhält man für den geometrischen Ort der Brennpunkte derjenigen Ellipsen des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76), deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich oder grösser als $\frac{bc}{a}$ ist:

$$x^2-2\frac{axz}{c}+b^2=0 \tag{80}$$

d. h. die in Rede stehenden Brennpunkte liegen in der XZ-Ebene

auf einer Hyperbel, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang, deren reelle Axe $= 2b\sqrt{\frac{2c}{\sqrt{4a^2+c^2}-c}}$ und deren imaginäre Axe $= 2b\sqrt{\frac{2c}{\sqrt{4a^2+c^2}+c}}$ ist.

§ 23.

Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Tangentialebene im Punkte xyz des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) über, so erhalten wir als deren Gleichung, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$\left(x-\frac{az}{c}\right)(\xi-x)+\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta-y)-\left\{\frac{a}{c}\left(x-\frac{az}{c}\right)-\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right\}(\zeta-z)=0$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (76):

$$(81)\quad \left(x-\frac{az}{c}\right)\xi+\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta-y)-\left\{\frac{a}{c}\left(x-\frac{az}{c}\right)-\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right\}\zeta=0$$

Für $x=0$ erhält man hieraus: $\xi=0$, d. h. der vorgelegte Cono-Cuneus berührt die YZ-Ebene. Ferner ergiebt sich für $z=0$:

$$\xi=\frac{a(b\pm\sqrt{b^2-y^2})}{bc}\zeta$$

d. h. In den Punkten der singulären Kante giebt es je zwei Tangentialebenen an den elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus, welche sich in der singulären Kante schneiden. Diese Tangentialebenen schneiden im Allgemeinen, ebenso wie beim geraden elliptischen Cono-Cuneus, je zwei erzeugende Geraden aus der Fläche aus.

Diejenigen Tangentialebenen, welche die vorgelegte Fläche längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden berühren, haben ihre Berührungspunkte auf den Geraden, welche den Coordinaten genügen: einerseits $y=\pm b$, andererseits $x=0$ und $x=2\frac{a}{c}z$. Es giebt demnach, ebenso wie beim geraden elliptischen Cono-Cuneus, auch hier 4 Erzeugende, in welchen die Tangentialebenen den elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus längs der ganzen Erzeugenden berühren. Die ersteren dieser Tangentialebenen haben,

wie sich nach kurzer Ueberlegung zeigt, die Eigenschaft, dass sie aus dem vorgelegten Cono-Cuneus nur die betreffenden Erzeugenden schneiden, während die Durchschnittscurve der anderen mit der Fläche (76) aus der Erzeugenden und der singulären Kante besteht.

Schliesslich erhält man für das Volumen V zwischen den Ebenen $y = 0$, $y = y_0$, $z = z_0$ und dem zugehörigen Teil des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76):

$$V = \int_0^{y_0} \int_0^{z_0} (x_1 - x_2)\, dy\, dz$$

Aus der Gleichung (76) ergiebt sich:

$$x_{1,2} = \frac{az}{c} \pm \frac{az}{bc} \sqrt{b^2 - y^2}$$

folglich:

$$x_1 - x_2 = 2\frac{az}{bc} \sqrt{b^2 - y^2}$$

Demnach resultirt:

$$V = 2\frac{a}{bc} \int_0^{y_0} dy \sqrt{b^2 - y^2} \int_0^{z_0} z\, dz$$

$$V = \frac{az_0}{bc} \left\{ \tfrac{1}{2} y_0 \sqrt{b^2 - y_0^2} + \tfrac{1}{2} b^2 \arcsin\left(\frac{y_0}{b}\right) \right\} \tag{82}$$

Von diesen Volumen gelten dieselben Sätze wie von demjenigen des geraden elliptischen Cono-Cuneus.

§ 24.

Um jetzt die Gleichung des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus abzuleiten, nehmen wir als Gleichungen der Leithyperbel:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{(x-a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ z &= c \end{aligned} \right. \tag{83}$$

Nach der Definition des § 3. muss dann die Y-Axe singuläre Kante, die XZ-Ebene Directorebene werden, so dass man als Gleichung des betreffenden Cono-Cuneus erhält:

$$\frac{\left(x - \frac{a}{c} z\right)^2}{\left(\frac{a}{c} z\right)^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{84}$$

Aus dieser Gleichung geht zunächst hervor, dass die Fläche vierten Grades nur symmetrisch zur XZ-Ebene liegt. Ausserdem ist ersichtlich, dass x, y und z alle beliebigen Werte annehmen können.

Jede zur XY-Ebene parallele Ebene schneidet ferner aus dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) im Allgemeinen eine Hyperbel mit den Halbaxen $\frac{a}{c}z$ und b aus. Die reellen Axen dieser Hyperbeln liegen in der XZ-Ebene und wachsen proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante; die imaginären Axen dagegen sind für alle ausgeschnittenen Hyperbeln $= 2b$ und liegen in einer durch die singuläre Kante gehenden Ebene, welche mit der Z-Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{a}{c}$ ist.

Daraus folgt, dass die Mittelpunkte der Hyperbeln des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) in der XZ-Ebene liegen und zwar auf einer Geraden, welche durch den Coordinatenanfang geht und mit der Hyperbelebene einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{c}{a}$ ist.

Während also bei den geraden hyperbolischen Cono-Cuneis der geometrische Ort der Mittelpunkte ihrer Hyperbeln eine Gerade ist, welche durch die singuläre Kante geht und auf der Hyperbelebene senkrecht steht, schneidet die Gerade, auf welcher die Mittelpunkte der Hyperbeln des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus liegen, zwar die singuläre Kante dieser Fläche rechtwinklig, bildet aber mit der Hyperbelebene einen schiefen Winkel.

Ferner folgt aus diesen Erörterungen, dass die Scheitel der aus der vorgelegten Fläche ausgeschnittenen Hyperbeln sich von $z = \infty$ bis $z = 0$ einander nähern, bis sie für $z = 0$ zusammenfallen. Diese Eigenschaft hat der vorgelegte Cono-Cuneus mit dem geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus gemein. Während aber bei diesem die Scheitel auf zwei Geraden liegen, welche durch die singuläre Kante gehen und mit der Hyperbelebene gleiche, schiefe Winkel bilden, liegen bei dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus die Scheitel auf zwei Geraden, welche sich zwar in der singulären Kante schneiden und auf derselben senkrecht stehen, von denen aber die eine einen rechten, die andere einen schiefen Winkel mit der Hyperbelebene bildet.

Aus der Gleichung (84) ergiebt sich ausserdem, dass die zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante

absolute gleich $\frac{bc}{a}$ ist, eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter b aus dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) ausschneidet.

Ziehen wir nun die Brennpunkte der ausgeschnittenen Hyperbeln in Betracht, so resultirt aus dem Gesagten, dass sie sämmtlich in der XZ-Ebene liegen. Die Entfernung eines solchen Brennpunktes von der Z-Axe ist: $\frac{a}{c}z \pm \sqrt{\left(\frac{a}{c}z\right)^2 + b^2}$. Für den geometrischen Ort derselben erhält man demnach:

$$x^2 - 2\frac{a}{c}xz - b^2 = 0 \tag{85}$$

d. h. in Worten: Der geometriche Ort der Brennpunkte aller Hyperbeln, welche durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) ausgeschnitten werden, ist eine Hyperbel in der XZ-Ebene, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist.

Was schliesslich die Asymptoten einer solchen ausgeschnittenen Hyperbel betrifft, so genügen dieselben der Gleichung:

$$y = \pm \frac{bc}{az}\left(x - \frac{a}{c}z\right)$$

Sie liegen mithin auf den beiden hyperbolischen Paraboloiden:

$$\left.\begin{array}{l} ayz - b(cx - az) = 0 \\ ayz + b(cx - az) = 0 \end{array}\right\} \tag{86}$$

§. 25.

Gehen wir jetzt zur Betrachtung der **Tangentialebene** im Punkte xyz des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84). Als Gleichung derselben resultirt:

$$x - \frac{a}{c}z)(\xi - x) - \left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta - y) - \left\{\frac{a}{c}\left(x - \frac{a}{c}z\right) + \frac{a^2 z}{b^2 c^2}(y^2 + b^2)\right\}(\zeta - z) = 0$$

oder:

$$(87)\quad \left(x-\frac{a}{c}z\right)\xi-\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta-y)-\left\{\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2+c^2)\right\}\zeta=0$$

Für $z=0$ ergiebt sich hieraus mit Berücksichtigung der Gleichung (84):

$$\xi=\frac{a(b\pm\sqrt{y^2+b^2})}{bc}\zeta$$

d. h. In jedem Punkte der singulären Kante giebt es je zwei Tangentialebenen an die vorgelegte Fläche, welche durch die singuläre Kante gehen. Es gilt demnach auch von dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus der Satz, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene im Allgemeinen eine Tangentialebene ist.

Diejenigen Punkte, in denen die Tangentialebene den einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden berührt, gehören zu $y=0$, d. h. sie liegen auf den Durchschnittslinien der Fläche mit der XZ-Ebene. Dafür ergiebt sich nun:

$$\xi=0$$

$$\xi=2\frac{a}{c}z$$

Es folgt daraus, dass die YZ-Ebene hier ebenso wie beim elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) eine Tangentialebene ist.

Schneidet man schliesslich den einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) durch die Ebenen $y=y_0$, $z=z_0$, so ergiebt sich für das Volumen zwischen den Ebenen $y=0$, $y=y_0$, $z=z_0$ und dem zugehörigen Teil der Fläche einerseits:

$$V_1=\int_0^{y_0}\int_0^{z_0} x_1\,dy\,dz$$

andererseits:

$$V_2=\int_0^{y_0}\int_0^{z_0} x_2\,dy\,dz,$$

wobei, wie aus der Gleichung (84) folgt:

$$x_1=\frac{az}{bc}(\sqrt{y^2+b^2}+b)$$

$$x_2=\frac{az}{bc}(\sqrt{y^2+b^2}-b)$$

Mithin erhält man:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2a}{bc}\int_0^{y_0} dy\sqrt{y^2+b^2}\int_0^{z_0} z\,dz$$

$$(88)\qquad V = \frac{az_0^2}{bc}\left\{\tfrac{1}{2}y_0\sqrt{y_0^2+b^2} + \tfrac{1}{2}b^2\lg\left(\frac{y_0+\sqrt{y_0^2+b^2}}{b}\right)\right\}.$$

§ 26.

Zur Untersuchung des **geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus** nehmen wir an, die Leithyperbel werde durch die Gleichungen dargestellt:

$$(89)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{(y-b)^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$$

Alsdann muss gemäss den Erörterungen des § 3. die YZ-Ebene Directorebene und die X-Axe singuläre Kante werden, so dass man als Gleichung des betreffenden Cono-Cuneus erhält:

$$(90)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(y - \frac{b}{c}z\right)^2}{\left(\frac{b}{c}z\right)^2} = 1.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der geteilte hyperbolische Scheitel-Cono-Cuneus (90) vom vierten Grade ist und symmetrisch zur YZ-Ebene liegt. Für val. abs. $x < a$ giebt es keine reellen Werte für y und z. Die vorgelegte Fläche besteht demnach aus zwei, auf beiden Seiten der YZ-Ebene liegenden, von einander getrennten Teilen, woher die Bezeichnung „geteilt" entnommen ist.

Ferner geht aus der Gleichung (90) hervor, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene die vorgelegte Fläche in einer Hyperbel schneidet, deren reelle Axe $=2a$, deren imaginäre Axe $=2\frac{b}{c}z$ ist. Eine gleichseitige Hyperbel wird demnach aus dem geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) durch eine Ebene parallel der XY-Ebene ausgeschnitten, deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich $\frac{ac}{b}$ ist.

Die imaginären Axen der ausgeschnittenen Hyperbeln liegen in der YZ-Ebene und wachsen proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante; die reellen dagegen sind

für alle ausgeschnittenen Hyperbeln gleich $2a$ und liegen in einer Ebene, welche durch die singuläre Kante geht, und welche mit der Hyperbelebene einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{b}{c}$ ist.

Auch hierbei ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der ausgeschnittenen Hyperbeln, wie sich aus dem Gesagten ergibt, eine gerade Linie, welche durch die singuläre Kante geht, auf derselben senkrecht steht, mit der Hyperbelebene aber einen Winkel bildet, dessen trigonometriche Tangente gleich $\frac{c}{b}$ ist. Es ist dies eine analoge Beziehung, wie wir sie bei dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus nachgewiesen haben. Da dieselbe Relation auch von dem elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus gilt, so bezeichnet dieselbe ein durchgreifendes Unterscheidungsmerkmal zwischen den geraden und den Scheitel-Cono-Cuneis, vorausgesetzt, dass der Leitkegelschnitt einen Mittelpunkt hat.

Weil die reellen Axen der aus dem geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) ausgeschnittenen Hyperbeln in einer durch die singuläre Kante gehenden Ebene liegen, welche mit der Z-Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{b}{c}$ ist, so liegen auch die Brennpunkte der Hyperbeln in dieser Ebene. Für die Entfernung eines solchen Brennpunkts von der YZ-Ebene erhält man aus der Gleichung (90): $\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{c} z\right)^2}$. Die Brennpunkte liegen demnach in der beschriebenen Ebene auf der Curve:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2 z^2}{a^2 c^2} = 1 \tag{91}$$

d. h. Der geometrische Ort der Brennpunkte der durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dem geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) ausgeschnittenen Hyperbeln ist eine Hyperbel mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren reelle Axe $= 2a$ und deren imaginäre Axe $= 2\frac{ac}{b}$ ist.

Aus der Vergleichung von (90) und (91) folgt, wenn man $\frac{b}{c} z = \frac{ac}{b}$ setzt:

$$z = \frac{ac^2}{b^2} \tag{92}$$

Bezeichnen wir $\frac{ac}{b}$ mit c', wobei c', wie aus dem Obigen hervorgeht, die Entfernung der gleichseitigen Hyperbel des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) von seiner singulären Kante bedeutet, so geht die Gleichung (92) über in:

$$z = \frac{c'^2}{a}$$

Daraus fliesst der Satz: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu dem halben Parameter und dem Abstande der gleichseitigen Hyperbel des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus von dessen singulärer Kante ist, schneidet aus dieser Fläche eine Hyperbel aus, welche gleich ist dem geometrischen Orte der Brennpunkte aller durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dieser Fläche ausgeschnittenen Hyperbeln.

Diese Eigenschaft hat der vorgelegte Cono-Cuneus mit dem geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus gemeinsam.

Die Asymptoten einer Hyperbel des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) genügen der Gleichung:

$$y - \frac{b}{c} z = \pm \frac{bz}{ac} x$$

Die Asymptoten aller Hyperbeln der vorgelegten Fläche liegen demnach auf den beiden hyperbolischen Paraboloiden:

$$(93) \qquad \begin{cases} bxz - a(cy - bz) = 0 \\ bxz + a(cy - bz) = 0 \end{cases}$$

Dreht man den vorgelegten Cono-Cuneus um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so dass die positive X-Axe in die negative Y-Axe fällt, dann hat man nur y mit x zu vertauschen; alles Uebrige bleibt ungeändert. Führen wir diese Vertauschung in den Gleichungen (93) aus, so gehen dieselben über in:

$$byz - a(cx - bz) = 0$$
$$byz + a(cx - bz) = 0$$

Beachten wir hierbei die Gleichungen (86) im § 24., so resultirt der Satz: Haben der einfache und der geteilte hyperbolische Scheitel-Cono-Cuneus dieselbe singuläre Kante und dieselbe Directorebene und sind sie so beschaffen, dass eine und dieselbe Ebene aus den beiden Flächen je eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a

ausschneidet, so liegen die Asymptoten der aus beiden Flächen ausgeschnittenen Hyperbeln auf denselben beiden hyperbolischen Paraboloiden.

Es ist dies ein analoger Satz, wie wir ihn von den beiden geraden hyperbolischen Cono-Cuneis im § 19. nachgewiesen haben.

Zugleich ergiebt sich hieraus, dass die geraden hyperbolischen Cono-Cunei und die hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei das mit einander gemeinsam haben, dass die Asymptoten der aus ihnen ausgeschnittenen Hyperbeln auf je zwei hyperbolischen Paraboloiden liegen.

§ 27.

Als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus erhält man:

$$\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x(\xi - x) - \left(y - \frac{b}{c}z\right)(\eta - y) + \left[\frac{b^2 z}{a^2 c^2}(x^2 - a^2) + \frac{b}{c}\left(y - \frac{b}{c}z\right)\right](\zeta - z) = 0$$

oder:

$$\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x(\xi - x) - \left(y - \frac{b}{c}z\right)\eta + \left[\frac{b^2 z}{a^2 c^2}(x^2 - a^2) + \frac{b}{c}\left(y - \frac{b}{c}z\right)\right]\zeta = 0 \tag{94}$$

Für $z = 0$ geht diese Gleichung über, wenn man für $y - \frac{b}{c}z$ seinen Wert aus (90) setzt, in

$$\eta = \frac{c(a \pm \sqrt{x^2 - a^2})}{ac}\zeta$$

d. h. in den Punkten der singulären Kante giebt es je zwei Tangentialebenen an die vorgelegte Fläche.

Diese Eigenschaft haben mithin die geraden elliptischen und hyperbolischen Cono-Cunei mit den elliptischen und den hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneis gemeinsam.

Ferner ergiebt sich, dass die beiden Ebenen $\xi = \pm a$ den geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) längs einer ganzen Erzeugenden berühren.

Aus der Gleichung (90) folgt:

$$y_{1,2} = \frac{bz}{ac}\left(a \pm \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

Demnach erhält man für das Volumen V zwischen den Ebenen $x = x_0$, $z = z_0$ und dem zugehörigen Teil des vorgelegten Cono-Cuneus:

$$V = \frac{2b}{ac} \int_0^{x_0} dx \sqrt{x^2 - a^2} \int_0^{z_0} z\,dz$$

(95) $$V = \frac{bz_0^2}{ac} \left\{ \tfrac{1}{2} x_0 \sqrt{x_0^2 - a^2} - \tfrac{1}{2} a^2 \lg \left(\frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a} \right) \right\}$$

Nun ist aber, wie sich aus (90) ergiebt;

$$\sqrt{x_0^2 - a^2} = \frac{ac}{bz_0} \left(x_0 - \frac{b}{c} z_0 \right).$$

Demnach geht die Gleichung (95) über in:

(96) $$V = \frac{bz_0^2}{c} \left\{ \tfrac{1}{2} \cdot \frac{cx_0}{bz_0} \left(y_0 - \frac{b}{c} z_0 \right) - \tfrac{1}{2} a \log \left(\frac{bx_0 z_0 + ac\left(y_0 - \frac{b}{c} z_0 \right)}{abz_0} \right) \right\}$$

Ferner folgt aus der Gleichung (88) des § 25., wenn man darin für $\sqrt{y_0^2 + b^2}$ den aus (84) sich ergebenden Wert: $\frac{bc}{az_0}\left(x_0 - \frac{a}{c} z_0 \right)$ setzt:

(97) $$V' = \frac{az_0^2}{c} \left\{ \tfrac{1}{2} \cdot \frac{cy_0}{az_0} \left(x_0 - \frac{a}{c} z_0 \right) + \tfrac{1}{2} b \lg \left(\frac{ay_0 z_0 + bc\left(x_0 - \frac{a}{c} z_0 \right)}{abz_0} \right) \right\}$$

Vertauscht man in der letzteren Gleichung x mit y und setzt in (96) und (97) $a = b$, so resultirt:

$$V + V' = x_0 z_0 \left(y_0 - \frac{b}{c} z_0 \right)$$

Eine analoge Beziehung hat sich für die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei im § 20. ergeben.

V. Abschnitt.

Die beiden parabolischen Cono-Cunei.

§ 28.

In diesem Abschnitte wollen wir den geraden parabolischen Cono-Cuneus und den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus betrachten. Da diese beiden Flächen von Hochheim ausführlich behandelt worden sind (Grunerts Archiv T. 53. pag. 350—363 und T. 55. pag. 35—48), so wollen wir hier nur die hauptsächlichsten Eigenschaften derselben kurz ableiten. Was zunächst den geraden parabolischen Cono-Cuneus betrifft, so nehmen wir als Gleichungen der Leitparabel:

$$(98) \qquad \begin{cases} y^2 = 2px \\ z = c \end{cases}$$

Alsdann ist, wie sich aus den Erläuterungen der Einleitung ergiebt, die X-Axe singuläre Kante, die YZ-Ebene Directorebene, so dass man als Gleichung des betreffenden Cono-Cuneus erhält:

$$(99) \qquad c^2 y^2 = 2pxz^2$$

Hieraus geht zunächst hervor, dass dieser Cono-Cuneus im Gegensatz zu den bisher behandelten vom dritten Grade ist. Ferner folgt aus der Gleichung (99), dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene die vorgelegte Fläche in einer Parabel schneidet, deren Parameter gleich $2\frac{pz^2}{c^2}$ ist, d. h. die Parameter der ausgeschnittenen Parabeln wachsen proportional dem Quadrate des Abstandes der schneidenden Ebene von der singulären Kante.

Ziehen wir die Brennpunkte der ausgeschnittenen Parabeln in Betracht, so ergiebt sich zunächst, dass dieselben in der XZ-Ebene liegen. Die Entfernung eines solchen Brennpunktes von der Z-Axe ist $\frac{pz^2}{2c^2}$. Für den geometrischen Ort aller dieser Brennpunkte erhält man demnach:

$$(100) \qquad z^2 = 2\frac{c^2}{p}x$$

d. h. in Worten: Der geometrische Ort der Brennpunkte aller Parabeln, welche durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) ausgeschnitten werden, ist eine Parabel in der XZ-Ebene, deren Scheitel der Coordinatenanfang ist,

und deren Axe in die singuläre Kante des Cono-Cuneus fällt. Der halbe Parameter dieser Parabel ist die vierte Proportionale zu p und c.

Aus der Vergleichung von (99) und (100) folgt, wenn man $\frac{c^2}{p} = \frac{pz^2}{c^2}$ setzt:

$$z = \frac{c^2}{p}$$

Daraus fliesst der Satz: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu p und c ist, schneidet aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) eine Parabel aus, welche gleich ist der Parabel, auf welcher die Brennpunkte aller durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus diesem Cono-Cuneus ausgeschnittenen Parabeln liegen.

Beachtet man hierbei, dass $2\frac{c^2}{p}$ der Parameter der betreffenden Parabel ist, so kann man diese Relationen auch so deuten: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu p und c ist, schneidet aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) eine Parabel aus, deren Parameter gleich dem doppelten Abstande der Parabel von der singulären Kante ist.

Als Projection der Durchschnittscurve der Ebene $x = h$ mit der vorgelegten Fläche auf die YZ-Ebene ergiebt sich:

$$(101) \qquad z = \pm \frac{c}{\sqrt{2ph}} y.$$

Daraus folgt, dass jede der Directorebene parallele Ebene im Allgemeinen aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus zwei Erzeugende ausschneidet, welche durch die singuläre Kante gehen und mit der XZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Für $h = 0$ fallen diese beiden Geraden in eine eine einzige zusammen.

Erwähnt sei hier noch, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene den vorgelegten Cono-Cuneus in einer Geraden schneidet, denn man erhält für

$$y = az:$$

$$(102) \qquad c^2 a^2 = 2px$$

Hierin unterscheidet sich der gerade parabolische Cono-Cuneus von den bisher betrachteten Flächen und, wie sich später zeigen

wird, auch von dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus, denn aus diesen schneidet jede durch die singuläre Kante gehende Ebene im Allgemeinen zwei gerade Linien.

Um schliesslich die Durchschnittscurve des vorgelegten Cono-Cuneus mit einer durch die Z-Axe gehenden Ebene, welche mit der X-Axe den Winkel φ bildet, zu untersuchen, wenden wir die Coordinatentransformation an:

$$(103)\qquad \begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z = z' \end{cases}$$

Setzen wir dann $y' = 0$, so ergiebt sich als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$(104)\qquad z'^2 = \frac{c^2 \sin^2\varphi}{2p\cos\varphi} \cdot x'$$

Jede durch die Z-Axe gehende Ebene schneidet demnach den geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) in einer Parabel, deren Scheitel der Coordinatenanfang ist, und deren Axe in der XY-Ebene liegt. Die Brennweite einer solchen Parabel ist: $\frac{c^2 \sin^2\varphi}{8p\cos\varphi}$. Mithin erhält man für den geometrischen Ort der Brennpunkte dieser Parabeln in Polarcoordinaten:

$$r = \frac{c^2 \sin^2\varphi}{8p\cos\varphi}$$

oder in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten:

$$y^2 = \frac{8px^3}{c^2 - 8px}$$

Diese Gleichung stellt eine Cissoide dar, welche die X-Axe im Coordinatenanfang berührt und welche sich auf der positiven und auf der negativen Seite der Y-Axe der Geraden $x = \frac{c^2}{8p}$ asymptotisch nähert.

§ 29.

Als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) erhält man, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$pz^2(\xi - x) - c^2 y(\eta - y) + 2pxz(\zeta - z) = 0$$

oder:

$$(105)\qquad pz^2(\xi - x) - c^2 y\eta + 2pxz\zeta = 0$$

Daraus folgt für $x = 0 : \xi = 0$; d. h. die Directorebene berührt den geraden parabolischen Cono-Cuneus (99).

Ferner erhält man für $z = 0$:

$$\eta = \pm \frac{\sqrt{2px}}{c} \xi$$

d. h. In den Punkten der singulären Kante giebt es je zwei Tangentialebenen an den vorgelegten Cono-Cuneus, welche sich in der singulären Kante schneiden und mit der XZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Es sind dies die in (102) des vorigen § betrachteten Ebenen. Diese Tangentialebenen schneiden mithin aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) die singuläre Kante und eine Erzeugende desselben.

Im Allgemeinen besteht die Durchschnittscurve der Tangentialebene mit dem vorgelegten Cono-Cuneus aus der durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden desselben und aus einer Parabel, deren Projection auf die XZ-Ebene als Parameter die vierte Proportionale zu $4x$ und z hat, wenn x, y, z die Coordinaten des Berührungspunktes sind.

Schneiden wir nun den geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) durch die Ebenen $x = x_0$, $z = z_0$, so erhält man für das Volumen V zwischen diesen Ebenen, der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teile desselben

$$V = \int_0^{x_0}\int_0^{z_0} y\,dx\,dz = \frac{\sqrt{2p}}{c}\int_0^{x_0}\sqrt{x}\,.\,dx\int_0^{z_0} z\,dz$$

(106) $$V = \frac{x_0 z_0^2 \sqrt{2px_0}}{3c} = \tfrac{1}{3} x_0 y_0 z_0$$

Das Volumen zwischen den Ebenen $x = x_0$, $y = 0$, $z = z_0$ und dem zugehörigen Teile des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) ist demnach gleich dem dritten Teil eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

Nun ist: $\tfrac{2}{3} x_0 . y_0 = F$, wenn F den zugehörigen Teil der begrenzenden Parabel bedeutet; also:

(107) $$V = \tfrac{1}{2} F . z_0 ,$$

welchen Satz wir schon in der Einleitung bewiesen haben.

§ 30.

Wir kommen jetzt zur Betrachtung des letzten in der Einleitung definirten Cono-Cuneus, des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus. Nehmen wir hierbei als Leitparabel dieselbe wie beim geraden parabolischen Cono-Cuneus, nämlich:

$$y^2 = 2px$$
$$z = c$$

als Directorebene demnach die XZ-Ebene, als singuläre Kante die Y-Axe, so erhält man als Gleichung der vorgelegten Fläche:

$$(108) \qquad y^2 z = 2cpx$$

Der parabolische Scheitel-Cono-Cuneus ist mithin ebenso wie der gerade parabolische Cono-Cuneus eine Fläche dritten Grades.

Ferner fogt aus der Gleichung (108), dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene den vorgelegten Cono-Cuneus in einer Parabel schneidet, deren Axe in der XZ-Ebene und deren Scheitel auf der Z-Axe liegt. Der Parameter einer solchen Parabel ist gleich $2\frac{cp}{z}$, d. h. er ist umgekehrt proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante. Hierin unterscheidet sich der parabolische Scheitel-Cono-Cuneus von dem geraden parabolischen Cono-Cuneus.

Für den geometrischen Ort der Brennpunkte der aus der vorgelegten Fläche ausgeschnittenen Parabeln erhält man demnach:

$$(109) \qquad xz = \frac{pc}{2}$$

d. h. der geometrische Ort der Brennpunkte aller Parabeln, welche durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) ausgeschnitten werden, ist eine gleichseitige Hyperbel in der XZ-Ebene, deren Asymptoten die Axen der x und der z sind, und deren Excentricität die mittlere Proportionale zu $2p$ und c ist.

Ferner wird durch die Ebene $y = h$ aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) eine Curve ausgeschnitten, als deren Projection auf die XZ-Ebene man erhält:

$$(110) \qquad z = \frac{2pc}{h^2} x$$

Daraus folgt, dass jede zur Directorebene parallele Ebene aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus eine erzeugende Gerade ausschneidet. Hierin unterscheidet sich dieser Cono-Cuneus von allen bisher betrachteten, aus denen jede der Directorebene parallele Ebene im Allgemeinen zwei Erzeugenden der betreffenden Fläche ausschneidet.

Der vorgelegte Cono-Cuneus unterscheidet sich von dem geraden parabolischen Cono-Cuneus auch dadurch, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene im Allgemeinen zwei erzeugende Geraden desselben ausschneidet. Denn es ergiebt sich als Projection der Durchschnittscurve der Ebene $z = ax$ mit der Fläche (108) auf die YZ-Ebene:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2pc}{a}} \tag{111}$$

Diese Eigenschaft hat der parabolische Scheitel-Cono-Cuneus, wie schon im § 28. angedeutet worden ist, mit den elliptischen und den hyperbolischen Cono-Cuneis gemeinsam.

Ein Hauptunterschied zwischen dem geraden parabolischen Cono-Cuneus und dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus besteht darin, dass durch gewisse Ebenen aus dem letzteren Hyperbeln ausgeschnitten werden, was bei dem ersteren nicht der Fall ist. Zu diesen gehören die durch die Z-Axe gehenden Ebenen. Um die betreffenden Durchschnittscurven näher zu untersuchen, wenden wir die Coordinatentransformation (103) an und setzen $y' = 0$. Alsdann erhält man als Gleichung einer Durchschnittscurve:

$$x'z' = \frac{2pc\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \tag{112}$$

Diese Durchschnittscurve ist demnach eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Axen der x' und der z' sind, und deren Quadrat der Excentricität gleich $\frac{8pc\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ ist.

§ 31.

Gehen wir nun zur Tangentialebene im Punkte xyz des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) über, so erhalten wir als Gleichung derselben:

$$2pc(\xi - x) - 2yz(\eta - y) - y^2(\zeta - z) = 0$$

oder:

$$2pc.\xi - 2yz(\eta - y) - y^2\zeta = 0. \tag{113}$$

Daraus folgt für $y = 0$: $\xi = 0$; d. h. der parabolische Scheitel-Cono-Cuneus (108) berührt die YZ-Ebene.

Ferner ergiebt sich für $z = 0$ aus der Gleichung (113):

$$\xi = \frac{y^2}{2pc}\zeta$$

Die Tangentialebene in einem Punkte der singulären Kante geht demnach durch diese Kante. Es giebt aber, wie man hieraus ersieht, in einem Punkte der singulären Kante nur eine Tangentialebene an den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus und auch hierdurch unterscheidet sich derselbe von den übrigen betrachteten Cono-Cuneis.

Diese Tangentialebenen sind die unter (111) des vorigen § betrachteten Ebenen. Sie schneiden also aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus die singuläre Kante und zwei erzeugende Geraden desselben aus.

Allgemein erhält man für die Projection der Durchschnittscurve der Tangentialebene mit der vorgelegten Fläche auf die YZ-Ebene, wenn man ξ aus der Gleichung (113) und der Gleichung $\eta^2\zeta = 2pc\xi$ eliminirt:

$$(114) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\eta - y = 0 \\ &(\eta + y)\zeta - 2yz = 0 \end{aligned} \right.$$

Daraus geht hervor, dass die Tangentialebene aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus im Allgemeinen die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende desselben und eine gleichseitige Hyperbel ausschneidet, deren Projection auf die YZ-Ebene die Excentricität $\sqrt{2y.z}$ hat. Auch die Tangentialebenen gehören daher zu den oben erwähnten Ebenen, welche aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus Hyperbeln ausschneiden.

Zugleich ist ersichtlich, dass die Tangentialebene die Fläche im Allgemeinen nicht längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben berührt. Eine Ausnahme findet nur für $y = 0$ statt; d. h. die YZ-Ebene berührt den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) längs der ganzen in ihr liegenden Erzeugenden desselben.

Schliesslich erhalten wir für das V o l u m e n V zwischen den Ebenen $y = y_0$, $z = z_0$, $x = 0$ und dem zugehörigen Teile der vorgelegten Fläche:

$$V = \int_0^{y_0} \int_0^{z_0} x\,dy\,dz = \frac{1}{2pc} \int_0^{y_0} y^2 dy \int_0^{z_0} z\,dz$$

(115) $$V = \frac{y_0^3 \cdot z_0^2}{12pc} = \tfrac{1}{6} x_0 y_0 z_0$$

d. h. Das Volumen mit der vorgeschriebenen Begrenzung ist gleich dem sechsten Teile eines rechtwinkligen Parallepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

Wir haben beim geraden parabolischen Cono-Cuneus erhalten:

$$V' = \tfrac{1}{3} x_0 y_0 z_0$$

Daraus folgt:

$$V + V' = \tfrac{1}{2} x_0 y_0 z_0$$

d. h. in Worten: Die Summe der Volumina, welche von den beiden parabolischen Cono-Cuneis begrenzt werden, und zu den Coordinaten x_0, y_0, z_0 gehören, ist gleich der Hälfte des rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

VI. Abschnitt.

Die Fusspunktenflächen der betrachteten Cono-Cunei für den Coordinatenanfang als Pol.

§ 32.

Wenn man von einem gegebenen Punkte die Senkrechten auf die Tangentialebenen einer gegebenen Fläche fällt, so bilden die Fusspunkte dieser Senkrechten eine neue Fläche, welche die Fusspunktenfläche der gegebenen Fläche für den gegebenen Punkt als Pol genannt wird. Wir wollen nun in diesem Abschnitte die Fusspunktenflächen der behandelten Cono-Cunei für den Coordinatenanfang als Pol einer kurzen Betrachtung unterwerfen.

Was zunächst den geraden elliptischen Cono-Cuneus (17)

$$c^2 y^2 = z^2(a^2 - x^2)$$

betrifft, so hatten wir als Gleichung der Tangentialebene desselben erhalten [§ 12. Gl. 27]:

$$x z^2(\xi - x) + cy \cdot c\eta - z(a^2 - x^2)\zeta = 0$$

Demnach ergiebt sich für die Gleichungen der Geraden, welche durch den Coordinatenanfang geht und auf dieser Tangentialebene senkrecht steht, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$(116) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= -\frac{xz^2}{z(a^2-x^2)}\,\zeta \\ \eta &= -\frac{c^2 y}{z(a^2-x^2)}\,\zeta \end{aligned} \right.$$

Die Coordinaten der Fusspunkte dieser Senkrechten müssen den Gleichungen (116) und der Gleichung der betreffenden Tangentialebene genügen. Demnach folgt für dieselben:

$$\xi = \frac{x^2 z^4}{x^2 z^4 + c^4 y^2 + z^2(a^2 - x^2)^2}$$

$$\eta = \frac{c^2 x^2 y z^2}{x^2 z^4 + c^4 y^2 + z^2(a^2 - x^2)^2}$$

$$\zeta = -\frac{x^2 z^2 (a^2 - x^2)}{x^2 z^4 + c^4 y^2 + z^2(a^2 - x^2)^2}$$

Durch Elimination von x, y, z aus diesen drei Gleichungen mit Hilfe der Gleichung (17) resultirt die Gleichung der gesuchten Fusspunktenfläche:

$$(117) \qquad (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = \frac{\xi^2(a^2\eta^2 - c^2\zeta^2)}{\eta^2}$$

Die Fusspunktenfläche des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) für den Coordinatenanfang als Pol ist demnach eine Fläche 6ten Grades.

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37):

$$c^2 y^2 = z^2(x^2 - a^2),$$

als dessen Fusspunktenfläche für den Coordinatenanfang als Pol man erhält:

$$118) \qquad (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = \frac{\xi^2(a^2\eta^2 + c^2\zeta^2)}{\eta^2}$$

Die beiden Gleichungen (117) und (118) gehen für $\zeta = 0$ über in:

$$(119) \qquad \xi^2 + \eta^2 = \pm\, a\xi$$

Daraus folgt der Satz: Die beiden Fusspunktenflächen (117) und (118) und der Cylinder (119) schneiden sich in einer und derselben Curve, und zwar in einer ebenen Curve.

Diese Relation kann man auch so deuten: Sind der gerade elliptische und der gerade geteilte hyperbolische Cono-Cuneus, welche

dieselbe singuläre Kante haben, so beschaffen, dass eine und dieselbe Ebene aus dem elliptischen einen Kreis, aus dem hyperbolischen eine gleichseitige Hyperbel ausschneidet, deren halber Parameter gleich dem Radius des Kreises des elliptischen Cono-Cuneus ist, so schneiden sich die beiden zugehörigen Fusspunktenflächen für den Coordinatenanfang als Pol in einer ebenen Curve, und zwar in zwei Kreisen in der XY-Ebene mit dem Radius $\frac{1}{2}a$, welche sich im Coordinatenanfang berühren und deren Mittelpunkte auf der singulären Kante der beiden zugehörigen Cono-Cunei liegen:

Ferner ist die Gleichung der Tangentialebene des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus:

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1:$$

$$c^2x\xi - yz^2(\eta - y) - z(y^2 + a^2)\zeta = 0$$

Demnach erhält man als Gleichungen der vom Coordinatenanfang auf diese Ebene gefällten Senkrechten:

$$\xi = -\frac{c^2x}{z(y^2+a^2)}\zeta$$

$$\eta = \frac{yz^2}{z(y^2+a^2)}\zeta$$

Für die Coordinaten des Fusspunktes dieser Senkrechten resultirt mithin:

$$\xi = -\frac{c^2xy^2z^2}{c^4x^2 + y^2z^4 + z^2(y^2+a^2)}$$

$$\eta = \frac{y^3z^4}{c^4x^2 + y^2z^4 + z^2(y^2+a^2)}$$

$$\zeta = \frac{y^2z^3(y^2+a^2)}{c^4x^2 + y^2z^4 + z^2(y^2+a^2)}$$

Eliminirt man x, y, z aus diesen drei Gleichungen mit Hilfe der Gleichung des zugehörigen Cono-Cuneus, so erhält man als Gleichung der betreffenden Fusspunktenfläche des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus:

$$(120) \qquad (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = \frac{\eta^2(c^2\zeta^2 - a^2\xi^2)}{\xi^2}$$

Auch diese Fläche ist wie die beiden vorhergehenden vom 6ten Grade.

Untersuchen wir nun die Durchschnittscurven der drei abgeleiteten Fusspunktenflächen mit Ebenen, welche durch die singuläre Kante des zugehörigen Cono-Cuneus gehen. Zu dem Zwecke setzen wir in den beiden Gleichungen (117) und (118):

$$c\zeta = m a \eta,$$

denn diese Gleichung stellt eine Ebene dar, welche durch die X-Axe, also durch die singuläre Kante des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) und des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37) geht. Dadurch gehen die betreffenden beiden Gleichungen über in:

$$\xi^2 + \frac{m^2 a^2 + c^2}{c^2}\eta^2 = \pm a\xi\sqrt{1-m^2} \tag{121}$$

$$\xi^2 + \frac{m^2 a^2 + c^2}{c^2}\eta^2 = \pm a\xi\sqrt{1+m^2} \tag{122}$$

Diese beiden Gleichungen stellen im Allgemeinen je zwei Ellipsen dar, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Mittelpunkte auf der X-Axe liegen. In der Gleichung (121) ist diese Möglichkeit an die Bedingung geknüpft, dass $m^2 < 1$ ist, während der Satz für die andere Gleichung für jeden Wert von m gilt.

Eine analoge Beziehung ergiebt sich für die Fusspunktenfläche (120) des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus. Da dieser Cono-Cuneus die Y-Axe zur singulären Kante hat, so stellt die Gleichung

$$c\zeta = m a \xi$$

eine Ebene dar, welche durch diese singuläre Kante geht. Dafür erhält man aus der Gleichung (120):

$$\frac{m^2 a^2 + c^2}{c^2}\xi^2 + \eta^2 = \pm a\eta\sqrt{m^2-1} \tag{123}$$

Diese Gleichung stellt, wenn $m^2 > 1$ ist, zwei Ellipsen dar, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Mittelpunkte auf der Y-Axe liegen.

Aus diesen Erörterungen folgt der Satz:

Jede durch die singuläre Kante eines geraden elliptischen oder hyperbolischen Cono-Cuneus gehende Ebene schneidet im Allgemeinen aus der Fusspunktenfläche des betreffenden Cono-Cuneus für den Coordinatenanfang als Pol zwei unter sich gleiche Ellipsen aus, welche sich im Pol der Fläche berühren.

§ 33.

Was ferner die Fusspunktenfläche des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76)

$$\frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2}{\left(\frac{a}{c}z\right)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

für den Coordinatenanfang als Pol betrifft, so hatten wir als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz desselben erhalten [§ 23. Gl. 81]:

$$\left(x-\frac{a}{c}z\right)\xi+\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta-y)-\left\{\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)-\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right\}\zeta=0$$

Die Gleichungen der vom Coordinatenanfang auf diese Ebene gefällten Senkrechten sind demnach:

$$\xi=\frac{x-\frac{a}{c}z}{-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)}\zeta$$

$$\eta=\frac{\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y}{-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)}\zeta$$

Daraus folgen für die Coordinaten des Fusspunktes dieser Senkrechten die Gleichungen:

$$\xi=\frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y^2}{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2+\left(\frac{az}{bc}\right)^4 y^2+\left[-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right]^2}$$

$$\eta=\frac{\left(\frac{az}{bc}\right)^4 y^3}{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2+\left(\frac{az}{bc}\right)^4 y^2+\left[-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right]^2}$$

$$\zeta=\frac{\left[-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right]\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y^2}{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2+\left(\frac{az}{bc}\right)^4 y^2+\left[-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right]^2}$$

Durch Elimination von x, y, z mit Hilfe der Gleichung (76) folgt hieraus die Gleichung der gesuchten Fusspunktenfläche:

$$(124)\qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{b^2\eta^2}{a^2\xi^2}[a^2\xi^2-(c\zeta+a\xi)^2]$$

Zunächst geht hieraus hervor, dass die Fusspunktenfläche ebenso wie die im vorigen § betrachteten vom 6ten Grade ist. Ferner ergiebt sich aus der Gleichung (124) für:

$$c\zeta+a\xi = 0:$$

$$\frac{a^2+c^2}{c^2}\xi^2+\eta^2 = \pm b\eta$$

Daraus folgt der Satz: Die durch die singuläre Kante des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) gehende Ebene $c\zeta+a\xi = 0$ schneidet aus der zugehörigen Fusspunktenfläche (124) zwei Ellipsen aus, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Projectionen auf die XY-Ebene die Halbaxen $\frac{bc}{2\sqrt{a^2+c^2}}$ und $\frac{b}{2}$ haben.

Auf analoge Weise erhält man für die Fusspunktenfläche des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84):

$$\frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2}{\left(\frac{a}{c}z\right)^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

für den Coordinatenanfang als Pol die Gleichung:

$$(125)\qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{b^2\eta^2}{a^2\xi^2}[(c\zeta-a\xi)^2-a^2\xi^2]$$

Ferner war die Tangentialebene des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84):

$$\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x(\xi-x)-\left(y-\frac{b}{c}z\right)\eta+\left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)\right]\zeta = 0$$

Daraus folgen die Gleichungen der durch den Coordinatenanfang gehenden, auf dieser Ebene senkrecht stehenden Geraden:

$$\xi = \frac{\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x}{\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)}\zeta$$

$$\eta = -\frac{y - \frac{b}{c}z}{\frac{b^2 z}{a^2 c^2}(x^2 - a^2) + \frac{b}{c}\left(y - \frac{b}{c}z\right)}\zeta$$

Mithin genügen die Coordinaten des Fusspunktes dieser Senkrechten den Gleichungen:

$$\xi = \frac{\left(\frac{bz}{ac}\right)^4 x^3}{\left(\frac{bz}{ac}\right)^4 x^2 + \left(y - \frac{b}{c}z\right)^2 + \left[\frac{b^2 z}{a^2 c^2}(x^2 - a^2) + \frac{b}{c}\left(y - \frac{b}{c}z\right)\right]^2}$$

$$\eta = \frac{\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x^2 \left(y - \frac{b}{c}z\right)}{\left(\frac{bz}{ac}\right)^4 x^2 + \left(y - \frac{b}{c}z\right)^2 + \left[\frac{b^2 z}{a^2 c^2}(x^2 - a^2) + \frac{b}{c}\left(y - \frac{b}{c}z\right)\right]^2}$$

$$\zeta = \frac{\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x^2 \left[\frac{b^2 z}{a^2 c^2}(x^2 - a^2) + \frac{b}{c}\left(y - \frac{b}{c}z\right)\right]}{\left(\frac{bz}{ac}\right)^4 x^2 + \left(y - \frac{b}{c}z\right)^2 + \left[\frac{b^2 z}{a^2 c^2}(x^2 - a^2) + \frac{b}{c}\left(y - \frac{b}{c}z\right)\right]^2}$$

Hieraus folgt die Gleichung der Fusspunktenfläche des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) für den Coordinatenanfang als Pol:

$$(126) \qquad (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = \frac{a^2 \xi^2}{b^2 \eta^2}\left[(c\zeta + b\eta)^2 + b^2 \eta^2\right].$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich für $\zeta = 0$:

$$\xi^2 + \eta^2 = \pm a\xi\sqrt{2}$$

d. h. in Worten: Die Fusspunktenfläche (126) schneidet die XY-Ebene in zwei Kreisen mit den Radien $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Mittelpunkte auf der X-Axe liegen.

Dreht man die Fläche (126) um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so dass die positive X-Axe in die negative Y-Axe fällt, dann geht die Gleichung derselben über in:

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = \frac{a^2 \eta^2}{b^2 \xi^2}\left[(c\zeta + b\xi)^2 + b^2 \xi^2\right]$$

Berücksichtigt man hierbei die Gleichung (124) der Fusspunktenfläche des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) und beachtet, dass, wenn man $a = b$ setzt, die beiden Gleichungen für $c\zeta + a\xi = 0$ übergehen in

$$\frac{a^2+c^2}{c^2}\xi^2+\eta^2=\pm a\eta,$$

so resultirt der Satz: Sind der elliptische und der geteilte hyperbolische Scheitel-Cono-Cuneus, deren singuläre Kanten auf einander senkrecht stehen und in einer Ebene liegen, so beschaffen, dass die Ebene in der Entfernung c von den singulären Kanten aus dem elliptischen den Kreis mit dem Radius a, aus dem hyperbolischen die gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a ausschneidet, so besteht die Durchschnittscurve der Fusspunktenfläche des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus für den Coordinatenanfang als Pol mit der um $\frac{\pi}{2}$ um die Z-Axe gedrehten betreffenden Fusspunktenfläche des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus aus zwei Ellipsen, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Projectionen auf die XY-Ebene die Halbaxen $\frac{ac}{2\sqrt{a^2+c^2}}$ und $\frac{a}{2}$ haben.

Wir wollen nun noch ähnlich wie im vorigen § die Durchschnittscurven der drei abgeleiteten Fusspunktenflächen mit Ebenen, welche durch die singuläre Kante des zugehörigen Cono-Cuneus gehen, untersuchen. Da der elliptische und der einfache hyperbolische Scheitel-Cono-Cuneus die Y-Axe zur singulären Kante haben, so ist

$$c\zeta=ma\xi$$

eine Ebene, welche durch diese singuläre Kante geht. Setzen wir diesen Wert von ζ in die Gleichungen (124) und (125) ein, so gehen dieselben über in:

$$\frac{m^2a^2+c^2}{c^2}\xi^2+\eta^2=\pm b\eta\sqrt{1-(m+1)^2} \tag{127}$$

$$\frac{m^2a^2+c^2}{c^2}\xi^2+\eta^2=\pm b\eta\sqrt{(m-1)^2-1} \tag{128}$$

Diese beiden Gleichungen stellen im Allgemeinen je zwei Ellipsen dar, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Mittelpunkte auf der Y-Axe liegen. Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für die Fusspunktenfläche (126) des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus. Dieser Cono-Cuneus hat die X-Axe zur singulären Kante. Folglich stellt die Gleichung

$$c\zeta=mb\eta$$

eine Ebene dar, welche durch diese singuläre Kante geht. Dadurch erhält man aus der Gleichung (126):

$$(129) \quad \xi^2 + \frac{m^2b^2 + c^2}{c^2}\eta^2 = \pm a\xi\sqrt{(m+1)^2+1}$$

Zugleich ist hieraus ersichtlich, dass aus der Fusspunktenfläche (126) jede durch die singuläre Kante des zugehörigen geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus gehende Ebene zwei Ellipsen ausschneidet, während bei den beiden vorhergehenden die Ebenen noch gewissen Beschränkungen unterworfen sind.

Diese Resultate können wir in den Satz zusammenfassen: Jede durch die singuläre Kante eines elliptischen oder eines hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus gehende Ebene schneidet im Allgemeinen aus der Fusspunktenfläche des betreffenden Cono-Cuneus für den Coornatenanfang als Pol zwei sich gleiche Ellipsen aus, welche sich im Pol der Fläche berühren.

§ 34.

Um schliesslich die betreffenden Fusspunktenflächen der beiden betrachteten parabolischen Cono-Cunei zu untersuchen, so haben wir im § 29. als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des geraden parabolischen Cono-Cuneus erhalten:

$$pz^2(\xi - x) - c^2y\eta + 2pxz\zeta = 0$$

Demnach sind die Gleichungen der vom Coordinatenanfang auf diese Ebene gefällten Senkrechten:

$$\xi = \frac{pz^2}{2pxz}\zeta$$

$$\eta = -\frac{c^2y}{2pxz}\zeta,$$

so dass man für den Fusspunkt dieser Senkrechten erhält:

$$\xi = \frac{p^2xz^4}{p^2z^4 + c^4y^2 + 4p^2x^2z^2}$$

$$\eta = -\frac{c^2pxyz^2}{p^2z^4 + c^4y^2 + 4p^2x^2z^2}$$

$$\zeta = \frac{2p^2x^2z^3}{p^2z^4 + c^4y^2 + 4p^2x^2z^2} \quad .$$

Daraus folgt als Gleichung der Fusspunktenfläche des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) für den Coordinatenanfang als Pol:

$$(130) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{c^2\xi\zeta^2}{2p\eta^2},$$

Diese Fusspunktenfläche ist demnach vom vierten Grade, während die bisher betrachteten vom 6ten Grade sind.

Ferner ergiebt sich aus der Gleichung des geraden parabolischen Cono-Cuneus:

$$c^2\eta^2 = 2p\xi\zeta^2:$$

$$\frac{\xi\zeta^2}{\eta^2} = \frac{c^2}{2p}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (130) ein, so geht dieselbe über in

$$(131) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{c^4}{4p^2}$$

Daraus folgt der Satz: Der gerade parabolische Cono-Cuneus (99), die zugehörige Fusspunktenfläche (130) und die Kugel (131) schneiden sich in einer und derselben Curve.

Oder m. a. W. Die Durchschnittscurve des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) mit der zugehörigen Fusspunktenfläche für den Coordinatenanfang als Pol liegt auf einer Kugel mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren Radius die vierte Proportionale zu $2p$ und c ist.

Ein ähnliches Resultat erhält man für den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108). Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz desselben ist [§ 31. Gl. 113].

$$2pc\xi - 2yz(\eta - y) - y^2\zeta = 0$$

Die vom Coordinatenanfang auf diese Ebene gefällte Senkrechte hat demnach die Gleichungen:

$$\xi = -\frac{2pc}{y^2}\zeta$$

$$\eta = \frac{2yz}{y^2}\zeta,$$

wodurch man für den Fusspunkt dieser Senkrechten erhält:

$$\xi = -\frac{4pcy^2z}{4p^2c^2 + 4y^2z^2 + y^4}$$

$$\eta = \frac{4y^3z^2}{4p^2c^2 + 4y^2z^2 + y^4}$$

$$\zeta = \frac{2y^4z}{4p^2c^2 + 4y^2z^2 + y^4}$$

Daraus folgt als Gleichung der gesuchten Fusspunktenfläche:

$$(132)\qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2+\frac{2pc\eta^2\zeta}{\xi}=0$$

Das ist eine Gleichung fünften Grades.

Dreht man nun den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) um die Z-Axe um π, so ist die Gleichung desselben:

$$\eta^2\zeta=-2pc\xi.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\eta^2\zeta}{\xi}=-2pc.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (132) ein, so geht dieselbe über in

$$(133)\qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=2pc$$

d. h. in Worten: Der um π um die Z-Axe gedrehte parabolische Scheitel-Cono-Cuneus (108), die zugehörige Fusspunktenfläche (132) und die Kugel (133) schneiden sich in einer und derselben Curve.

Oder: Die Durchschnittscurve des um π um die Z-Axe gedrehten parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) mit der zugehörigen Fusspunktenfläche (132) liegt auf einer Kugel um den Cooranfang als Mittelpunkt, deren Radius die mittlere Proportionale zu $2p$ und c ist.

Setzt man ferner

$$2pc=\frac{c^4}{4p^2},$$

so folgt:

$$c=2p.$$

Daraus folgt der Satz: Schneiden sich die beiden parabolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten auf einander senkrecht stehen und in einer Ebene liegen, in einer Parabel, deren Parameter gleich ihrem Abstande von den singulären Kanten ist, so liegt die Durchschnittscurve des geraden parabolischen Cono-Cuneus mit der zugehörigen Fusspunktenfläche und die Durchschnittscurve der Fusspunktenfläche des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus mit dem um π um die Z-Axe gedrehten parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus auf einer und derselben Kugel um den Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren Radius gleich dem Parameter der Durchschnittsparabel der beiden Cono-Cunei ist.

Schliesslich wollen wir noch die Durchschnittscurven der beiden Fusspunktenflächen (130) und (132) mit Ebenen, welche durch die singuläre Kante des betreffenden Cono-Cuneus gehen, untersuchen.

Schneiden wir zu dem Ende die Fläche (130) durch die Ebene:

$$\zeta = \mu\eta,$$

welche durch die X-Axe, also durch die singuläre Kante des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) geht, so erhält man für die Projection der betreffenden Durchschnittscurve auf die XY-Ebene:

$$\xi^2 + (\mu^2+1)\eta^2 = \frac{\mu^2 c^2}{2p}\xi \tag{134}$$

Hieraus folgt, dass jede durch die singuläre Kante des geraden parabolischen Cono-Cuneus gehende Ebene die zugehörige Fusspunktenfläche in einer Ellipse schneidet, welche durch den Pol der Fusspunktenfläche geht. Hierin unterscheidet sich also die Fusspunktenfläche des geraden parabolischen Cono-Cuneus von den bisher betrachteten und, wie wir sogleich sehen werden, auch von derjenigen des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus, aus denen jede durch die singuläre Kante des betreffenden Cono-Cuneus gehende Ebene im Allgemeinen je zwei Ellipsen ausschneidet.

Um dies für die Fläche (132) nachzuweisen, betrachten wir die Durchschnittscurve derselben mit der Ebene:

$$\zeta = -\mu\xi$$

da die Y-Axe singuläre Kante des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) ist. Für die Projection der in Rede stehenden Durchschnittscurve auf die XY-Ebene ergiebt sich alsdann:

$$(1+\mu^2)\xi^2 + \eta^2 = \pm\,\eta\sqrt{2\mu pc} \tag{135}$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Wir haben also gefunden, dass die Fusspunktenflächen des geraden elliptischen, der beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei und diejenigen des elliptischen und der beiden hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei vom 6ten Grade sind, während die Fusspunktenfläche des geraden parabolischen Cono-Cuneus eine Fläche vierten Grades, diejenige des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus eine Fläche fünften Grades ist.

Ferner stimmen die Fusspunktenflächen des geraden elliptischen Cono-Cuneus und der geraden hyperbolischen Cono-Cunei mit denjenigen der betrachteten Scheitel-Cono-Cunei darin überein, dass jede durch

die singuläre Kante des betreffenden Cono-Cuneus gehende Ebene im Allgemeinen aus ihnen je zwei Ellipsen ausschneidet, welche sich im Pol der Fläche berühren. Die Durchschnittscurve der Fusspunktenfläche des geraden parabolischen Cono-Cuneus mit einer durch die singuläre Kante dieses Cono-Cuneus gehenden Ebene dagegen besteht nur aus einer Ellipse, welche durch den Pol der Fusspunktenfläche geht.

VII. Abschnitt.

Die Meridiancurven der Cono-Cunei.

§ 35.

Wir schliessen hier eine kurze Behandlung einer Art von Curven auf den Cono-Cuneis an. Auf den Rotationsflächen unterscheidet man Meridiane und Curven gleicher Polhöhe. Diese Terminologie hat Alfred Enneper auf krumme Oberflächen übertragen und diese Curven folgendermassen definirt [1]). Im Punkte xyz einer Fläche bilde die Normale den Winkel u mit der Z-Axe, durch v werde der Winkel bezeichnet, welchen die Projection der Normale auf die XY-Ebene mit der Axe der x einschliesst. Einem bestimmten Werte von u entspricht auf der Fläche eine bestimmte Curve, für welche v allein variabel ist. Dieselbe heisst auf den Rotationsflächen eine Curve gleicher Polhöhe. Variirt u allein, hat also v einen bestimmten Wert, so entspricht demselben eine Curve, welche bei den Rotationsflächen den Namen Meridian führt.

Wir wollen in Folgendem die Meridiancurven der Cono-Cunei betrachten. Wird z als Function von x und y angesehen, dann besteht die Gleichung

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \operatorname{tg} v$$

Mittelst der Gleichung (17) des geraden elliptischen Cono-Cuneus ergiebt sich:

$$\operatorname{tg} v = \frac{a^2 - x^2}{xy}$$

$$a^2 - x^2 - xy \operatorname{tg} v = 0 \tag{136}$$

---

1) cf. Alfred Enneper: „Ueber Flächen mit besonderen Meridiancurven“ im XXIX. Bde. der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Diese Gleichung lässt erkennen, dass die Projection der Meridiancurve des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) auf die *XY*-Ebene eine Hyperbel mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt ist, deren eine Axe mit der Axe der x den Winkel $\frac{1}{2}v$ bildet, und deren Axen bezüglich gleich: $\frac{a}{\cos\frac{1}{2}v}\sqrt{\cos v}$ und $\frac{a}{\sin\frac{1}{2}v}\sqrt{\cos v}$ sind.

Zu demselben Resultate gelangt man beim geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37). Man erhält nämlich:

$$\operatorname{tg} v = -\frac{x^2 - a^2}{xy}$$

Daraus fliesst der Satz: die Meridiancurven des geraden elliptischen und die des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus liegen auf denselben hyperbolischen Cylinderflächen.

Diese Meridiancurven sind Curven doppelter Krümmung. Denn wäre dies nicht der Fall, so müsste, wie in der Theorie der Curven nachgewiesen wird, wenn man x als unabhängige Veränderliche annimmt:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2y}{dx^2} & \frac{d^3y}{dx^3} \\ \frac{d^2z}{dx^2} & \frac{d^3z}{dx^3} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Man erhält aber für die Meridiancurven des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) als Wert dieser Determinante:

$$\frac{6a^4c}{x^3(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}^2 v}$$

und für diejenigen des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37)

$$\frac{6a^4c}{x^3(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}^2 v}.$$

Setzt man den Wert von a^2-x^2 aus der Gleichung (136) in die Gleichung (17), so ergiebt sich:

$$c^2y = xz^2\operatorname{tg} v \tag{137}$$

Die Meridiancurven des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) liegen demnach auch auf Flächen, welche durch die Gleichung (137) dargestellt werden. Es sind dies parabolische Scheitel-Cono-Cunei, deren Leitlinien den Gleichungen:

$$z^2 = cy\operatorname{ctg} v$$
$$x = c$$

genügen, welche also die XY-Ebene zur Directorebene und die Z-Axe zur singulären Kante haben.

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37), dessen Meridiancurven auf den Flächen:

$$c^2 y = -xz^2 \operatorname{tg} v_1$$

$$(138) \qquad c^2 y = xz^2 \operatorname{tg}(\pi - v_1)$$

liegen. Daraus geht hervor, dass die parabolischen Scheitel-Cono-Cunei der eben beschriebenen Art sowol den geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) als auch den geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37) in Meridiancurven schneiden.

Ferner erhält man für den geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus (67):

$$\operatorname{tg} v = -\frac{xy}{y^2 + b^2}$$

$$(139) \qquad y^2 \operatorname{tg} v + xy + b^2 \operatorname{tg} v = 0$$

Die Meridiancurven des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus (67) liegen mithin ebenso wie diejenigen des geraden elliptischen und des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus auf hyperbolischen Cylinderflächen, deren Axe die Z-Axe ist. Die Spuren dieser Cylinderflächen in der XY-Ebene sind Hyperbeln mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren eine Axe mit der Axe der x den Winkel $\frac{1}{2}v$ bildet und deren Axen bezüglich

$$b\sqrt{\frac{2 \sin v}{1 + \sin v}} \quad \text{und} \quad b\sqrt{\frac{2 \sin v}{1 - \sin v}} \quad \text{sind.}$$

Durch Substitution des Wertes von $y^2 + b^2$ aus (139) in (67) ergiebt sich:

$$b^2 c^2 x \operatorname{tg} v = -a^2 y z^2$$

$$(140) \qquad b^2 c^2 x = a^2 y z^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$$

Durch Vertauschung von x mit y geht die Gleichung über in:

$$(141) \qquad b^2 c^2 y = a^2 x z^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$$

Vergleichen wir die Resultate (137), (138) und (141), so resultirt der Satz:

Die Meridiancurven des geraden elliptischen, des geraden geteilten und des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus, welche die singuläre Kante und die Directorebene gemeinsam haben, und

welche so beschaffen sind, dass eine und dieselbe Ebene aus dem elliptischen einen Kreis, aus den beiden hyperbolischen je eine gleichseitige Hyperbel mit einem Parameter gleich dem doppelten Radius des Kreises des elliptischen Cono-Cuneus ausschneidet, liegen auf denselben parabolischen Scheitel-Cono-Cuneis.

§ 36.

Um nun die Meridiancurven des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) zu untersuchen, so folgt aus der Gleichung (76):

$$z = \frac{bcx}{a(b+\sqrt{b^2-y^2})} \tag{142}$$

Mithin erhält man:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{bc}{a(b+\sqrt{b^2-y^2})}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{bcxy}{a(b+\sqrt{b^2-y^2})^2\sqrt{b^2-y^2}},$$

so dass sich ergiebt:

$$\operatorname{tg} v = \frac{xy}{(b+\sqrt{b^2-y^2})\sqrt{b^2-y^2}} \tag{143}$$

Diese Gleichung stellt eine Cylinderfläche 6ten Grades dar; denn man erhält daraus:

$$x^4 y^2 \operatorname{ctg}^4 v + (b^2-y^2)^2 y^2 = 2x^2 \operatorname{ctg}^2 v\,(b^2-y^2)(2b^2-y^2)$$

Während daher die Projectionen der Meridiancurven des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) auf die XY-Ebene Hyperbeln, d. h. Curven zweiten Grades sind, liegen die Meridiancurven des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) auf Cylinderflächen 6ten Grades.

Setzt man für die irrationalen Ausdrücke: $b+\sqrt{b^2-y^2}$ und $\sqrt{b^2-y^2}$ die aus der Gleichung (142) folgenden rationalen, so geht die Gleichung (143) über in

$$\operatorname{tg} v = \frac{a^2 y z^2}{b^2 c (cx - az)} \tag{144}$$

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84):

$$\frac{\left(x - \frac{a}{c}z\right)^2}{\left(\frac{a}{c}z\right)^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Man erhält nämlich:

$$\operatorname{tg} v_1 = -\frac{xy}{(b+\sqrt{y^2+b^2})\sqrt{y^2+b^2}}$$

$$(145) \qquad \operatorname{tg}(\pi - v_1) = \frac{xy}{(b+\sqrt{y^2+b^2})\sqrt{y^2+b^2}}$$

Die Meridiancurven des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) liegen demnach ebenso wie diejenigen des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) auf Cylinderflächen 6ten Grades. Ferner folgt aus der Gleichung (145):

$$(146) \qquad \operatorname{tg}(\pi - v_1) = \frac{a^2 y z^2}{b^2 c(cx - az)}$$

Aus der Vergleichung von (144) und (146) resultirt der Satz: Die Meridiancurven des elliptischen und des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus, welche dieselbe singuläre Kante und dieselbe Directorebene haben, liegen auf denselben Flächen dritten Grades.

Schliesslich erhält man für den geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus aus der Gleichung (108):

$$z = \frac{acy}{b(a+\sqrt{x^2-a^2})}$$

Demnach ergiebt sich:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{acxy}{b(a+\sqrt{x^2-a^2})^2\sqrt{x^2-a^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ac}{b(a+\sqrt{x^2-a^2})},$$

also:

$$\operatorname{tg} v' = -\frac{(a+\sqrt{x^2-a^2})\sqrt{x^2-a^2}}{xy}$$

oder:

$$(147) \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + v'\right) = \frac{xy}{(a+\sqrt{x^2-a^2})\sqrt{x^2-a^2}}$$

Die Meridiancurven des elliptischen und der beiden hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei stimmen also darin überein, dass sie auf Cylinderflächen 6ten Grades liegen.

Ferner folgt aus (147):

$$(148) \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + v'\right) = \frac{b^2 x z^2}{a^2 c(cy - bz)}$$

Dreht man den geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so dass die positive X-Axe in die negative Y-Axe fällt, so haben wir nur x mit y zu vertauschen, alles

Uebrige bleibt unverändert. Führen wir diese Vertauschung in der Gleichung (148) aus, so geht dieselbe über in

$$\text{(149)} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+v'\right)=\frac{b^2 y z^2}{a^2 c(cx-bz)}$$

Aus der Vergleichung von (144), (146) und (149) resultirt der Satz:

Die Meridiancurven des elliptischen, des einfachen und des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus, welche dieselbe singuläre Kante und dieselbe Directorebene haben, und welche so beschaffen sind, dass eine und dieselbe Ebene aus dem elliptischen einen Kreis, aus den beiden hyperbolischen je eine gleichseitige Hyperbel mit einem Parameter gleich dem doppelten Radius des Kreises des ellip-Scheitel-Cono-Cuneus ausschneidet, liegen auf denselben Flächen dritten Grades.

Es ist dies eine ganz ähnliche Beziehung, wie wir sie am Ende des vorigen § für die drei entsprechenden geraden Cono-Cunei abgeleitet haben.

§ 37.

Verfolgen wir nun dieselbe Untersuchung für die beiden parabolischen Cono-Cunei. Aus der Gleichung (99) des geraden parabolischen Cono-Cuneus geht hervor:

$$z=\frac{cy}{\sqrt{2px}}$$

also:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{cy}{2\sqrt{2px^3}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c}{\sqrt{2px}}.$$

Mithin erhält man:

$$\operatorname{tg} v=-\frac{2x}{y}$$

$$\text{(150)} \qquad 2x+y\operatorname{tg} v=0$$

Die Meridiancurven des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) liegen demnach in Ebenen, welche durch die Z-Axe gehen. Es sind mithin zum Unterschiede von den bisher betrachteten ebene Curven, und zwar Parabeln, welche der Gleichung genügen:

$$z'^2=\frac{2c^2\operatorname{ctg}^2 v}{p\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2 v}}\,x'.$$

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108):

$$z = \frac{2pcx}{y^2}.$$

Es folgt nämlich hieraus:

$$\operatorname{tg} v = -\frac{2x}{y}$$

$$2x + y \operatorname{tg} v = 0$$

d. i. aber die Gleichung (150). Mithin resultirt der Satz: Die durch die Z-Axe gehenden Ebenen schneiden sowol den geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) als auch den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) in Meridiancurven.

Die Meridiancurven des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) sind aber, wie sich aus den Erörterungen des § 30. Gl. (112) ergiebt, zum Unterschiede von denen des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) gleichseitige Hyperbeln; sie liegen also auf hyperbolischen Cylinderflächen, und hierin stimmen sie mit den Meridiancurven des geraden elliptischen und der beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei überein.

Ziehen wir schliesslich allgemein die durch die Gleichung (4):

$$cy = zf(x)$$

dargestellten Flächen in Betracht, so ergiebt sich für dieselben:

$$\operatorname{tg} v = -\frac{f(x)}{yf'(x)}$$

also:

$$yf'(x) \operatorname{tg} v + f(x) = 0$$

Die Projectionen der Meridiancurven der durch die Gleichung (4) dargestellten Flächen auf die XY-Ebene sind demnach im Allgemeinen Curven $m$ten Grades, wenn m den Grad von $f(x)$ bedeutet, vorausgesetzt dass $f(x)$ eine ganze rationale Function von x bezeichnet.

Dieser Satz gilt auch, wenn die Leitlinie der Fläche der Gleichung: $y^n = f(x)$ genügt, so dass der Grad der auf die XY-Ebene projicirten Meridiancurven der Fläche (4) von n unabhängig ist.

Denn es ergiebt sich für diesen Fall:

$$yf'(x) \operatorname{tg} v + nf(x) = 0$$

VIII. Abschnitt.

Verallgemeinerungen der Cono-Cunei.

§ 38.

Zum Schluss wollen wir an bisher gefundene Resultate einige Bemerkungen anknüpfen, indem wir die betrachteten Flächen etwas verallgemeinern.

Wir ändern zunächst die Bedingung, dass die singuläre Kante einer Axe des Leitkegelschnitts parallel ist, dahin ab, dass eine Axe des Leitkegelschnitts mit der singulären Kante den Winkel α bildet, während diese Kante der Ebene des Leitkegelschnitts parallel ist und durch die im Mittelpunkte desselben auf seiner Ebene senkrecht stehende Gerade geht.

Sind die Gleichungen des Leitkegelschnitts:

$$(151)\qquad \begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D \\ z = c \end{cases}$$

dann ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Fläche, wenn die Ebene der yz die Directorebene ist:

$$(152)\qquad Ax^2z^2 + 2Bcxyz + Cc^2y^2 = Dz^2$$

Daraus folgt, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene die Fläche (152) in einem Kegelschnitte schneidet, und zwar da das charakteristische Binom desselben gleich $(B^2 - A.C)c^2z^2$ ist, in einer Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der Leitkegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

Um diesen Kegelschnitt näher zu untersuchen, betrachten wir die allgemeine Mittelpunktsgleichung eines solchen:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D$$

Wenden wir hierauf die Coordinatentransformation an:

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha$$
$$y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

so geht diese Gleichung über in

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 = D$$

wobei:

$$A' = A\cos^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$$
$$B' = \tfrac{1}{2}A\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}C\sin 2\alpha$$
$$C' = A\sin^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

$B' = 0$ liefert die Bedingung: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{C - A}$. Dadurch ergiebt sich:

$$A' = \tfrac{1}{2}(A + C) + \frac{(A - C)^2 - 4B^4}{2\sqrt{(C - A)^2 + 4B^2}}$$

$$C' = \tfrac{1}{2}(A + C) - \frac{(A - C)^2 - 4B^2}{2\sqrt{(C - A)^2 + 4B^2}}$$

Diese Resultate auf die Gleichung (152) angewandt, liefert:

$$(153)\quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2Bcz}{Cc^2 - Az^2} \\ A' &= \tfrac{1}{2}(Az^2 + Cc^2) + \frac{(Az^2 - Cc^2)^2 - 4B^2c^2z^2}{2\sqrt{(Cc^2 - Az^2)^2 + 4B^2c^2z^2}} \\ C' &= \tfrac{1}{2}(Az^2 + Cc^2) - \frac{(Az^2 - Cc^2)^2 - 4B^2c^2z^2}{2\sqrt{(Cc^2 - Az^2)^2 + 4B^2c^2z^2}} \end{aligned} \right.$$

Daraus geht hervor, dass die Fläche (152) dadurch entstanden gedacht werden kann, dass sich eine Ellipse oder Hyperbel mit variablen Axen parallel mit sich selbst bewegt, während ihr Mittelpunkt eine auf der Ebene des Kegelschnitts senkrechte Gerade beschreibt und ihre Axen sich um den Mittelpunkt drehen. Diese Art von Flächen unterscheidet sich dadurch von den Cono-Cuneis, dass hier beide Axen des beweglichen Kegelschnitts variabel sind, während bei jenen nur eine Axe sich ändert. Sie haben das mit den elliptischen Cono-Cuneis gemein, dass auch hierbei unter den ausgeschnittenen Ellipsen ein Kreis vorkommt, und zwar erhält man denselben für

$$(Az^2 - Cc^2)^2 - 4B^2c^2z^2 = 0$$

$$(154)\quad z = \pm \frac{c}{A}(B + \sqrt{B^2 + A.C})$$

Wenn der Leitkegelschnitt hierbei eine Parabel ist, so ist, weil der Mittelpunkt derselben im Unendlichen liegt, die singuläre Kante der Parabelaxe parallel, ihre Projection auf die Parabelebene braucht aber nicht mit der Parabelaxe zusammenzufallen, sondern kann von ihr um irgend eine Strecke δ entfernt sein.

Um diesen Fall zu untersuchen, nehmen wir als Gleichungen der Leitparabel:

$$(155)\quad \left\{ \begin{aligned} (y - \delta)^2 &= 2px \\ z &= c, \end{aligned} \right.$$

wodurch wir als Gleichungen der betreffenden Fläche erhalten:

(156) $$\left(y - \frac{\delta}{c} z\right)^2 = 2p \frac{z^2}{c^2} x$$

Diese Gleichung lässt erkennen, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene die betreffende Fläche in einer Parabel schneidet, deren Parameter proportional dem Quadrate der Entfernung der schneidenden Ebene von der singulären Kante wächst. Die Axen dieser ausgeschnittenen Parabeln sind der singulären Kante parallel und entfernen sich von der XZ-Ebene proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der XY-Ebene. Diese Fläche ist also ein schiefer parabolischer Cono-Cuneus.

§ 39.

Eine andere Verallgemeinerung ist die, dass die Ebene des Leitkegelschnitts nicht der singulären Kante parallel ist, sondern mit ihr den Winkel α bildet. Wir wollen hierbei zunächst den speciellen Fall untersuchen, wo

(157) $$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = (a + x)\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

die Gleichungen der Leitlinie sind. Die Gleichung der betreffenden Fläche ist demnach:

(158) $$y^2 (a + x)^2 \operatorname{tg}^2\alpha = (r^2 - x^2) z^2$$

Betrachten wir die Durchschnittscurve dieser Fläche vierten Grades mit einer Ebene senkrecht auf der XZ-Ebene, welche mit der X-Axe den Winkel ψ bildet und von derselben das Stück c ababschneidet, so ergiebt sich, wenn man die Coordinatentransformation anwendet:

(159) $$\begin{cases} x = x'\cos\psi - z'\sin\psi \\ y = y' \\ z = c\operatorname{tg}\psi + x'\sin\psi + z'\cos\psi \end{cases}$$

und $z' = 0$ setzt, als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$y^2 (a + x'\cos\psi)^2 \operatorname{tg}^2\alpha = (r^2 - x'^2\cos^2\psi)(c + x'\cos\psi)^2 \operatorname{tg}^2\psi$$

Für $c = a$ geht diese Gleichung über in

(160) $$\begin{cases} a + x'\cos\psi = 0 \\ y'^2 \operatorname{tg}^2\alpha = (r^2 - x'^2\cos^2\psi)\operatorname{tg}^2\psi \end{cases}$$

Daraus folgt: Alle Ebenen senkrecht auf der XZ-Ebene, welche durch die in der XY-Ebene liegende Gerade $x = -a$ gehen, schnei-

den die Fläche (158) in Ellipsen, deren Mittelpunkte auf der Z-Axe liegen, und deren Axen bezüglich in die Ebenen der xz und der yz fallen.

Zugleich ist ersichtlich: Wenn $a > r$ ist, so besteht die betrachtete Durchschnittscurve nur aus der beschriebenen Ellipse; ist dagegen $a \overset{=}{<} r$, so erhält man ausser dieser Ellipse noch eine Gerade.

Unter den ausgeschnittenen Ellipsen findet sich ein Kreis, und zwar für $\sin\psi = \operatorname{tg}\alpha$. Ein Kreis kann demnach nur aus der Fläche (158) ausgeschnitten werden, wenn $\alpha \leqq \frac{\pi}{4}$ ist.

Hätten wir als Gleichungen des Leitkegelschnitts allgemein angenommen:

$$(161) \qquad \left\{ \begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ z = (a+x)\operatorname{tg}\alpha \end{aligned} \right.$$

so hätten wir als Gleichung der Fläche erhalten:

$$(162) \qquad \left\{ \begin{aligned} z^2.\varphi_1 + z(a+x).\varphi_2 + (a+x)^2.\varphi_3 &= 0 \\ \varphi_1 &= Ax^2 + 2Dx + F \\ \varphi_2 &= 2(Bx+E)y\operatorname{tg}\alpha \\ \varphi_3 &= Cy^2\operatorname{tg}^2\alpha \end{aligned} \right.$$

Für die Durchschnittscurve der oben definirten Ebene mit dieser Fläche ergiebt sich für $c = a$:

$$(163) \qquad \left\{ \begin{aligned} a + x'\cos\psi = 0 \\ \varphi_1'.\operatorname{tg}^2\psi + \varphi_2'.\operatorname{tg}\psi + \varphi_3' = 0 \end{aligned} \right.$$

Der ausgeschnittene Kegelschnitt ist also eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem:

$$(B^2 - A.C)\operatorname{tg}^2\alpha.\sin^2\psi \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0$$

ist, d. h. je nachdem die Leitlinie eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Das charakteristische Binom verschwindet allerdings auch für $\psi = 0$. In diesem Falle ergiebt sich aber die singuläre Kante als Durchschnittscurve. Man kann demnach die betrachteten Flächen so entstanden denken, dass sich ein variabler Kegelschnitt um eine in seiner Ebene liegende Gerade dreht, während die Punkte seiner Peripherie gerade Linien beschreiben, welche einer durch die Drehungsaxe gehenden Ebene parallel sind und durch eine auf dieser Directorebene senkrecht stehende Gerade gehen, welche die Drehungsaxe schneidet.

Die Cono-Cunei gehen dadurch hieraus hervor, dass die Drehungsaxe ins Unendliche rückt.

Aus der Gleichung (158) ergeben sich folgende zwei specielle Fälle.

Für $a = 0$ geht dieselbe über in

$$x^2 y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (r^2 - x^2) z^2 \tag{164}$$

Für $a = r$ ergiebt sich aus (158):

$$y^2 (r + x) \operatorname{tg}^2 \alpha = (r - x) z^2 \tag{165}$$

Diese letztere Gleichung stellt eine Fläche dritten Grades dar, welche die Eigenschaft hat, wie sich leicht nachweisen lässt, dass die Tangentialebene aus ihr im Allgemeinen die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende der Fläche und eine Ellipse ausschneidet.

§ 40.

Schliesslich wollen wir noch eine dritte Voraussetzung, welche wir bei der Definition der Cono-Cunei gemacht haben, fallen lassen. Wir haben dort nämlich angenommen, dass die singuläre Kante auf der Directorebene senkrecht steht, oder, was dasselbe bedeutet, dass die erzeugenden Geraden die singuläre Kante rechtwinklig schneiden. Betrachten wir nun den allgemeineren Fall, dass die Projectionen der Erzeugenden auf die XZ-Ebene mit der singulären Kante den Winkel β bilden.

Diese Erzeugenden müssen demnach den Gleichungen genügen, wenn wir die singuläre Kante wieder zur X-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems nehmen:

$$\left\{ \begin{aligned} y &= uz \\ x &= v + z \operatorname{ctg} \beta \end{aligned} \right. \tag{166}$$

Hat der Leitkegelschnitt allgemein die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ z = (a + x) \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right. \tag{167}$$

so erhält man als Gleichung der betreffenden Fläche, wenn man

$$1 - \operatorname{tg} \alpha . \operatorname{ctg} \beta = m; \quad \operatorname{tg} \alpha . \operatorname{ctg} \beta = n$$

setzt:

$$\left\{ \begin{aligned} & z^2 . \varphi_1 + z(a + x) . \varphi_2 + (a + x)^2 . \varphi_3 = 0 \\ & \varphi_1 = A[na + x - z \operatorname{ctg} \beta]^2 - 2Bny[(1 + n) a + 2x - z \operatorname{ctg} \beta] \\ & \quad + Cn^2 y^2 + 2Dm[na + x - z \operatorname{ctg} \beta] - 2Em . ny + F . m^2 \\ & \varphi_2 = 2[B(na + x) - Cny + Em] y \operatorname{tg} \alpha \\ & \varphi_3 = Cy^2 . \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned} \right. \tag{168}$$

Wir wollen nun nachweisen, dass auch diese Flächen durch Drehung eines veränderlichen Kegelschnitts entstehen können. Zu dem Zwecke betrachten wir die Durchschnittscurve der Fläche (168) mit einer auf der XZ-Ebene senkrecht stehenden Ebene, welche mit der X-Axe den Winkel ψ bildet und von derselben das Stück c abschneidet. Mit Hülfe der Transformationsgleichungen (159) des vorigen § ergiebt sich als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$(169)\qquad \left\{\begin{aligned} &(c+x'\cos\psi)^2 . \varphi_1' . \mathrm{tg}^2\psi \\ &+(c+x'\cos\psi)(a+x'\cos\psi) . \varphi_2' . \mathrm{tg}\,\psi \\ &+(a+x'\cos\psi)^2 . \varphi_3' = 0 \end{aligned}\right.$$

Wird $c = a$, so geht diese Gleichung über in

$$(170)\qquad \left\{\begin{aligned} &a+x'\cos\psi = 0 \\ &\varphi_1' . \mathrm{tg}^2\psi + \varphi_2' . \mathrm{tg}\,\psi + \varphi_3' = 0 \end{aligned}\right.$$

Aus den Gleichungen (168) geht hervor, dass φ_1', φ_2', φ_3' Functionen zweiten Grades in x', y' sind. Mithin resultirt der Satz:

Diejenigen auf der XZ-Ebene senkrechten Ebenen, welche durch die in der XY-Ebene liegende Gerade $x = -a$ gehen, schneiden aus der Fläche (168) im Allgemeinen Kegelschnitte aus.

Das charakteristische Binom der Gleichung der Kegelschnitte ist:

$$(B^2 - A . C)(\mathrm{ctg}\,\psi - \mathrm{ctg}\,\beta)^4 . \sin^2\psi . \mathrm{tg}^4\psi . \mathrm{tg}^2\alpha.$$

Das Vorzeichen desselben hängt mithin von dem Vorzeichen von $B^2 - A . C$ ab, d. h. der ausgeschnittene Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Leitkegelschnitt der Fläche (168) eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Allerdings verschwindet das charakteristische Binom auch für $\psi = 0$ und für $\psi = \beta$. Im ersteren Falle erhält man aber als Durchschnittscurve die singuläre Kante, im zweiten eine erzeugende Gerade der Fläche oder kein geometrisches Gebilde.

Damit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.

XVII.

Das Sehnen-Tangentenviereck.

Von

Herrn Dr. **J. Schumacher.**

In der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht", herausgegeben von J. C. V. Hoffmann, ist im 8. Jahrgang pag. 502. Aufgabe Nummer 48. von Herrn Geheimrat Dr. Schlömilch die nachfolgende Aufgabe gestellt:

„Die Vierecke, welche einem Kreise eingeschrieben und zugleich „einem andern Kreise umgeschrieben sind, bieten mancherlei Auf„gaben dar, von denen bisher nur wenige (z. B. die Ermittelung des „Abstandes der beiden Kreiscentren) Beachtung gefunden haben. „Als Beispiel eines hierher gehörenden Problems sei folgendes er„wähnt: Aus drei gegebenen Eckpunkten A, B, C eines solchen Vier„ecks den vierten Eckpunkt D zu suchen."

„Vierecke der genannten Art sind durch drei gegebene Stücke „bestimmt; die Bearbeitung der einzelnen Fälle gäbe eine kleine „Theorie, die sich vielleicht rein geometrisch behandeln lassen wird."

Ich habe mich an die Untersuchungen dieser besonderen Art von Vierecken gemacht, bin jedoch nicht dem Rate des sehr geehrten Herrn Aufgabenstellers, die sämtlichen einzelnen Fälle, durch die ein Sehnentangentenviereck bestimmt sein kann, zu behandeln, gefolgt, sondern suchte nur die Eigenschaften dieser speciellen Gattung von Vierecken herauszufinden, durch welche ich leichter in den Stand gesetzt zu sein glaubte, die einzelnen Fälle eleganter lösen zu können.

Die Vermutung Schlömilch's, dass die Bearbeitung derselben sich vielleicht rein geometrisch behandeln lassen wird, habe ich bestätigt gefunden.

Die in denselben Zeitschriften über das bicentrische Viereck angestellten Untersuchungen des Herrn R. O. Consentius aus Carlsruhe und jene des Herrn Dr. Eheler aus Zülichau habe ich nicht gekannt und wurde erst, nachdem meine Arbeit schon ziemlich vorgeschritten war, von Herrn Rector Dietsch auf dieselben aufmerksam gemacht. Wo die Resultate, namentlich des ersten Herrn, mit den meinigen die gleichen sind, wird der verschiedenartige Weg, auf welchem wir zu gleichen Schlüssen kamen, die obige Behauptung bestätigen.

Indem ich die interessanten Schlussfolgerungen des Herrn Consentius vollkommen anerkenne, kann ich mir nicht das Urteil versagen, dass genannter Herr auf seinem Wege nicht die Reichhaltigkeit der Eigenschaften erschöpft hätte, wie sie nur bei directer Untersuchung des Sehnen-Tangentenvierecks möglich ist; denn die sich ergebenden Schlussfolgerungen sind in der Tat so vielseitig, dass ich nicht leugne, manche in dieser Abhandlung unerwähnt gelassen zu haben, die von Interesse sind, weil ich sie im Gange meiner Betrachtung für selbstverständlich gehalten habe.

Die Schuld an der geringeren Zahl der Aufgaben, die von Herrn Consentius in dieser Zeitschrift gestellt sind, trägt wohl die allgemeinere also auch desto schwierigere Behandlung.

Meinen Betrachtungen legte ich die Kenntniss der zwei Fundamentalsätze des Sehnen- und Tangentenvierecks zu Grunde:

1) In jedem Sehnenviereck ist die Summe der gegenüberliegenden Winkel $= 180^0$.

2) In jedem Tangentenviereck sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Zum Beweise meiner Lehrsätze werde ich mich des rechnerischen und des rein geometrischen Verfahrens bedienen und demgemäss diese Arbeit in zwei Teile zu teilen haben, von denen der eine das geometrische, der andere das rechnerische Resûme enthält. Manche Lehrsätze werden sich in beiden Teilen bestätigt finden.

Es sei das Sehnen-Tangentenviereck A, B, C, D gegeben durch den Radius des eingeschriebenen Kreises $= \varrho$ und zwei einer Seite anliegende Winkel (A und B). Verbinden wir den Mittelpunkt desselben (M) mit den vier Ecken A, B, C, D, und fällen wir ausserdem noch von M aus die Lote auf die Seiten (Ma_1, Mb_1, Mc_1, Md_1),

so erhalten wir die 4 Sehnenvierecke MAa_1d_1, MBa_1b_1, MCb_1c_1, MDc_1d_1. Fassen wir nun zwei, welche gegenüberliegende Ecken enthalten, ins Auge, etwa die Vierecke

$$MBa_1b_1 \text{ und } MDd_1c_1,$$

so ist

$$\text{Wkl. } B + a_1Mb_1 = 2R$$

$$\text{Wkl. } D + d_1Mc_1 = 2R$$

folglich

$$\text{Wkl. } B + D + a_1Mb_1 + d_1Mb_1 + d_1Mc_1 = 4R$$

$$-\text{Wkl. } B \pm D \qquad = 2R$$

folglich

$$\text{Wkl. } a_1Mb_1 + d_1Mc_1 \qquad = 2R$$

folglich

$$a_1Mb_1 = D$$

und

$$d_1Mc_1 = B.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Construction des Sehnen-Tangentenvierecks aus ϱ und zwei Winkeln.

Halbire den Winkel A und lasse dessen Schenkel den Kreis vom Radius ϱ berühren. Hierauf ziehe M_1a_1 und Md_1 und trage an Md_1 den Winkel B an. Die Schenkel dieses Winkels schneiden auf dem Kreise um M den Berührungspunkt c_1 aus. An Mc_1 trage wieder den Winkel A an, von welchem der Schenkel Mb_1 den vierten Berührungspunkt auf dem Kreise um M ausschneidet.

Die Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 sind die Berührungspunkte der Seiten des gesuchten Vierecks und die Tangenten in ihnen an den Kreis um M schneiden sich in den Ecken A, B, C, D, die wiederum auf einem Kreise liegen.

Aus der nachgewiesenen Eigenschaft des Sehnen-Tangentenvierecks folgern sich noch mehrere andere Constructionen, die wir übergehen, weil es uns nur um die Wirklichkeit eines solchen Vierecks vorerst zu tun ist.

In jedem Sehnen-Tangentenviereck ergänzen sich die Bögen des eingeschriebenen Kreises, die zwischen gegenüberliegenden Winkeln des Vierecks $ABCD$ liegen, zu einem Halbkreise.

Da Wkl. $a_1Mb_1 + d_1Mc_1 = 180^0$ beträgt, müssen auch die Bögen

$$\widehat{a_1b_1} + \widehat{c_1d_1} = 180^0$$

und analog

$$\widehat{a_1d_1} + \widehat{b_1c_1} = 180^0$$

betragen.

Die Verbindungslinien der Berührungspunkte a_1, b_1, c_1, d_1 liefern ein neues Sehnenviereck, welches nicht zugleich Tangentenviereck ist, und dessen Diagonalen auf einander senkrecht stehen. Dass a_1, b_1, c_1, d_1 ein Sehnenviereck, ist sofort aus der Figur einzusehen.

Ist ϱ der Radius des Kreises um M, dann erhalten wir:

$$a_1b_1 = 2\varrho\cos\frac{B}{2} \qquad a_1d_1 = 2\varrho\cos\frac{A}{2}$$

$$c_1d_1 = 2\varrho\sin\frac{B}{2} \qquad b_1c_1 = 2\varrho\sin\frac{A}{2}$$

folglich

$$a_1b_1 + c_1d_1 = 2\varrho\left(\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\right), \quad a_1d_1 + b_1c_1 = 2\varrho\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right)$$

Die Summen der gegenüberliegenden Seiten sind somit nur gleich, wenn Wkl. $A = B$, was hier bei Betrachtung des allgemeinen Falles nicht vorausgesetzt ist.

Ferner ist

$$\text{Wkl. } d_1a_1c_1 = \tfrac{1}{2}d_1Mc_1 = \tfrac{1}{2}B$$

$$\text{Wkl. } a_1d_1b_1 = \tfrac{1}{2}a_1Mb_1 = 90^0 - \tfrac{1}{2}B$$

folglich

$$\text{Wkl. } d_1a_1c_1 + a_1d_1b_1 = 90^0$$

d. h. die Diagonalen des Berührungsehnenvierecks stehen auf einander senkrecht.

Hieraus folgt weiter: Beschreibt man über den Seiten des Berührungsehnenvierecks eines Sehnen-Tangentenvierecks Kreise, so schneiden sich dieselben in dem Durchschnittspunkte der Diagonalen des Sehnen-Tangentenvierecks. Die Diagonalen des ersteren zerlegen die Winkel in ihre Bestandteile.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig:

Errichtet man in einem Kreise von beliebigem Radius zwei auf einander senkrecht stehende Sehnen, so schneiden dieselben auf dem Kreise 4 Punkte aus, welche die Berührungspunkte der Seiten eines Sehnen-Tangentenvierecks sind, von welchem der Schnittpunkt der Sehnen zugleich Durchschnittspunkt der Diagonalen ist.

Seien a_1c_1 und b_1d_1 diese Sehnen, und verbinden wir a_1, b_1, c_1, d_1 mit dem Kreismittelpunkte M, construiren wir ferner die Tangenten in denselben Punkten, so schneiden sich letztere in den Ecken des fraglichen Vierecks A, B, C, D.

Nun ist

$$\text{Wkl. } b_1a_1c_1 = \tfrac{1}{2}b_1Mc_1$$

$$a_1b_1d_1 = \tfrac{1}{2}a_1Md_1$$

folglich

$$b_1a_1c_1 + a_1b_1d_1 = R$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}b_1Mc_1 + \tfrac{1}{2}a_1Md_1 = R$$

$$b_1Mc_1 + a_1Md_1 = 2R.$$

Nach der Construction ist aber

$$b_1Mc_1 = A$$

und

$$a_1Md_1 = C;$$

somit

$$A + C = = 2R.$$

Die Pole der Diagonalen a_1c_1 und b_1d_1 sind offenbar die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Sehnen-Tangentenvierecks. Lassen wir daher diese beiden auf einander senkrecht stehenden Sehnen sich um denselben Punkt drehen, so bewegen sich ihre Pole auf je einer Geraden fort, den Polaren des Punktes x. Diese Geraden müssen aber notwendig zusammenfallen. Sie ist die dritte Diagonale des Vierecks $ABCD$.

Diese Gerade bleibt nun immer dieselbe für alle Sehnen-Tangentenvierecke, so lange wir den Punkt x und den Kreis um M festhalten.

Es müssen daher die Verbindungslinien der Schnittpunkte zweier gegenüberliegender Seiten irgend eines Sehnen-Tangentenvierecks alle mit der Polaren von x zusammenfallen.

Indem wir nun die beiden auf einander senkrecht stehenden Sehnen a_1c_1 und b_1d_1 in immer andere Lagen übergehen lassen, erhalten wir lauter neue Sehnen-Tangentenvierecke, welche sämtlich die äussere Diagonale, die Polare des Punktes x, gemeinschaftlich haben. Eine besondere Lage irgend eines Sehnenpaares wird auch jene sein, wenn eine dieser Sehnen ein Durchmesser des Kreises um M wird.

Construiren wir in den Schnittpunkten dieses Durchmessers mit dem Kreise M die Tangenten, so werden dieselben zu einander und mithin auch zu der äusseren Diagonale parallel. Da aber dieser durch x gezogene Durchmesser auf den Tangenten senkrecht steht, so ist damit auch die Lage dieser äusseren Diagonale fixirt. Wir erhalten daher den merkwürdigen Satz:

„In jedem Sehnen-Tangentenviereck steht die Diagonale, die „man durch Verbindung der Schnittpunkte der verlängerten Vier-

„eckseiten erhält, auf jenem Durchmesser des dem Viereck einbe-„schriebenen Kreises senkrecht, welcher durch den Diagonalschnitt-„punkt geht."

Das Sehnen-Tangentenviereck selbst, durch welches wir auf obigen Satz gelangten, ist aber ein Antiparallelogramm.

Einige Eigenschaften desselben hat Herr Dr. Ehrler in der Hoffmann'schen Zeitschrift, Jahrgang V., pag. 432. bereits veröffentlicht, auf die ich hier nur verweisen will, ohne die betreffenden Sätze noch einmal zu recapituliren.

Ein weiteres besonderes Sehnen-Tangentenviereck erhalten wir durch Annahme jenes Falles, wonach eine seiner Diagonalen durch den Mittelpunkt des ihm umschriebenen Kreises geht.

In einem solchen Viereck müssen zwei Winkel je 90^0 betragen und die Durchmesserdiagonale die anderen Diagonalen halbiren; folglich sind auch je zwei in demselben Endpunkte der Durchmesserdiagonale zusammenstossende Seiten einander gleich. Die Construction dieses Vierecks ist demnach die folgende:

Wir construiren ein circulares Sehnenpaar im Punkte x in der Weise, dass die Linie Mx den Winkel dieses Sehnenpaares halbirt.

Wir haben bisher den Mittelpunkt des irgend einem Sehnen-Tangentenvierecke einbeschriebenen Kreises, sowie den Schnittpunkt (x) der Diagonalen fixirt und erfahren, dass jedes durch x gehende circulare Sehnenpaar Anlass zu einem bicentrischen Vierecke gibt.

Wir treten nun der Frage nach dem Orte der Mittelpunkte der allen Sehnen-Tangentenvierecken umschriebenen Kreise nahe, wenn sie denselben Schnittpunkt der Diagonalen besitzen und demselben Kreise umschrieben sind. Wir beantworten dieselbe durch den folgenden Lehrsatz:

Alle bicentrischen Vierecke, welche demselben Kreise umbeschrieben sind und den Diagonalschnittpunkt gemeinschaftlich haben, sind auch einem und demselben Kreise einbeschrieben.

Beweis.

Unter allen möglichen Vierecken, welche den gestellten Bedingungen genügen, nehmen wir eines, etwa das Viereck $ABCD$ heraus. Dasselbe sei dem Kreise M_1 ein- und dem Kreise M umbeschrieben und habe zum Schnittpunkte der Diagonalen den Punkt x. Construiren wir die Polare des Punktes x in Bezug auf den Kreis M_1,

so folgt sofort, dass sie mit jener des Punktes x in Bezug auf den Kreis M zusammenfällt.

Dem unendlich fernen Punkt derselben entspricht aber im Kreis M_1 ein Durchmesser, der durch x geht, im Kreise M ein Durchmesser, der ebenfalls durch x geht. Beide müssen aber zusammenfallen, und es liegen demnach die Punkte x, M und M_1 in einer Geraden.

Dem Punkte M_1 entspricht als Polare die unendlich ferne Gerade, welche auch zugleich Polare des Punktes M in Bezug auf den Kreis M ist.

Mögen wir daher statt des bicentrischen Vierecks irgend ein anderes nehmen, welches ebenfalls dem Kreise M_1 umbeschrieben ist, und dessen Diagonalen sich im Punkte x schneiden, so wird dasselbe immer dem Kreise M einbeschrieben sein. Wir gelangen daher zu dem Lehrsatze:

Alle Sehnen-Tangentenvierecke, welche demselben Kreise umgeschrieben sind und den Diagonalschnittpunkt gemeinsam haben, sind auch ein und demselben Kreise eingeschrieben. Der Diagonalschnittpunkt liegt auf der Centrale der beiden Kreise.

Sind umgekehrt zwei Kreise so gegeben, dass der eine ganz innerhalb des andern gelegen ist, so ist es im allgemeinen nicht möglich, ein Viereck zu construiren, welches dem einen Kreise umgeschrieben, und dem andern Kreise eingeschrieben ist.

Wenn aber ein solches Viereck existirt, dann giebt es unendlich viele. Dieser Satz wurde schon von Jakobi für Kegelschnitte bewiesen. Hieraus folgt weiter der Satz:

Alle Sehnenvierecke, welche demselben Kreise eingeschrieben sind, und in welchen die Berührungssehnen, die alle durch einen Punkt gehen, auf einander senkrecht stehen, sind zugleich einem und demselben Kreise umschrieben.

Veränderung der Lage des Punktes x.

Für weitere Untersuchungen unseres bicentrischen Vierecks kann uns die Veränderung der Lage des Punktes x dienen.

Denken wir uns den Kreis M fest und den Punkt x in der ganzen Kreisebene herumwandern, so erhalten wir für jede Lage eine unendliche Anzahl von Sehnen-Tangentenvierecke, die immer demselben Kreise umschrieben sind, und von denen eines die Eigenschaft

hat, dass seine Berührungssehnen zu jenen eines gegebenen parallel sind.

Sei x_1 ein zweiter Diagonalschnittpunkt, durch welchen wir das zu ac, bd parallele Sehnenpaar a_1c_1, b_1d_1 ziehen.

Nun ist der Pol von b_1d_1 der Schnitt der Tangenten A_1D_1 und B_1C_1, der Pol von ac der Schnitt der Tangenten AB und CD. Da aber $ac \parallel b_1d_1$, muss die Polare des Schnittpunktes von b_1d_1 und ac in Bezug auf den Kreis M notwendig ein Durchmesser sein, der

1) durch den Schnitt von A_1D_1 und B_1C_1 und AB und CD geht und

2) zu den Sehnen a_1c_1 und bd parallel ist.

Mögen wir nun das eine Sehnenpaar, wohin wir auch wollen verschieben, so bleibt dieser Durchmesser immer derselbe.

Aus demselben Grunde ist die Polare des Schnittpunktes der Sehnen bd und a_1c_1 ebenfalls ein Durchmesser des Kreises M, der notwendig auf dem zuerst erhaltenen senkrecht steht. Wir gelangen daher zu dem folgenden Satze:

Alle Sehnen-Tangentenvierecke, derenhomologe Berührsehnen parallel sind, und welche demselben Kreise umschrieben sind, haben die Eigenschaft, dassihre gegenüberliegenden Seiten sich auf zwei zu einander senkrechten Durchmessern des Kreises, den sie gemeinschaftlich berühren, schneiden.

Nun schneidet das Sehnenpaar a_1c_1 und b_1d_1 das zweite Sehnenpaar ac und bd in 4 im Endlichen und 2 im Unendlichen gelegenen Punkten, von denen jeder Anlass zur Bildung eines Sehnen-Tangentenviereckes giebt. Die 4 im Endlichen gelegenen Diagonalschnittpunkte liefern Sehnenvierecke, von denen je zwei den Schnittpunkt gegenüber liegender Seiten gemeinschaftlich haben. Es ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt der Pol jener Seite, in deren Endpunkten die Seiten des Vierecks den Kreis M berühren.

Halten wir das eine Sehnenpaar fest, und verschieben gleichzeitig eine Sehne parallel, so erhalten wir lauter Sehnen-Tangentenvierecke, von welchen ein Paar Gegenseiten sich im Pole der festen Sehne schneiden, während der Schnittpunkt der beiden andern Gegenseiten auf einem zur festen Sehne senkrechten Durchmesser der Kreise M fortrückt.

Hieraus folgt, dass die Schnitte von

$(A_1B_1,\ B_1C_1)$ $(B_1C_1,\ C_1D_1)$ $(C_1D_1,\ A_1D_1)$ $(A_1D_1,\ A_1B_1)$
$(A\,D,\ A_1D_1)$ $(A_1D_1,\ B\,C)$ $(B_1C_1,\ B\,C)$ $(A\,D,\ B_1C_1)$
$(A\,D,\ B\,C)$ $(A\,B,\ B\,C)$ $(B\,C,\ C\,D)$ $(C\,D,\ A\,D)$
$(D\,C,\ D_1C_1)$ $(D\,C,\ A_1B_1)$ $(A_1B_1,\ A\,B)$ $(A\,B,\ D_1C_1)$

etc. wiederum auf einem Kreise liegen.

Mittelst dieser Betrachtung können wir sämtliche bicentrischen Vierecke in Classen teilen.

Wir ziehen in einem Kreise M eine beliebige Sehne und errichten in jedem ihrer Punkte eine zu ihr senkrechte Sehne.

Auf bekannte Weise können wir dann ein Sehnen-Tangentenviereck construiren. Jedes so erhaltene Tangentenviereck hat die Eigenschaft, dass zwei seiner Seiten sich im Pole der festen Sehne schneiden, während der Schnittpunkt der beiden übrigen Seiten auf einem zur festen Sehne senkrechten Durchmesser fortrückt.

An diese Untersuchungen reihen wir einige Constructionsaufgaben:

Von einem Sehnen-Tangentenviereck ist gegeben

1) der Diagonalschnittpunkt, die durch ihn gehende Berührsehne und der ihm eingeschriebene Kreis.

2) der Schnittpunkt zweier gegenüberliegender Seiten, der Berührungspunkt auf einer derselben und der Diagonalschnittpunkt x.

3) die Schnittpunkte zweier gegenüberliegender Seiten und der Berührpunkt auf einer Seite.

4) 3 Berührpunkte.

Rein Euklidische Untersuchungen über das Sehnen-Tangentenviereck.

Jedes Sehnen-Tangentenviereck liefert ein Berührungs-Sehnenviereck, das der Hälfte des Rechtecks seiner Diagonalen ist.

Ziehen wir die Diagonalen a_1c_1 und b_1d_1, so gehen dieselben durch X und stehen in x auf einander senkrecht.

Nun ist

$$1)\quad a_1x \,.\, b_1x = 2\Delta a_1xb_1$$

$$2)\quad a_1x_1 \,.\, d_1x = 2\Delta a_1xd_1$$

$$3) \quad c_1x_1 . d_1x = 2\Delta c_1xd_1$$
$$4) \quad c_1x_1 . b_1x = 2\Delta b_1xc_1$$

Durch Addition von 1) und 2) erhält man:

$$\text{I.} \quad a_1x . b_1d_1 = 2(\Delta a_1xb_1 + \Delta a_1xd_1) = 2\Delta a_1b_1d_1$$

" " " 3 und 4 "

$$\text{II.} \quad c_1x . b_1d_1 = 2(\Delta c_1xd_1 + \Delta b_1xc_1) = 2\Delta b_1c_1d_1$$

$$\text{I.} + \text{II.} \qquad a_1c_1 . b_1d_1 = 2a_1b_1c_1d_1$$

Oder

$$b_1d_1 . a_1x = 2\Delta a_1b_1d_1$$
$$b_1d_1 . c_1x = 2\Delta b_1c_1d_1$$

folglich

$$b_1d_1 . a_1c_1 = 2 \text{ Viereck } a_1b_1c_1d_1$$

d. h. das Product der Berührsehnen eines Sehnen-Tangentenvierecks ist gleich dem doppelten Inhalt des Berührungspunktenvierecks.

Es folgt ferner sofort:

Verbindet man den Mittelpunkt des einem Sehnen-Tangentenvierecke eingeschriebenen Kreises mit den Berührpunkten, so erhält man 4 Sehnenvierecke, von denen je zwei gegenüberliegende einander ähnlich sind.

Aus dieser Aehnlichkeit folgt:

$$a_1B : \varrho = \varrho : d_1D$$
$$\varrho^2 = a_1B . d_1D.$$

Diese ähnlichen Sehnenvierecke haben demnach noch die weitere Eigenschaft, dass das Rechteck aus nicht homologen Seiten dem Quadrate des Radius gleich ist; ferner sind sie auch Sehnen-Tangentenvierecke; daher der Satz:

In jedem Sehnen-Tangentenvierecke liefern die Verbindungslinien des eingeschriebenen Kreismittelpunktes mit den Berührungspunkten 4 Sehnen-Tangentenvierecke, von denen je zwei gegenüberliegende ähnlich sind, und aus denen das ganze Sehnen-Tangentenviereck sich zusammensetzt.

In jedem Sehnen-Tangentenviereck berührt der eingeschriebene Kreis zwei gegenüberliegende Seiten derart, dass das Rechteck der an der nämlichen Diagonale liegenden durch den Kreis auf gegenüberliegenden Seiten gemachten Abschnitte dem Quadrate des Radius inhaltsgleich ist.

Aus

$$\varrho^2 = a_1B \, . \, d_1D$$

und analog

$$\varrho^2 = a_1A \, . \, c_1C$$

folgt

$$a_1B : a_1A = c_1C : d_1D$$

d. h. Die Abschnitte, welche der einem Sehnen-Tangentenvierecke eingeschriebene Kreis auf gegenüberliegenden Seiten macht, stehen in Proportion.

Gehen wir auf das Berührungssehnenviereck zurück, so finden wir noch eine Eigenschaft, die später verwertet werden kann.

Es ist im Dreieck d_1a_1x der Winkel

$$\text{Wkl. } d_1a_1x = \frac{B}{2}$$

$$\text{Wkl. } Ma_1b_1 = \frac{B}{2}.$$

Daher der Satz:

In dem Berührungssehnenviereck, das wir auch Polarenviereck des Sehnen-Tangentenvierecks heissen könnten, sind dessen Diagonalen und die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Kreismittelpunkte, welche in derselben Ecke zusammenstossen, gegen die Berührsehne, mit welchen sie einen Punkt gemeinschaftlich haben, gleich geneigt. Oder: Die Winkelhalbirende des von einer Diagonale und einem Radius, welche sich in derselben Ecke treffen, gebildeten Winkels, halbirt auch den Winkel des Polarenvierecks an dieser Ecke.

Hieraus folgt die Aehnlichkeit der Dreiecke

$$a_1Mp \quad \text{und} \quad a_1d_1x$$

Es verhält sich daher

$$a_1d_1 : a_1x = \varrho : \frac{a_1b_1}{2}$$

$$a_1x = \frac{a_1b_1 \, . \, a_1d_1}{2\varrho}$$

d. h. der Diagonaldurchschnitt x teilt die Berührsehne gegenüberliegender Berührpunkte des Sehnen-Tangentenvierecks in Abschnitte, von denen jeder die 4 Proportionale zu dem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises und den beiden ihm anliegenden Berührsehnen ist.

Man könnte nun vermuten, dass die Winkelhalbirenden des Polarenvierecks sich in einem Punkte von MX träfen.

Würde dies z. B. von den Winkelhalbirenden bei a_1 und b_1 der Fall sein, so beständen die Proportionen, wenn r Schnittpunkt auf MX ist

$$\varrho : a_1x = Mr : rX$$

analog

$$\varrho : b_1x = Mr : rX$$

d. h.

$$\varrho : a_1x = \varrho : b_1x$$

d. h.

$$a_1x = b_1x$$

Dies würde voraussetzen, dass das Dreieck a_1xb_1 ein gleichschenkliges wäre, was aber nicht der Fall ist, da

$$\text{Wkl. } xa_1b_1 = \frac{A}{2}$$

und

$$\text{Wkl. } xb_1a_1 = 90^0 - \frac{A}{2}.$$

Aus der Gleichheit beider Winkel folgt

$$\text{Wkl. } A = 90^0.$$

Daher erhalten wir hieraus den neuen Satz:

In jedem Sehnen-Tangentenviereck, in welchem eine Diagonale ein Durchmesser des ihm umschriebenen Kreises ist, bilden die Berührungspunkte ein Sehnenviereck, welches zugleich Tangentenviereck ist, und für welches der Mittelpunkt des ihm eingeschriebenen Kreises mit dem Halbirungspunkte der Strecke MX zusammenfällt (dass auch die Halbirungslinien der Winkel bei d_1 und c_1 sich in demselben Punkte treffen müssen, ergiebt sich auf dieselbe Weise).

Ganz analog folgt, dass $d_1x = c_1x$ ist unter der Voraussetzung

$$\text{Wkl. } A = 90^0.$$

Hieraus folgt aber zugleich, dass die Dreiecke d_1xc_1 und a_1xb_1 gleichschenklig rechtwinklige sein müssen, und die Winkelhalbirenden von a_1, b_1, c_1, d_1 in einem Punkte von MX sich schneiden; denn es ist

$$\frac{a_1x}{d_1x} = \frac{c_1x}{b_1x}$$

oder

$$\frac{a_1x : \varrho}{d_1x : \varrho} = \frac{c_1x : \varrho}{b_1x : \varrho}$$

$$\frac{xr : rm}{xr_1 : r_1m} = \frac{xr_1 : r_1m}{xr : rm}$$

oder

$$\frac{xr}{rm} = \frac{xr_1}{r_1 m}$$

d. h. der Punkt r und r_1 müssen zusammenfallen.

D. h. Die Berührungssehnen eines Sehnen-Tangenvierecks, welches einen rechten Winkel enthält, bilden selbst wieder ein Sehnen-Tangentenviereck.

Wir wenden uns nun zu einer andern Figur, die wir aus dem gegebenen Sehnen-Tangentenviereck erhalten, wenn wir dessen Aussenwinkel halbiren. Dieselbe ist von ganz besonderem Interesse für unser gegebenes Viereck, weil wir durch dasselbe vielfache Eigenschaften wieder finden werden, die sich nicht auf dem gewöhnlichen Wege so einfach ergeben.

Die Halbirungslinien der Aussenwinkel des gegebenen Vierecks bilden selbst wieder ein Sehnenviereck, dessen Seiten zu den Seiten des Polarvierecks parallel sind.

Diese Eigenschaft ergiebt sich sofort aus der Construction.

Wir bezeichnen die Ecken des neuen Sehnenvierecks mit $a_2 b_2 c_2 d_2$

Von Herrn Consentius wurde bereits nachgewiesen, dass dieses Viereck und alle analog erhaltenen dem Polarvierecke ähnlich sind. Von einer Recapitulation des Beweises, der sich sofort ergiebt, sehe ich hier ab.

Da nun die Seiten des Vierecks entsprechend parallel sind und die Vierecke $a_2 b_2 c_2 d_2$ und $a_1 b_1 c_1 d_1$ selbst ähnlich sind, müssen die Verbindungslinien analoger Ecken beider Vierecke durch einen Punkt, den Aehnlichkeitspunkt, laufen.

Ferner können alle Eigenschaften des einen auf das andere direct übertragen werden.

Vom Vierecke $a_2 b_2 c_2 d_2$ gilt:

1) Die Diagonalen stehen auf einander senkrecht.

2) Alle Kreise, welche die Seiten zu Durchmessern haben, schneiden sich in einem Punkte, dem Diagonalschnittpunkte.

Es lässt sich nun einfach nachweisen, dass der Diagonalschnittpunkt dieses Vierecks und der Mittelpunkt des dem Vierecke $ABCD$ eingeschriebenen Kreises ein und derselbe ist; denn ziehen wir $d_2 M$ und $c_2 M$, so folgt, dass

Wkl. $d_2 M c_2$

ein Rechter ist (nach dem vorhergehenden Lehrsatze), weil

$$Md_2c_2 = \frac{A}{2}$$

und

$$Mc_2d_2 = 90^0 - \frac{A}{2};$$

mithin

$$\text{Wkl. } d_2Mc_2 = 90^0.$$

Es müssen also die Linien a_2M und c_2M notwendig zusammenfallen, weil ja daraus sich auch ergiebt, dass

$$\text{Wkl. } d_2Ma_2 + b_2Ma_2 = 2R.$$

Dieser Lehrsatz lässt nun einige sehr interessante Folgerungen zu:

1) Die Diagonalen des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$ halbiren den Diagonalen des Vierecks $a_1b_1c_1d_1$.

Es ist $a_2c_2 \parallel a_1c_1$; b_2d_2 geht aber durch M und steht auf a_2c_2 mithin auch auf a_1c_1 senkrecht; es muss daher a_1c_1 durch b_2d_2 halbirt werden.

2) Die Diagonalen schneiden den Kreis in den Eckpunkten eines Quadrates, von dessen Beziehungen zu den übrigen Polarsehnenvierecken später die Rede sein wird.

Den Untersuchungen der Vierecke hinsichtlich ihres Aehnlichkeitspunktes geben ebenfalls zu einigen interessanten Sätzen Anlass.

Denken wir uns den Punkt x, — O soll der Aehnlichkeitspunkt künftig heissen, — dem Polarviereck $a_1b_1c_1d_1$ angehörig, so entspricht ihm im Vierecke $a_2b_2c_2d_2$ der Punkt M, und diesem als dem Viereck $a_1b_1c_1d_1$ angehörig entspricht in $a_2b_2c_2d_2$ der Mittelpunkt jenes Kreises, der durch die 4 Ecken a_2, b_2, c_2, d_2 geht. Derselbe sei M_2.

Die Punkte M_2, M, x, O müssen demzufolge auf einer Geraden liegen, auf der noch alle jene Punkte gelegen sind, welche diesen Punkten in jenen Vierecken entsprechen, welche man erhält, wenn man von $a_2b_2c_2d_2$ in derselben Weise Vierecke construirt, wie dieses aus $a_1b_1c_1d_1$ hervorgegangen ist.

Die Gerade M_2MXO halbirt die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Diagonalen a_2c_2 und b_2d_2, a_1c_1 und b_1d_1; denn die Mittelpunkte von a_2c_2 und b_2d_2, die Punkte M_2 und M, bilden ein Rechteck, von welchem MM_2 die Diagonale ist.

Der Kreis, welcher dem Viereck $ABCD$ umschrieben ist, schneidet die Seiten des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$ ausser in den Punkten A, B, C, D

noch in 4 andern Punkten, die sowol hinsichtlich ihrer Lage in Bezug aufeinander wie auch in Bezug auf die Seiten des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$ von ganz besonderem Interesse sind.

In a_2 treffen sich die Seiten a_2b_2 und a_2d_2, welche vom Kreis um $ABCD$ in den Punkten Q und T geschnitten werden mögen.

Es ist vermöge der constanten Potenz

$$a_2Q \,.\, a_2B = a_2T \,.\, a_2A$$

oder

$$a_2Q : a_2T = a_2A : a_2B$$

Da die beiden Dreiecke Aa_2B und Ta_2Q den Winkel bei a_2 ausserdem noch gemeinschaftlich haben, so folgt, dass dieselben einander ähnlich sind.

Es ist demnach

$$\text{Wkl. } TQa_2 = a_2AB = 90^0 - \frac{A}{2}.$$

Auf dieselbe Weise lässt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke b_2BC und b_2QR nachweisen, weshalb die andere Gleichung

$$\text{Wkl. } b_2QR = BCb_2 = \frac{A}{2}$$

besteht. Durch Addition resultirt

$$\text{Wkl. } TQa_2 + b_2QR = 90^0$$

d. h.

$$\text{Wkl. } TQR = 90^0.$$

Da nun Wkl. $Ma_2b_2 = \frac{A}{2}$ ist, so folgt weiter, dass die Sehne QT auf der Diagonale a_2c_2 senkrecht steht. Wir erhalten somit den Lehrsatz:

„Halbirt man die Aussenwinkel eines Sehnen-Tangentenvierecks, „so bilden die Halbirungslinien ein neues Sehnenviereck, dessen „Seiten von dem dem Viereck $ABCD$ umschriebenen Kreise in 4 „Punkten getroffen werden, die die Ecken eines Rechtecks bilden. „Die Seiten dieses Rechtecks sind den Berührsehnen, welche Punkte „gegenüberliegender Viereckseiten verbinden, parallel."

„Da das Rechteck dem Kreise M_1, welcher dem Viereck $ABCD$ „umschrieben ist, einbeschrieben ist, so schneiden sich seine Diago- „nalen im Mittelpunkte dieses Kreises (M_1)."

Verbinden wir weiter die Ecke B mit M und verlängern BM bis zum Schnittpunkte mit dem Kreise M_1, so geht diese Verbindungs-

linie durch die der Ecke Q des Rechtecks gegenüberliegende Ecke S; denn die Linie QS ist ein Durchmesser und Wkl. QBS ein Rechter, weil er über dem Durchmesser QS steht. Errichten wir nun in B auf a_2b_2 ein Lot, so muss dieses notwendig durch den Kreismittelpunkt M gehen, weil es den Winkel bei B halbirt. Daher der Satz:

Verbindet man die Ecken eines bicentrischen Vierecks mit dem Mittelpunkte des ihm einbeschriebenen Kreises, und verlängert man diese Verbindungslinien bis zum Schnitte des dem Sehnen-Tangentenvierecke umschriebenen Kreises, so bilden die 4 Schnittpunkte die Ecken eines Rechteckes. Oder:

Die Ecke eines bicentrischen Vierecks, der Mittelpunkt des ihm einbeschriebenen Kreises und eine Ecke des Rechtecks $QRST$ liegen auf einer Geraden.

Ferner lässt sich leicht der folgende Satz ableiten:

Die Diagonalen dieses Rechtecks erscheinen vom Mittelpunkte M aus unter demselben Winkel wie die Diagonalen des Sehnen-Tangentenvierecks von demselben Punkte aus.

Es ist nun leicht einzusehen, dass die Ecken des Rechtecks mit den Mittelpunkten der Seiten des Sehnenvierecks zusammenfallen; denn die Seiten des Rechtecks sind || zu den Diagonalen a_2c_2 und b_2d_2 und gleich der Hälfte derselben; infolge hievon ist

$$MQ = a_2Q = b_2Q.$$

Es halbirt somit jede Rechtecksseite die Diagonalabschnitte der Diagonalen des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$.

Sei nun P_2 der Mittelpunkt der Diagonale a_2c_2 und Q_2 der Mittelpunkt von b_2d_2; ziehen wir nun P_2R und Q_2T, so besteht die Gleichung

$$P_2R = Q_2T$$

denn P_2R gleich und parallel $\frac{1}{2}a_2b_2$ und Q_2T ist ebenfalls gleich und parallel a_2b_2; folglich ist das Viereck

$$TP_2RQ_2$$

ein Parallelogramm; der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Parallelogrammes ist der Punkt M_1. Es folgt aus dieser Betrachtung, dass die Mittelpunkte der Diagonalen a_2c_2, b_2d_2 und der Mittelpunkt des dem Sehnen-Tangentenvierecke umschriebenen Kreises in einer geraden Linie liegen.

Verbindet man nun M_2 mit P_2 und Q_2, so entsteht das Rechteck $MP_2M_2Q_2$, dessen eine Diagonale P_2Q_2, während die andere MM_2 ist. Es ist also M_1 in der Mitte der Strecke MM_2 gelegen.

Wir folgern hieraus den bereits in früheren Betrachtungen abgeleiteten Lehrsatz:

„Der Aehnlichkeitspunkt O, die Kreismittelpunkte M, M_1, M_2 liegen auf einer Geraden, und zwar so, dass der Punkt M_1 die Strecke MM_2 halbirt."

Aus dem Parallelogramm TP_2RQ_2 folgt weiter:

Die Mittelpunkte der Diagonalen a_2c_2 und b_2d_2 sind von den Mittelpunkten je zweier gegenüberliegender entsprechender Seiten des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$ gleich weit entfernt. Es ist

$$P_2Q = Q_2S$$

$$P_2T = Q_2R \text{ etc.}$$

Dieselben Betrachtungen können wir auf das Sehnenviereck $a_1b_1c_1d_1$ übertragen.

Die Mittelpunkte der Seiten dieses Vierecks bilden die Ecken eines Rechtecks, dessen Diagonalschnittpunkt mit dem Halbirungspunkt der Strecke MX zusammenfällt.

Da

$$MQ = Qb_2$$

und

$$QR \perp b_2d_2,$$

so halbirt QR den Winkel DQb_2, mithin auch den Bogen BRD. Das Lot, welches man von M_1 auf die Diagonale BD des Sehnen-Tangentenvierecks fällt, halbirt ebenfalls den Bogen BRD; es fällt somit dieses Lot mit der Diagonale M_1R des Rechtecks zusammen. Wir erhalten daher den Satz:

Die Diagonalen des Rechtecks halbiren die Diagonalen des Sehnen-Tangentenvierecks und stehen auf denselben senkrecht. Oder:

Der Mittelpunkt des dem bicentrischen Viereck umschriebenen Kreises, der Mittelpunkt einer seiner Diagonalen und zwei gegenüberliegende Ecken des Rechtecks $QRST$ liegen auf einer Geraden.

Wir wollen nun noch beweisen, dass auch die Mittelpunkte der Diagonalen des Sehnen-Tangentenvierecks und der Kreismittelpunkt M in einer Geraden liegen. Der Mittelpunkt von BD sei y und jener von AC sei u.

Wir haben bewiesen, dass die Dreiecke

$$QMS \text{ und } MBD$$

ähnlich sind, woraus folgt, dass auch die beiden Dreiecke

$$M_1MS \text{ und } yMD$$

ähnlich sein müssen. Die Aehnlichkeit derselben führt zu der Gleichung

$$\text{Wkl. } SM_1M = \text{Wkl. } DyM;$$

ferner ist das Viereck M_1yxu ein Sehnenviereck. Ziehen wir in demselben die Diagonalen yu und M_1x, so müssen sie sich in M schneiden; denn die Winkel SM_1M und uyx sind gleich, weil sie auf demselben Bogen stehen. Es muss demnach uy durch den Kreismittelpunkt M gehen. Wir erhalten daher den Satz:

In jedem Sehnen-Tangentenvierecke liegen die Mittelpunkte seiner 3 Diagonalen und der Mittelpunkt des ihm einbeschriebenen Kreises auf einer Geraden.

Metrische Beziehungen im bicentrischen Viereck.

Wir gehen von einer Gleichung für das Quadrat des dem Viereck einbeschriebenen Kreises vom Radius ϱ aus. Wir fanden

$$\varrho^2 = a_1B \,.\, d_1D$$
$$\varrho^2 = a_1A \,.\, b_1C.$$

Hieraus folgt die Proportion

$$a_1B : a_1A = b_1C : d_1D = c_1C : c_1D$$
$$AB : DC = a_1B : b_1C$$
$$AB + DC : DC = a_1B + b_1C : b_1C$$
$$AB + DC : DC = BC : b_1C$$

d. h. $b_1C = \frac{BC \,.\, DC}{AB + DC}$; ist nun s der Umfang von $ABCD$ und $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, so erhält die vorstehende Gleichung die Form

$$b_1C = \frac{2bc}{s};$$

analog ergiebt sich

$$a_1A = \frac{2ad}{s}$$

$$b_1B = \frac{2ab}{s}$$

$$c_1D = \frac{2cd}{s}$$

Indem wir die Werte aus diesen Gleichungen in

$$\varrho^2 = a_1 B . d_1 D$$

eintragen, erhalten wir

$$\varrho^2 = \frac{4AB.BC.CD.DA}{s^2}$$

$$\varrho = \frac{2}{s}\sqrt{AB.BC.CD.DA}$$

Bekanntlich ist aber der Inhalt eines Sehnen-Tangentenvierecks gegeben durch

$$I = \sqrt{AB.BC.CD.AA};$$

mithin

$$\varrho = \frac{2I}{s}$$

oder, indem wir I daraus berechnen, erhalten wir eine Gleichung,

$$I = \frac{\varrho s}{2}$$

die auch direct erhalten werden kann.

Bezeichnen wir in dem Sehnen-Tangentenvierecke die Berührsehnen mit e_1 und f_1, so gilt der leicht zu beweisende Satz:

Das Product der Berührsehnen ist = dem doppelten Inhalt des Sehnenvierecks, dessen Inhalt $= I_1$ sei

$$e_1 f_1 = 2I_1 = 2\varrho^2(\sin A + \sin B)$$

Bezeichnen wir mit a_1, b_1, c_1, d_1 die Grössen

$$a_1 b_1 = a_1\,,\ b_1 c_1 = b_1\,;\quad c_1 d_1 = c_1\,,\ d_1 a_1 = d;$$

dann bestehen die Gleichungen

$$a_1 = 2\varrho\cos\frac{B}{2};\quad c_1 = 2\varrho\sin\frac{B}{2}$$

$$b_1 = 2\varrho\sin\frac{A}{2};\quad d_1 = 2\varrho\cos\frac{A}{2}$$

Für die Diagonalen dieses Vierecks resultirt sofort

$$a_1 c_1 = e_1 = 2\varrho\cos\frac{A-B}{2}$$

$$b_1 d_1 = f_1 = 2\varrho\sin\frac{A+B}{2}$$

Wir wenden uns zur Betrachtung jenes Sehnenvierecks $a_2b_2c_2d_2$, dessen Seiten auf den Winkelhalbirenden des Sehnen-Tangentenvierecks senkrecht stehen.

Zunächst verweisen wir auf den Lehrsatz, dass dessen Diagonalen durch den Kreismittelpunkt gehen und auf einander senkrecht stehen müssen. Dieselben schneiden demnach den Kreis um M in den Punkten eines Quadrates, dessen Inhalt $= 2\varrho^2$ ist.

Nun fanden wir für das Berührungssehnenviereck $a_1b_1c_1d_1$

$$a_1b_1c_1d_1 = 2\varrho^2(\sin A + \sin B),$$

woraus folgt, dass $a_1b_1c_1d_1$ zu diesem Quadrate in dem Verhältnisse

$$\sin A + \sin B : 1$$

steht.

Bezeichnen wir den Radius des dem Sehnenviereck $a_2b_2c_2d_2$ umschriebenen Kreises mit R und den Mittelpunkt dieses Kreises mit M_2. Fällen wir nun von M_2 ein Lot auf a_2c_2 und verbinden a_2 mit M_2, dann ergiebt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck M_2a_2P

$$M_2P = R\sin\frac{A-B}{2}$$

und analog aus dem rechtwinkligen M_2b_2Q

$$M_2Q = R\cos\frac{A+B}{2}$$

Da aber

$$MM_2^2 = M_2P^2 + M_2Q^2$$

ist, so folgt

$$MM_2^2 = R^2\left(\sin^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= R^2(1 - \sin A \sin B)$$

$$MM_2 = R\sqrt{1 - \sin A \sin B}$$

Wiewol dieser Ausdruck schon abgeleitet wurde, allerdings nicht in der Abhängigkeit von dem Radius R, so glaubte ich ihn noch einmal erwähnen zu müssen, da die Herleitung an ein anderes Gebilde anknüpft.

Dem Viereck $a_2b_2c_2d_2$ entspricht das ähnliche Viereck $a_1b_1c_1d_1$. Der in letzterem zum Punkte M_2 homologe Punkt ist der Punkt M; dem Punkte M aber entspricht, insofern er dem Viereck $a_2b_2c_2d_2$ angehörig angesehen wird, der Punkt x im Viereck $a_1b_1c_1d_1$. Aus dieser Betrachtung folgt daher unmittelbar

$$Mx = \varrho\sqrt{1-\sin A \sin B}.$$

Der Punkt M teilt somit die Strecke M_2x in dem Verhältnisse $R:\varrho$.

Wir verbinden nun den Aehnlichkeitspunkt der beiden Vierecke $a_2b_2c_2d_2$ und $a_1b_1c_1d_1$, den wir mit Q bezeichneten, mit einer Ecke eines dieser Vierecke; diese Verbindungslinie muss dann auch durch die homologe Ecke des andern Vierecks gehen. Wir erhalten die Gleichungen

$$OB_1 : OB_2 = \varrho : R$$
$$Ox : OM = \varrho : R$$

mit denen wir die beiden andern verbinden

$$MM_2 : Mx = R : \varrho$$
$$Mx : MM_2 = \varrho : R$$

folglich

$$Mx : MM_2 = Ox : OM$$

d. h. der Punkt M teilt die Strecke xM_2 in demselben Verhältniss wie der Punkt O die Strecke Mx. Gleichzeitig folgt aber weiter aus der Proportion

$$Mx : Ox = MM_2 : OM$$

d. h. der Punkt x teilt die Strecke OM in demselben Verhältniss, wie der Punkt M die Strecke OM_2. Diese Eigenschaft war direct einzusehen, weil ja der Punkt x im Viereck $a_1b_1c_1d_1$ dem Punkt M im Viereck $a_2b_2c_2d_2$ entspricht.

Wir wollen nun einige Beziehungen zwischen den Radien der hier in Betracht kommenden Kreise ableiten.

Wir bezeichneten den Radius des Kreises M_2 mit R, jenen des Kreises M mit ϱ; der Radius des Kreises M_1 sei r.

Zunächst ist

$$2r = \sqrt{IQ^2 + QR^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{b_2d_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2c_2}{2}\right)^2}$$

$$b_2d_2 = 2R\sin\frac{A+B}{2}; \quad a_2c_2 = 2R\cos\frac{A-B}{2};$$

$$2r = \sqrt{R^2\left(\sin^2\frac{A+B}{2} + \cos^2\frac{A-B}{2}\right)} = R\sqrt{1+\sin A \sin B}$$

$$r = \frac{R}{2}\sqrt{1+\sin A \sin B}$$

Aus dem Dreieck MQB folgt weiter, da Wkl. MQB = Wkl. A ist.

$$MQ \sin A = MB$$

$$a_2 b_2 \sin A = 2MB$$

$$2R \cos\frac{B}{2} \sin A = 2\frac{\varrho}{\sin\frac{B}{2}}$$

oder

$$2\varrho = R \sin A \sin B$$

Wir sind somit zu den 3 Gleichungen gelangt:

$$2r = R\sqrt{1 + \sin A \sin B}$$

$$2\varrho = R \sin A \sin B,$$

aus denen sich ergibt

$$r = \varrho\frac{\sqrt{1 + \sin A \sin B}}{\sin A \sin B}$$

Nun lässt sich auch eine sehr einfache Relation zwischen den Inhalten der 3 Vierecke

$$a_2 b_2 c_2 d_2,\ ABCD \text{ und } a_1 b_1 c_1 d_1$$

aufstellen:

Der Inhalt des Vierecks $a_2 b_2 c_2 d_2$ ist, wie früher gefunden wurde,

$$a_2 b_2 c_2 d_2 = 2R^2 \sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2}$$

Der Inhalt des Vierecks $ABCD$ ist

$$\frac{4\varrho^2}{\sin A \sin B} \sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2} = R^2 \sin A \sin B \sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2}$$

Der Inhalt des Vierecks $a_1 b_1 c_1 d_1$

$$a_1 b_1 c_1 d_1 = 2\varrho^2 \sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2}$$

$$= \frac{R^2}{2} \sin^2 A \sin^2 B \sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2}$$

Setzen wir die 3 Inhalte in Proportion und bezeichnen wir dieselben mit I_1, I_2, I_3, so resultirt:

$$I_1 : I_2 : I_3 = 1 : \tfrac{1}{2} \sin A \sin B : \tfrac{1}{4} \sin^2 A \sin^2 B$$

d. h. die Inhalte aller dieser und ähnlich gebildeter Sehnenvierecke stehen in geometrischer Proportion und man findet den Inhalt eines jeden derselben, wenn man den Inhalt von $a_2 b_2 c_2 d_2$ mit einer Potenz von $\frac{1}{2} \sin A \sin B$ multiplicirt.

Wir gelangen in unserer Betrachtung zu dem rechnerischen Nachweis, dass der Punkt M_1 die Strecke MM_2 halbirt.

Wir finden aus dem Dreieck M_1M_2Q, dass

$$M_1M_2 = \frac{R}{2}\sqrt{1-\sin A\sin B}$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem früher gefundenen

$$MM_2 = R\sqrt{1-\sin A\sin B},$$

so resultirt auf's neue das bereits geometrisch nachgewiesene Resultat, dass

$$M_1M_2 = \tfrac{1}{2}MM_2$$

Wir gehen nun zur Ableitung einiger Relationen zwischen den Radien der dem Sehnen-Tangentenviereck angeschriebenen Kreise über.

Die Mittelpunkte dieser Kreise sind offenbar die Ecken des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$.

Die Kreise haben die Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, ϱ_d.

Nun ist

$$MD\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = d_2D$$

$$MD\cos\frac{B}{2} = \varrho,$$

folglich

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = d_2D$$

$$d_2D\sin\frac{B}{2} = \varrho_d$$

also

$$\varrho_d = \varrho\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{A}{2};$$

analog

$$\varrho_a = \varrho\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

$$\varrho_b = \varrho\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$\varrho_c = \varrho\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

Hieraus ergeben sich einige Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} 1)\quad \varrho_a \cdot \varrho_c &= \varrho^2 \\ 2)\quad \varrho_b \cdot \varrho_d &= \varrho^2 \end{aligned}\right\} \quad \varrho_a : \varrho_b = \varrho_d : \varrho_c$$

Nun war

$$\varrho = \frac{2I}{s}$$

mithin

$$I = \frac{s}{2}\sqrt{\varrho_a \varrho_c} = \frac{s}{2}\sqrt{\varrho_b \varrho_d};$$

also auch

$$I = \frac{s}{2}\sqrt[4]{\varrho_a \varrho_b \varrho_c \varrho_d}$$

Wir schliessen unsere Betrachtung in der Hoffnung, dass diese reingeometrischen Untersuchungen dem Fachschulmanne eine reiche Ausbeute von Lehrsätzen liefern, die dem Schüler neue Liebe zu dem geometrischen Studium einflössen.

Traunstein, im Juni 1884.

XVIII.

Trigonometrische Sätze.

Von

Herrn **A. H. Anglin,** M. A., LL. B., F. R. S.

in Edinburg.

Der Satz, dass

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \operatorname{arc\,tg} a_2 + \dots \operatorname{arc\,tg} a_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \dots}{1 - c_2 + c_4 - \dots} \tag{1}$$

wo $a_1, a_2 \dots a_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \dots \, {}^{n+1} c_n = 0$$

sind, soll bewiesen und dadurch die wolbekannte Formel

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_n) = \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \dots}{1 - c_2 + c_4 - \dots} \tag{2}$$

wo c_r die Summe der Producte zu r Factoren (jeden einmal genommen) von $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, ... $\operatorname{tg}\alpha_n$ bezeichnet, ohne Anwendung des Moivre'schen Satzes begründet werden.

1. Da

$$\operatorname{arc\,tg} A + \operatorname{arc\,tg} B = \operatorname{arc\,tg} \frac{A+B}{1-AB}$$

ist, so haben wir:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \operatorname{arc\,tg} a_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{p_1}{1-p_2}$$

wo a_1, a_2 die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - p_1 x + p_2 = 0$$

sind. Addirt man auf beiden Seiten $\operatorname{arc\,tg} a_3$, so erhält man:

Hieraus e[illegible]

$$\ldots = \operatorname{arctg} \frac{(p_1 + a_3) - p_2 a_3}{1 - (p_2 + p_1 a_3)}$$

Nun war

$$\ldots (x - a_3) = 0$$

mithin

$$\ldots - a_3 x^2 - (p_2 + p_1 a_3) x - p_2 a_3 = 0$$

also auch

Wir schl[illegible]
reingeometris[illegible]
Ausbeute vo[illegible]
dem geometr[illegible]

Traunste[illegible]

(1) Ist n [illegible]

Seite der Gleichung $(-1)^{\frac{n}{2}} \ldots$
Addition von $\operatorname{arctg} a_{n+1}$ erhält

$$\operatorname{arctg} a_1 + \ldots$$

wo

$$A \equiv (c_1 + a_{n+1}) - (c_3 + c_2 a_{n+1} \ldots$$

$$B \equiv 1 - (c_2 + c_1 a_{n+1}) + (c_4 + \ldots$$

und zwar sind $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$

$$(x^n - c_1 x^{n-1} + \ldots$$

das ist

$$x^{n+1} - (c_1 + a_{n+1} \ldots$$

Demnach, da n gerade ist:

$$\operatorname{arctg} a_1 + \ldots \operatorname{arctg} a_{n+1} = \operatorname{arc} \ldots$$

$_2 \ldots a_{n+1}$ die Wurzeln sind von

$$x^{n+1} - t_1 x^n + t_2 x^{n-1} - \ldots - t_{n+1} = 0$$

Ist n ungerade, so ist der letzte Term im oben genannten $(-1)^{\frac{n-1}{2}} c_n$, im Nenner $(-1)^{\frac{n-1}{2}} c_{n-1}$. Verfährt man wie vor- findet man:

$$\operatorname{arc tg} a_1 + \ldots \operatorname{arc tg} a_{n+1} = \operatorname{arc tg} \frac{C}{D}$$

$$C = (c_1 - a_{n+1}) - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} (c_n + c_{n-1} a_{n+1})$$

$$D = 1 - (c_2 + c_1 a_{n+1}) + \ldots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} c_n a_{n+1}$$

ar sind $a_1, \ldots a^{n+1}$ die Wurzeln von

$$x^{n+1} - (c_1 + a_{n+1}) x^n + \ldots + c_n a_{n+1} = 0$$

ngerade ist, so folgt:

$$+ \ldots \operatorname{arc tg} a_{n+1} = \operatorname{arc tg} \frac{t_1 - t_3 + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} t_n}{1 - t_2 + \ldots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} t_{n+1}}$$

$\ldots a_{n+1}$ die Wurzeln sind von

$$x^{n+1} - t_1 x^n + \ldots + t_{n+1} = 0$$

Somit ist der Satz vollständig bewiesen.

Setzt man $a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $a_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$, etc. so ergibt sich als Corollar die anfänglich genannte trigonometrische Formel.

(2) Ferner erhält man für $x = 1$:

$$\operatorname{tg}\frac{n\pi}{4} = \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \ldots}{1 - c_2 + c_4 - \ldots} \tag{3}$$

das ist $= 0,\ 1,\ \infty,\ -1$, jenachdem

$$n \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3 \pmod{4}$$

daher

$$c_1 - c_3 + \ldots - c_{4m-1} = 0 \quad (n = 4m)$$
$$1 - c_2 + \ldots - c_{4m+2} = 0 \quad (n = 4m+2)$$

3. Ein zweiter Satz ähnlicher Natur mit dem vorhergehenden lässt sich hier in angemessener Weise geben. Es soll gezeigt werden, dass

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \ldots \operatorname{arc\,tg} a_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{h_1 - h_3 + h_5 - \text{ in inf.}}{1 - h_2 + h_4 - \text{ in inf.}}$$

wo h_r die Summe der homogenen Producte aus je r der Elemente $a_1, a_2, \ldots a_n$, mit Wiederholung, bezeichnet:

Man hat:

$$(1 - a_1 x)^{-1}(1 - a_2 x)^{-1} \ldots (1 - a_n x)^{-1} =$$
$$1 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_r x^r + \ldots \text{ in inf.} \tag{4}$$

Setzt man nach einander $x = i$ und $-i$ und dividirt die Differenz beider Gleichungen durch ihre Summe, so kommt:

$$i\frac{h_1 - h_3 + h_5 - \ldots \text{ in inf.}}{1 - h_2 + h_4 - \ldots \text{ in inf.}} =$$
$$\frac{(1+ia_1)(1+ia_2)\ldots(1+ia_n) - (1-ia_1)(1-ia_2)\ldots(1-ia_n)}{(1+ia_1)(1+ia_2)\ldots(1+ia_n) + (1-ia_1)(1-ia_2)\ldots(1-ia_n)}$$

Andrerseits ist:

$$(1 + a_1 x)(1 + a_2 x) \ldots (1 + a_n x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots c_n x^n$$

wo c_r die Summe jener Producte ohne Wiederholung bezeichnet. Verfährt man mit dieser Gleichung ebenso wie mit Gl. (4), so erscheint zur Rechten derselbe Ausdruck, und es ergibt sich:

$$\frac{h_1 - h_3 + h_5 - \ldots}{1 - h_2 + h_4 - \ldots} = \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \ldots}{1 - c_2 + c_4 - \ldots}$$

Substituirt man in den Formeln (1) und (2) den ersten Ausdruck für den letztern, so ergibt sich das Zubeweisende.

Das gleiche Resultat kann man auch auf folgende Art gewinnen. Man hat:

$$(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)\ldots(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n) = \cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n)$$

Nun ist aber

$$\cos\alpha+i\sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = \frac{\sec\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$$

daher

$$\frac{\sec\alpha_1\sec\alpha_2\ldots\sec\alpha_n}{(1-i\operatorname{tg}\alpha_1)(1-i\operatorname{tg}\alpha_2)\ldots(1-i\operatorname{tg}\alpha_n)} = \cos(\alpha_1+\ldots\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\ldots\alpha_n)$$

das ist

$$\sec\alpha_1\sec\alpha_2\ldots\sec\alpha_n\{1-h_2+h_4-\ldots+i(h_1-h_3+h_5-\ldots)\} = \cos(\alpha_1+\ldots\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\ldots\alpha_n)$$

mithin einzeln

$$\sin(\alpha_1+\ldots\alpha_n) = \sec\alpha_1\ldots\sec\alpha_n(h_1-h_3+\ldots)$$
$$\cos(\alpha_1+\ldots\alpha_n) = \sec\alpha_1\ldots\sec\alpha_n(1-h_2+\ldots)$$

woraus:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\ldots\alpha_n) = \frac{h_1-h_3+\ldots}{1-h_2+\ldots}$$

4. Setzt man $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = x$, so folgt:

$$n\operatorname{arctg}x = \operatorname{arctg}\frac{h_1x-h_3x^3+h_5x^5-\ldots}{1-h_2x^2+h_4x^4-\ldots}$$

wo h_r jetzt die Anzahl der homogenen Producte von je r unter n Elementen mit Wiederholung bezeichnet, das ist

$$h_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$$

Ist $x = \operatorname{tg}\Theta$, so wird

$$\operatorname{tg}n\Theta = \frac{h_1\operatorname{tg}\Theta-h_3\operatorname{tg}^3\Theta+\ldots}{1-h_2\operatorname{tg}^2\Theta+\ldots}$$

Setzt man $x = 1$, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\frac{n\pi}{4} = \frac{h_1-h_3+\ldots}{1-h_2+\ldots}$$

mit denselben 4 Werten wie in Gl. (3).

5. Folgende Resultate sind vielleicht in ihrem Zusammenhange mit dem Vorhergehenden bemerkenswert.

Man hat:

$$\cos n\Theta+i\sin n\Theta = \cos^n\Theta(1+i\operatorname{tg}\Theta)^n$$

Nach Entwickelung findet man:

$$\cos n\Theta \sec^n\Theta = B; \quad \sin n\Theta \sec^n\Theta = D$$

wo

$$B = 1 - c_2 \operatorname{tg}^2\Theta + c_4 \operatorname{tg}^4\Theta - \ldots$$
$$D = c_1 \operatorname{tg}\Theta - c_3 \operatorname{tg}^3\Theta + c_5 \operatorname{tg}^5\Theta - \ldots$$

letzter Term, jenachdem n gerade oder ungerade, in B $(-1)^{\frac{n}{2}} \operatorname{tg}^n\Theta$ oder $(-1)^{\frac{n-1}{2}} n \operatorname{tg}^{n-1}\Theta$, in D $n(-1)^{\frac{n}{2}-1} \operatorname{tg}^{n-1}\Theta$ oder $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg}^n\Theta$, und

$$c_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Andrerseits ist

$$\cos n\Theta + i \sin n\Theta = (\cos\Theta - i \sin\Theta)^{-n} = \sec^n\Theta (1 - i \operatorname{tg}\Theta)^{-n}$$

Verfährt man wie vorher, so findet man:

$$\cos n\Theta \cos^n\Theta = 1 - h_2 \operatorname{tg}^2\Theta + h_4 \operatorname{tg}^4\Theta - \ldots = A$$
$$\sin n\Theta \cos^n\Theta = h_1 \operatorname{tg}\Theta - h_3 \operatorname{tg}^3\Theta + \ldots = B$$

wo

$$h_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\, r!}$$

Hieraus folgen die Relationen:

$$AB = \cos^2 n\Theta \tag{5}$$

$$\frac{A}{B} = (\cos\Theta)^{2n} \tag{6}$$

$$CD = \sin^2 n\Theta \tag{7}$$

$$\frac{C}{D} = (\cos\Theta)^{2n} \tag{8}$$

und hieraus wieder:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \text{oder} \quad AD = BC \tag{9}$$

$$AB + CD = 1 \tag{10}$$

$$CD = AB \operatorname{tg}^2 n\Theta$$
$$4ABCD = \sin^2 2n\Theta$$
$$AC = BD \cos^{4n}\Theta.$$

XIX.

Neue Relationen innerhalb eines Orthogonalcoefficientensystems.

Von

R. Hoppe.

Die 3.3 Coefficienten einer Orthogonalsubstitution

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \qquad \text{(A)}$$

deren Determinante $= +1$ angenommen wird, erfüllen zunächst 6 Gleichungen der Form

$$a^2+b^2+c^2 = 1$$

6 Gleichungen der Form

$$aa_1+bb_1+cc_1 = 0$$

und 9 Gleichungen der Form

$$a = b_1c_2 - c_1b_2$$

Aus diesen 22 Relationen gehen jedoch manche weitere hervor, die ziemlich einfach und ausserdem durch Anwendung bemerkenswert sind.

Man findet:

$$(b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2 = (b_1^2+c_1^2)+(b_2^2+c_2^2)+2(b_1c_2-c_1b_2)$$
$$= (1-a_1^2)+(1-a_2^2)+2a = 1+a^2+2a$$

also:

$$(b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2=(1+a)^2 \tag{1}$$

woraus durch Zusammensetzung leicht folgt:

$$(1+a+b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2=(1+a)(1+a+b_1+c_2) \tag{1*}$$

ferner:

$$\begin{aligned}(a_1-b)(c-a_2) &= a_1c+ba_2-bc-a_1a_2\\ &= (b_2+ac_1)+(c_1+ab_2)+(b_1c_1+b_2c_2)+(b_1b_2+c_1c_2)\end{aligned}$$

das ist:

$$(a_1-b)(c-a_2)=(b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2) \tag{2}$$

Lässt man nun c_1-b_2 durch cyklische Substitution nach beiden Richtungen einmal in $b-a_1$, das andremal in a_2-c übergehen, so erhält man aus Gl. (1):

$$\begin{aligned}(a+b_1)^2+(b-a_1)^2 &= (1+c_2)^2\\ (c_2+a)^2+(a_2-c)^2 &= (1+b_1)^2\end{aligned}$$

woraus durch Addition:

$$(a_1-b)^2+(c-a_2)^2=2(1-a)(1+a+b_1+c_2) \tag{3}$$

und durch Subtraction:

$$(a_1-b)^2-(c-a_2)^2=2(c_2-b_1)(1+a+b_1+c_2) \tag{4}$$

Addirt man zu Gl. (3) die mit 2 multiplicirte Gl. (2), so kommt:

$$(a_1-b+c-a_2)^2=2(1-a+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2) \tag{5}$$

Endlich gibt die halbe Summe der Gl. (3) (4) zu (2) addirt:

$$(a_1-b)(a_1-b+c-a_2)=(1-a-b_1+c_2+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2) \tag{6}$$

Jede der Gl. (1) bis (6) repräsentirt eine Anzahl Relationen gleicher Form. Erstens können zwei Reihen des Systems (A) ihre Vorzeichen wechseln. Zweitens können 2 Reihen vertauscht werden, indem zugleich eine Reihe ihre Vorzeichen wechselt. Drittens kann jede cyklische Substitution vollzogen werden.

Durch letztere Operation gehen aus jeder Gleichung neun hervor, die sich nie decken und am leichtesten unmittelbar abgelesen werden können, so dass eine besondere Aufführung nicht nötig sein wird.

Aus Gl. (1) gehen durch Vorzeichenwechsel nur zwei Relationen hervor:

$$\left.\begin{array}{l}(b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2=(1+a)^2\\(b_1-c_2)^2-(c_1+b_2)^2=(1-a^2\end{array}\right\}\qquad(1)$$

die sich auch durch zweite Operationen nicht vermehren.

Für Gl. (2) (3) (4) liefert die erste Operation je 4 Relationen:

$$\left.\begin{array}{l}(a_1-b)(c-a_2)=(b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\(a_1-b)(c+a_2)=(b_2-c_1)(1-a-b_1+c_2)\\(a_1+b)(c-a_2)=(b_2-c_1)(1-a+b_1-c_2)\\(a_1+b)(c+a_2)=(b_2+c_1)(1+a-b_1-c_2)\end{array}\right\}\qquad(2)$$

$$\left.\begin{array}{l}(a_1-b)^2+(c-a_2)^2=2(1-a)(1+a+b_1+c_2)\\(a_1-b)^2+(c+a_2)^2=2(1+a)(1-a-b_1+c_2)\\(a_1+b)^2+(c-a_2)^2=2(1+a)(1-a+b_1-c_2)\\(a_1+b)^2+(c+a_2)^2=2(1-a)(1+a-b_1-c_2)\end{array}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(a_1-b)^2-(c-a_2)^2=2(c_2-b_1)(1+a+b_1+c_2)\\(a_1-b)^2-(c+a_2)^2=2(c_2+b_1)(1-a-b_1+c_2)\\(a_1+b)^2-(c-a_2)^2=2(-c_2+b_1)(1-a+b_1-c_2)\\(a_1+b)^2-(c+a_2)^2=2(-c_2-b_1)(1+a-b_1-c_2\end{array}\right\}\qquad(4)$$

Durch die zweite Operation geht die Hauptdiagonalrichtung ab_1c_2 in die transversale a_2b_1c über. Die dadurch erzeugten Formeln können wegen des letzten Factors die Urformeln nicht decken. Man findet:

$$\left.\begin{array}{l}(a_1-b_2)(\ \ c_2+a)=(c_1-b)(1+a_2+b_1-c)\\-(a_1+b_2)(\ \ c_2+a)=(c_1+b)(1-a_2+b_1+c)\\(a_1+b_2)(\ \ c_2-a)=(c_1-b)(1+a_2-b_1+c)\\(a_1-b_2)(-c_2+a)=(c_1+b)(1-a_2-b_1-c)\end{array}\right\}\qquad(2)$$

$$\left.\begin{array}{l}(a_1-b_2)^2+(c_2+a)^2=2(1-a_2)(1+a_2+b_1-c)\\(a_1-b_2)^2+(c_2-a)^2=2(1+a_2)(1-a_2-b_1-c)\\(a_1+b_2)^2+(c_2+a)^2=2(1+a_2)(1-a_2+b_1+c)\\(a_1+b_2)^2+(c_2-a)^2=2(1-a_2)(1+a_2-b_1+c)\end{array}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(a_1-b_2)^2-(c_2+a)^2=2(-c-b_1)(1+a_2+b_1-c)\\(a_1-b_2)^2-(c_2-a)^2=2(-c+b_1)(1-a_2-b_1-c)\\(a_1+b_2)^2-(c_2+a)^2=2(c+b_1)(1-a_2+b_1+c)\\(a_1+b_2)^2-(c_2-a)^2=2(c-b_2)(1+a_2-b_1+c)\end{array}\right\}\qquad(4)$$

Für die Gl. (5) und (6) liefert die erste Operation je 8 Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
(a_1-b+c-a_2)^2 &= 2(1-a+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\
(a_1-b-c+a_2)^2 &= 2(1-a-b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\
(a_1+b+c+a_2)^2 &= 2(1-a+b_2+c_1)(1+a-b_1-c_2)\\
(a_1+b-c-a_2)^2 &= 2(1-a-b_2-c_1)(1+a-b_1-c_2)\\
(a_1-b-c-a_2)^2 &= 2(1+a-b_2+c_1)(1-a-b_1+c_2)\\
(a_1-b+c+a_2)^2 &= 2(1+a+b_2-c_1)(1-a-b_1+c_2)\\
(a_1+b+c-a_2)^2 &= 2(1+a+b_2-c_1)(1-a+b_1-c_2)\\
(a_1+b-c+a_2)^2 &= 2(1+a-b_2+c_1)(1-a+b_1-c_2)
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
(a_1-b)(a_1-b+c-a_2) &= (1-a-b_1+c_2+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\
(a_1-b)(a_1-b-c+a_2) &= (1-a-b_1+c_2-b_2-c_1)(1+a+b_1+c_2)\\
(a_1-b)(a_1-b-c-a_2) &= (1+a+b_1+c_2-b_2+c_1)(1-a-b_1+c_2)\\
(a_1-b)(a_1-b+c+a_2) &= (1+a+b_1+c_2+b_2-c_1)(1-a-b_1+c_2)\\
(a_1+b)(a_1+b+c-a_2) &= (1+a-b_1-c_2+b_2-c_1)(1-a+b_1-c_2)\\
(a_1+b)(a_1+b-c+a_2) &= (1+a-b_1-c_2-b_2+c_1)(1-a+b_1-c_2)\\
(a_1+b)(a_1+b+c+a_2) &= (1-a+b_1-c_2+b_2+c_1)(1+a-b_1-c_2)\\
(a_1+b)(a_1+b-c-a_2) &= (1-a+b_1-c_2-b_2-c_1)(1+a-b_1-c_2)
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Gl. (5) bleibt unverändert bei zweiter Operation, denn die Summanden des ersten und zweiten Factors der rechten Seite folgen den 2 Diagonalrichtungen, so dass sie sich dann bloss vertauschen. Gl. (6) hingegen liefert:

$$\left.\begin{aligned}
(a_1-b_2)(a_1-b_2+c_2+a) &= (1-a_2-b_1-c-b+c_1)(1+a_2+b_1-b)\\
(a_1-b_2)(a_1-b_2-c_2-a) &= (1-a_2-b_1-c+b-c_1)(1+a_2+b_1-c)\\
(a_1-b_2)(a_1-b_2-c_2+a) &= (1+a_2+b_1-c+b+c_1)(1-a_2-b_1-c)\\
(a_1-b_2)(a_1-b_2+c_2-a) &= (1+a_2+b_1-c-b-c_1)(1-a_2-b_1-c)\\
(a_1+b_2)(a_1+b_2+c_2+a) &= (1+a_2-b_1+c-b-c_1)(1-a_2+b_1+c)\\
(a_1+b_2)(a_1+b_2-c_2-a) &= (1+a_2-b_1+c+b+c_1)(1-a_2+b_1+c)\\
(a_1+b_2)(a_1+b_2+c_2-a) &= (1-a_2+b_1+c-b+c_1)(1+a_2-b_1+c)\\
(a_1+b_2)(a_1+b_2-c_2+a) &= (1-a_2+b_1+c+b-c_1)(1+a_2-b_1+c)
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Demnach vertreten die Gl. (1) 18, (2) (3) (4) (5) 72, (6) 144; alle zusammen 450 neue Relationen.

Auf die vorstehenden Relationen ward ich durch die Untersuchungen geführt, von denen der nächst folgende Aufsatz handelt.

XX.

Rein analytische Consequenzen der Curventheorie.

Von

R. Hoppe.

---

§. 1.

In meiner analytischen Curventheorie, d. Arch. T. LVI. S. 62 und schon früher, Crelle Journal Bd. LX. S. 182. Bd. LXIII. S. 122, habe ich das Problem der Darstellung einer Curve aus gegebener Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel auf die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$r'' + i\vartheta r' + \tfrac{1}{4}r = 0 \tag{7}$$

zurückgeführt.

Die Einführung der imaginären Function r war daselbst eine vermittelte; gegenwärtig wird ihr directer Ausdruck in Raumgrössen von Anwendung sein.

Es bedeuten f, g, h die Richtungscosinus der Tangente, f', g', h' die der Hauptnormale, l, m, n die der Binormale, τ, ϑ den Krümmungs- und Torsionswinkel, die Accente die Differentiation nach τ. Sei dann

$$r = e^{\frac{1}{2}\int\frac{f'+il}{1+f}\partial\tau} \tag{8}$$

dann erhält man durch Differentiation:

$$2r' = \frac{f'+il}{1+f}r$$

$$4r'' = \left\{\left(\frac{f'+il}{1+f}\right)^2 + 2\frac{(l-if')\vartheta'-f}{1+f} - 2\frac{f'+il}{(1+f)^2}f'\right\}r$$

$$= \left\{-\frac{f'^2+l^2}{(1+f)^2} + 2\frac{(l-if')\vartheta'-f}{1+f}\right\}r$$

$$= \left\{-\frac{1-f}{1+f} + 2\frac{(l-if')\vartheta'-f}{1+f}\right\}r$$

$$= \left\{-1 + 2\frac{l-if'}{1+f}\vartheta'\right\}r$$

$$= -r - 4i\vartheta' r'$$

und erkennt, dass Gl. (7) durch den Wert (8) erfüllt wird.

Bezeichnet r_1 den conjugirten Wert zu r, so ist

$$rr_1 = e^{\int \frac{\partial f}{1+f}} = A(1+f)$$

$$4r'r_1' = \frac{1-f}{1+f}rr_1 = A(1-f)$$

woraus:

$$rr_1 + 4r'r_1' = 2A \tag{9}$$

$$rr_1 - 4r'r_1' = 2Af \tag{10}$$

Die Constante A kann man $=1$ machen, indem man $f=0$ zur untern Grenze des Integrals in (8) wählt.

Ferner ist

$$2r_1r' = \frac{f'+il}{1+f}rr_1 = A(f'+il)$$

woraus:

$$r_1r' + rr_1' = Af'; \quad r_1r' - rr_1' = iAl \tag{11}$$

Hiernach sind durch r die Grössen f, f', l, somit die Lage der Curven zur x Axe bestimmt und explicite ausgedrückt.

§. 2.

Man kann nun r einerseits als specielle Lösung der Gl. (7), andrerseits als geknüpft durch Gl. (8) an die specielle Lage der Curve zur x Axe betrachten, und in beiden Eigenschaften zur vollen Allgemeinheit fortschreiten. Dann entsteht die Frage, ob die allgemeinste Lösung der Gl. (7) im ganzen der Curve in allgemeinster Lage, und welche Lösung einer beliebig gegebenen Lage entspricht.

Unmittelbar erhellt Folgendes. Da Gl. (7) nur durch den Coefficienten ϑ' von der Curve abhängt, und dieser für jede Lage dieselbe Grösse ist, so muss Gl. (7) erfüllt bleiben, wenn man die x Axe beliebig verrückt, oder, was dasselbe ist, für f, f', l eine beliebige Orthogonalsubstitution einführt. Sind also a, b, c Richtungscosinus einer beliebigen neuen Geraden gegen die x, y, z, so ist

$$r_2 = e^{\frac{1}{2}\int\frac{af'+bg'+ch'+i(al+bm+cn)}{1+af+bg+ch}\partial\tau} \tag{12}$$

eine Lösung der Gl. (7). Demnach kann Gl. (7) nur entweder gleich allgemein oder allgemeiner sein als dieser Ausdruck.

Andrerseits wissen wir, dass die allgemeinste Lösung der linearen Gleichung 2. Ordnung (7), die wir vorläufig mit r_3 bezeichnen, durch die Relation

$$r_3 = r\int\frac{e^{-i\vartheta}\partial\tau}{r^2} \tag{13}$$

auf das Specialintegral zurückgeführt wird. Folglich muss für irgend welche constante untere Grenzen der zwei in r_3 enthaltenen Integrale r_2 identisch mit r_3 werden, indem wir a, b, c als beliebig gegeben, die unbekannten Integralgrenzen als Functionen davon ansehen. Zur Abkürzung sei

$$\omega = \frac{f'+il}{1+f}; \quad \omega_2 = \frac{af'+\ldots+i(al+\ldots)}{1+af+\ldots} \tag{14}$$

dann hat man hiernach:

$$e^{\frac{1}{2}\int(\omega_2-\omega)\partial\tau} = \int\partial\tau\, e^{-i\vartheta-\int\omega\partial\tau}$$

und nach Differentiation:

$$\frac{\omega_2-\omega}{2}e^{\frac{1}{2}\int(\omega_2-\omega)\partial\tau} = e^{-i\vartheta-\int\omega\partial\tau}$$

oder:

$$e^{-\frac{1}{2}\int(\omega_2+\omega)\partial\tau} = \frac{\omega_2-\omega}{2}e^{i\vartheta} \tag{15}$$

§. 3.

Hiervon machen wir erst specielle Anwendung zur algebraischen Darstellung des Integrals im Exponenten von r. Seien b und c unendlich klein 1. Ordnung; dann ist $1-a$ unendlich klein 2. Ordnung. Entwickelt man also $\omega_2-\omega$ bis auf 1. Ordnung, so findet man:

$$\omega_2-\omega=\frac{(1+f)[b(g'+im)+c(h'+in)]-(f'+il)(bg+ch)}{(1+f)^2}$$

$$=b\frac{g'+im+(fg'-gf')+i(fm-hl)}{(1+f)^2}$$

$$+c\frac{h'+in+(fh'-hf')+i(fn-kl)}{(1+f)^2}$$

$$=b\frac{g'+n+i(m-h')}{(1+f)^2}+c\frac{h'-m+i(n+g')}{(1+f)^2}$$

$$=(b+ic)\frac{g'+n+i(m-h')}{(1+f)^2}$$

Der constante Factor $b+ic$ verschmilzt mit der untern Integralgrenze. Lässt man also b, c stetig verschwinden, so dass ω_2 in ω übergeht, so erhält man:

$$e^{-\int\frac{f'+il}{1+f}\partial\tau}=\frac{n+g'+i(n-h')}{(1+f)^2}e^{i\vartheta} \tag{16}$$

für bestimmte untere Integralgrenze, die jedoch noch vom Anfang der ϑ abhängig bleibt.

Sei

$$\varphi=\int\frac{l\,\partial\tau}{1+f} \tag{17}$$

Nach Multiplication mit

$$e^{\int\frac{f'\partial\tau}{1+f}}=1+f$$

lautet Gl. (16):

$$e^{-i\varphi}=\frac{n+g'+i(m-h')}{1+f}e^{i\vartheta} \tag{18}$$

woraus:

$$\cos(\varphi+\vartheta)=\frac{g'+n}{1+f};\quad \sin(\varphi+\vartheta)=\frac{h'-m}{1+f} \tag{19}$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{h'-m}{g'+n}-\vartheta \tag{20}$$

ein Resultat, dass sich durch Differentiation leicht bestätigt. Auf rein analytischem Wege hätte sich dasselbe schwerlich auffinden lassen; es war vielmehr kaum wahrscheinlich, dass ein allgemeiner Ausdruck für das Integral (17) existirte, weil die Grössen f, l, τ Functionen zweier Variabeln sind, die nur durch die Curvengleichung in Relation mit einander stehen.

Die Relation

$$(g'+n)^2+(h'-m)^2=(1+f)^2$$

welche für das Bestehen der Gl. (19) notwendig ist, zeigt sich übereinstimmend mit der Formel (1) im vorigen Artikel.

§. 4.

Jetzt lässt sich die allgemeine Relation (15) algebraisch gestalten. Wir schreiben sie:

$$(\omega_2-\omega)e^{i\vartheta}rr_2=A \text{ (const.)} \tag{21}$$

Hier ist

$$r=\sqrt{1+f}\,e^{\frac{i\varphi}{2}} \tag{22}$$

Aus den Gl. (19) findet man:

$$\cos\frac{\varphi+\vartheta}{2}=\sqrt{\frac{1+f+g'+n}{2(1+f)}};$$

$$\sin\frac{\varphi+\vartheta}{2}=\frac{h'-m}{\sqrt{2(1+f)(1+f+g'+n)}}$$

daher wird

$$r=\frac{1+f+g'+n+i(h'-m)}{\sqrt{2(1+f+g'+n)}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}} \tag{23}$$

Durch eine Orthogonalsubstitution geht r über in r_2. Sei also

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

ein constantes Orthogonalcoefficientensystem, und wenn der Index 2 das Resultat der Substitution bezeichnet,

$$\left.\begin{array}{lll} f_2=af+\ldots; & g_2=a_1f+\ldots; & h_2=a_2f+\ldots \\ f_2'=af'+\ldots; & g_2'=a_1f'+\ldots; & h_2'=a_2f'+\ldots \\ l_2=al+\ldots; & m_2=a_1l+\ldots; & n_2=a_2l+\ldots \end{array}\right\} \tag{24}$$

dann wird

$$r_2=\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{\sqrt{2(1+f_2+g_2'+n_2)}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}} \tag{25}$$

und nach Einführung in Gl. (21) erhält man:

$$\left(\frac{f_2'+il_2}{1+f_2}-\frac{f'+il}{1+f}\right)\frac{1+f+g'+n+i(h'-m)}{\sqrt{1+f+g'+n}}\times$$
$$\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{\sqrt{1+f_2+g_2'+n_2}}=2A \quad (26)$$

Die Constante A muss im Laufe der Curve dieselbe bleiben, also ihren Wert behalten, wenn die Tangente, Hauptnormale, Binormale die Richtungen der x, y, z haben, so dass

$$f=g'=n=1$$

wird. Hier ergibt sich:

$$\frac{b+ic}{1+a}\,\frac{1+a+b_1+c_2+i(b_2-c_1)}{\sqrt{1+a+b_1+c_2}}=A$$

das ist nach Ausführung der Multiplication:

$$A=\frac{b-a_1+i(c-a_2)}{\sqrt{1+a+b_1+c_2}} \quad (27)$$

Den Modul des Zählers zeigt Gl. (3), der gemäss wir setzen können:

$$A=\sqrt{2(1-a)}e^{i\alpha} \quad (28)$$

$$e^{i\alpha}=\frac{b-a_1+i(c-a_2)}{\sqrt{2(1-a)(1+a+b_1+c_2)}} \quad (29)$$

Setzt man ebenso

$$\cos 2\mu=\frac{g'+n}{1+f};\quad \sin 2\mu=\frac{h'-m}{1+f} \quad (30)$$

so lautet Gl. (26):

$$\left(\frac{f_2'+il_2}{1+f_2}-\frac{f'+il}{1+f}\right)\sqrt{(1+f)(1+f_2)}e^{i(\mu+\mu_2)}=\sqrt{2(1-a)}e^{i\alpha} \quad (31)$$

Die Gleichheit der Moduln ist von selbst offenbar; denn das Quadrat des Moduls zur Linken ist:

$$\left\{\left(\frac{f_2'}{1+f_2}-\frac{f'}{1+f}\right)^2+\left(\frac{l_2}{1+f_2}-\frac{l}{1+f}\right)^2\right\}(1+f)(1+f_2)=$$
$$\left\{\frac{f_2'^2+l_2^2}{(1+f_2)^2}+\frac{f'^2+l^2}{(1+f)^2}-2\frac{f'f_2'+ll_2}{(1+f)(1+f_2)}\right\}(1+f)(1+f_2)=$$
$$\left\{\frac{1-f_2}{1+f_2}+\frac{1-f}{1+f}-2\frac{f'f_2'+ll_2}{(1+f)(1+f_2)}\right\}(1+f)(1+f_2)=$$
$$2(1-ff_2-f'f_2'-ll_2)=2(1-a)$$

Die Amplitude des ersten Factors in (31) ist:

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{(1+f)l_2 - l(1+f_2)}{(1+f)f_2' - f'(1+f_2)}$$

die Gleichsetzung der Amplituden gibt:

$$\psi + \mu + \mu_2 = \alpha \tag{32}$$

Entwickelt man f_2, f_2', l_2 nach (24), so kommt:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{-l+al+b(m+fm-lg)+c(n+fn-lh)}{-f'+af'+b(g'+fg'-f'g)+c(h'+fh'-f'h)}$$
$$= \frac{-(1-a)l+b(m-h')+c(n+g')}{-(1-a)f'+b(g'+n)+c(h'-m)}$$

Nimmt man hierzu nach Gl. (30):

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{h'-m}{1+f+g'+n}$$

so findet man:

$$\operatorname{tg}(\psi+\mu) = \{(1+f)[-(1-a)l+b(m-h')+c(n+g')]$$
$$-(1-a)[l(g'+n)+f'(h'-m)]+c[(g'+n)^2+(h'-m)^2]\}:\{(1+f)[-(1-a)f'$$
$$+b(g'+n)+c(h'-m)]+b[(g'+n)^2+(h'-m)^2]\}$$

Nach Gl. (1) ist aber

$$(g'+n)^2+(h'-m)^2 = (1+f)^2$$

daher

$$\operatorname{tg}(\psi+\mu) = \frac{-(1-a)l-b(h'-m)+c(1+f+g'+n)}{-(1-a)f'+b(1+f+g'+n)+c(h'-m)}$$

Andrerseits ist

$$\operatorname{tg}\mu_2 = \frac{h_2'-m_2}{1+f_2+g_2'+n_2}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{c-a_2}{b-a_1}$$

und nach Gl. (32)

$$\operatorname{tg}(\mu_2-\alpha) = -\operatorname{tg}(\psi+\mu)$$

folglich

$$\frac{(c-a_2)(1+f_2+g_2'+n_2)-(b-a_1)(h_2'-m_2)}{(b-a_1)(1+f_2+g_2'+n_2)+(c-a_2)(h_2'-m_2)} =$$
$$\frac{-(1-a)l-b(h'-m)+c(1+f+g'+n)}{-(1-a)f'+b(1+f+g'+n)+c(h'-m)} \tag{33}$$

Demnach hat der Ausdruck zur Linken die Eigenschaft sich nicht zu ändern, wenn entsprechend einer Rotation der Curve um die x Axe $a_1 b_1 c_1$ $a_2 b_2 c_2$ variiren.

§. 5.

Wir haben r_2 als jedenfalls begriffen in r_3 nach Gl. (13) dargestellt, wo die Constanten noch nicht bestimmt sind. Seien r und r_1 definirt durch (23) und (25) und

$$B\frac{r_2}{r} = \int e^{-i\vartheta}\frac{\partial\tau}{r^2} + C \tag{34}$$

Durch Differentiation folgt:

$$B\frac{\omega_2 - \omega}{2} r r_2 e^{i\vartheta} = 1$$

Dies verglichen mit (21) und (27) gibt:

$$B = \frac{2}{A} = \sqrt{\frac{2}{1-a}}\, e^{-i\alpha} = \frac{b-a_1+i(c-a_2)}{(1-a)\sqrt{1+a+b_1+c_2}}$$

Nun ist nach Gl. (22) (19)

$$\frac{e^{-i\vartheta}}{r^2} = \frac{e^{-i(\varphi+\vartheta)}}{1+f} = \frac{g'+n-i(h'-m)}{(1+f)^2}$$

und wir gewinnen aus (34) zunächst die neue Integralformel:

$$S = \int \frac{g'+n-i(h'-m)}{(1+f)^2}\partial\tau = \frac{b-a_1-i(c-a_2)}{(1-a)\sqrt{1+a+b_1+c_2}} \times$$

$$\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{1+f+g'+n+i(h'-m)}\sqrt{\frac{1+f+g'+n}{1+f_2+g_2'+n_2}} \tag{35}$$

Für $a = 1$ ist der Ausdruck nicht direct anwendbar. Um auf den Fall stetig überzugehen, sei

$$a = c_2 = \cos\varkappa;\quad b_1 = 1;\quad c = -a_2 = \sin\varkappa$$

und $\varkappa$ unendlich klein. Dann wird bei Entwickelung bis auf 1. Ordnung

$$\frac{b-a_1}{1-a} = 0 \qquad \frac{c-a_2}{1-a} = \frac{4}{\varkappa}$$

$$1+f_2+g_2'+n_2 = 1+f+g'+n+(h-l)\varkappa$$

$$h_2'-m_2 = h'-m-f'\varkappa$$

daher

$$S = -\frac{2i}{\varkappa}\,\frac{1+f+g'+n+(h-l)\varkappa+i(h'-m-f'\varkappa)}{1+f+g'+n+i(h'-m)} \times$$

$$\left(1-\frac{h-l}{1+f+g'+n}\,\frac{\varkappa}{2}\right)$$

$$= -\frac{2i}{\varkappa}\left\{1+\frac{h-l-if'}{1+f+g'+n+i(h'-m)}\varkappa - \frac{h-l}{1+f+g'+n}\,\frac{\varkappa}{2}\right\}$$

Nun ist nach Gl. (1*)

$$(1+f+g'+n)^2+(h'-m)^2 = 2(1+f)(1+f+g'+n)$$

folglich

$$S = -\frac{2i}{\varkappa}\left\{1+\frac{(h-l-if')(1+f+g'+n-i(h'-m))-(h-l)(1+f)}{2(1+f)(1+f+g'+n)}\varkappa\right\}$$

$$= -\frac{2i}{\varkappa}\left\{1+\frac{(h-l)(g'+n-i(h'-m))(-if'(1+f+g'+n)-f'(h'-m)}{2(1+f)(1+f+g'+n)}\varkappa\right\}$$

Es ist aber

$$(h-l)(g'+n)-f'(h'-m) = h(g'+n)+(f'm-g'l)-(ln+f'h')$$
$$= h(1+f+g'+n)$$

und nach Gl. (2)

$$(h-l)(h'-m) = -(f'+g)(1+f+g'+n)$$

daher

$$S = -\frac{2i}{\varkappa}\left(1+\frac{h+ig}{1+f}\frac{\varkappa}{2}\right) = \frac{g-ih}{1+f}+\text{const}$$

In einfachster Gestalt hat man also:

$$\int\frac{g'+n}{(1+f)^2}\partial\tau = \frac{g}{1+f}; \quad \int\frac{h'-m}{(1+f)^2}\partial\tau = \frac{h}{1+f}$$

wie sich auch durch Differentiation leicht bestätigt.

§. 6.

Jetzt ist für irgend einen Wert von C, welcher vom Coefficientensystem abhängt, längs der Curve

$$\frac{b_1-a_1-i(c-a_2)}{(1-a)\sqrt{1+a+b_1+c_2}}\,\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{1+f+g'+n+i(h'-m)}\sqrt{\frac{1+f+g'+n}{1+f_2+g_2'+n_2}}$$
$$+C = \frac{g-ih}{1+f}$$

Da man eine momentane Stellung der Tangente, Haupt- und Binormale für x, y und z Richtung wählen kann, so ist es gestattet das Wertsystem

$$f = g' = n = 1$$

als existirend zu betrachten und in die Gleichung einzuführen. Dann kommt:

$$\frac{b-a_1-i(c-a_2)}{(1-a)\sqrt{1+a+b_1+c_2}}\,\frac{1+a+b_1+c_2+i(b_2-c_1)}{4}\sqrt{\frac{4}{1+a+b_1+c_2}}+C=0$$

Nun ist nach Gl. (2)

$$(b-a_1)(b_2-c_1) = -(c+a_2)(1+a+b_1+c_2)$$
$$(c-a_2)(b_2-c_1) = (a_1+b)(1+a+b_1+c_2)$$

und die Gleichung reducirt sich auf

$$\frac{b-a_1-i(c-a_2)-i[c+a_2+i(a_1+b)]}{2(1-a)}+C=0$$

oder

$$C=-\frac{b-ic}{1-a}$$

Mit Anwendung von Gl. (1*) können wir das Resultat schreiben:

$$\frac{[b-a_1-i(c-a_2)][1+f+g'+n-i(h'-m)][1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)]}{2(1-a)(1+f)\sqrt{(1+a+b_1+c_2)(1+f+g'+n)(1+f_2+g_2'+n_2)}}$$
$$=\frac{b-ic}{1-a}+\frac{g-ih}{1+f} \tag{36}$$

Diese Formel stellt das Product

$$(1+a+b_1+c_2)(1+f+g'+n)(1+f_2+g_2'+n_2) \tag{37}$$

als Quadrat dar. Die 3.3 darin figurirenden Grössen sind die Richtungscosinus gleichnamiger Axen dreier orthogonaler Axensysteme gegen einander. Das Product bleibt daher ungeändert erstens bei Vertauschnng der 3 Axensysteme, zweitens bei gleichzeitig cyklischer Vertauschung der Axen innerhalb jedes Systems. Die Basis des Quadrats zeigt dagegen nicht dieselbe Symmetrie; daher lässt sie sich in 9 verschiedenen Formen darstellen, welche identisch sein müssen.

§. 7.

Nach dem Vorstehenden ist nun

$$r_2=\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{\sqrt{2(1+f_2+g_2'+n_2)}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}}$$
$$\frac{1}{B}\frac{1+f+g'+n+i(h'-m)}{\sqrt{2(1+f+g'+n)}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}}\left(\frac{g-ih}{1+f}-C\right)$$

für

$$\frac{1}{B}=\frac{b-a_1+i(c-a_2)}{2\sqrt{1+a+b_1+c_2}};\quad -C=\frac{b-ic}{1+a} \tag{38}$$

Das allgemeinste Integral r_3 der Gl. (7) muss den gleichen Ausdruck für allgemeine B, C haben. Soll nun r_2 das allgemeinste Integral

repräsentiren, so ist einzige Bedingung, dass für gegebene B, C die Gl. (38) erfüllt werden können. Setzt man

$$\begin{aligned} a &= \cos\varkappa; & b &= \sin\lambda\sin\nu; \quad c = \sin\lambda\cos\nu \\ a_1 &= -\sin\varkappa\sin\mu; & b_1 &= \cos\varkappa\sin\mu\sin\nu + \cos\mu\cos\nu \\ & & c_1 &= \cos\lambda\sin\mu\cos\nu - \cos\mu\sin\nu \\ a_2 &= -\sin\varkappa\cos\mu; & b_2 &= \cos\varkappa\cos\mu\sin\nu - \sin\mu\cos\nu \\ & & c_2 &= \cos\varkappa\cos\mu\cos\nu + \sin\mu\sin\nu \end{aligned}$$

dann wird

$$\frac{1}{B} = i\sin\frac{\varkappa}{2}e^{-i(\mu+\nu)}; \quad C = -i\operatorname{tg}\frac{\varkappa}{2}e^{-i\nu} \tag{39}$$

Setzt man

$$\frac{1}{B} = pe^{i\pi}; \quad C = qe^{i\varrho}$$

so erhält man die 4 Bedingungen:

$$\sin\frac{\varkappa}{2} = p; \quad \mu+\nu = 2(\mathrm{R}-\pi) \tag{40}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varkappa}{2} = q; \quad \nu = -\mathrm{R}-\varrho \tag{41}$$

Die Amplitudengleichungen lassen sich durch μ und ν erfüllen, die Modulgleichungen im allgemeinen nicht. Demnach ist das durch Gl. (25) (24) definirte r_2 nicht gleich allgemein mit r_2. Beide unterscheiden sich durch einen reellen Factor.

Betrachtet man dagegen r_2 als Bestimmungsgrösse der Curve, so zeigen die Gl. (9) (10) (11), dass nicht nur ein reeller, sondern ein beliebig complexer Factor von jedem r, mithin auch von r_2 aus den Werten von f, f', l herausfällt, so dass die erste Gl. (39) zur Bestimmung der Curve nicht mitwirkt. Hier fallen die Gl. (40) weg; nur die Gl. (41) sind notwendig und bestimmen $\varkappa$ und ν, während μ willkürlich bleibt. Erwägt man indes, dass durch $\varkappa$ und ν ebenso wie durch f, f', l die Lage der Curve zur x Axe allein bestimmt wird, während μ nur die willkürliche Rotation um die x Axe ausdrückt, so erkennt man, dass die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung sich vollkommen mit der allgemeinsten Lage einer Curve deckt. Man kann demnach die Differentialgleichung nicht dazu verwenden, aus der, einer speciellen Curve entnommenen Lösung die Bestimmung anderer Curven abzuleiten.

§. 8.

Seien r, r_1, r_2 definirt durch Gl. (23) entsprechend 3 verschiedenen Lagen derselben Curve. Dann muss, weil alle die Gl. (7) erfüllen, eine lineare Relation

$$Ar + A_1 r_1 + A_2 r_2 = 0 \tag{42}$$

zwischen ihnen existiren. Durch Differentiation geht daraus hervor:

$$A\omega r + A_1 \omega_1 r_1 + A_2 \omega_2 r_2 = 0$$

Aus beiden Gleichungen findet man:

$$A : A_1 : A_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{r} : \frac{\omega_2 - \omega}{r_1} : \frac{\omega - \omega_1}{r_2}$$

Man braucht dann nur ein specielles Wertsystem, bezeichnet durch den Index 0 einzuführen, um die Formel (42) zu einer bestimmten zu machen, nämlich:

$$\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{r}\right)_0 r + \left(\frac{\omega_2 - \omega}{r_1}\right)_0 r_1 + \left(\frac{\omega - \omega_1}{r_2}\right)_0 r_2 = 0$$

das ist einer algebraischen Relation zwischen 3 orthogonalen Systemen.

Zu specieller Anwendung mögen das zweite und dritte Axensystem gegen das erste die Richtungscosinus

0 1 0	0 0 1
0 0 1	1 0 0
1 0 0	0 1 0

haben. Zur Coefficientenbestimmung setzen wir

$$f = g' = n = 1$$

dann werden die ω nach der Reihe 0, 1, i, die r ebenso 2, $1-i$, $1+i$; die Coefficienten haben den gemeinsamen Factor $\frac{1}{2}(1-i)$, nach dessen Weglassung sie sind: 1, -1, -1. Die Gleichung lautet:

$$r - r_1 - r_2 = 0 \quad \text{oder:}$$

$$\frac{1+f+g'+n+i(h'-m)}{\sqrt{1+f+g'+n}} - \frac{1+g+h'+l+i(f'-n)}{\sqrt{1+g+h'+l}} - \frac{1+h+f'+m+i(g'-l)}{\sqrt{1+h+f'+m}} = 0$$

Macht man die Gleichung rational, so erhält man:

$$2\{(1+f+g'+n)^2 + (1+g+h'+l)^2 + (1+h+f'+m)^2\} = (1+f+g+h+f'+g'+h'+l+m+n)^2.$$

§. 9.

In meiner analytischen Curvantheorie, Arch. T. LVI. S. 62, habe ich gezeigt, dass jeder Lösung r der Gl. (7) als zweite der conjugirte Wert von

$$r' e^{i\vartheta}$$

entspricht. Setzt man den Wert $\frac{1}{2}\omega r$ für r' und für ω, r die Ausdrücke (14) (23), so erhält man folgende Darstellung des allgemeinen Integrals:

$$r_3 = \frac{A\{1+f+g'+n+i(h'-m)\}+B\{f'-g+i(h-l)\}}{\sqrt{1+f+g'+n}} e^{-\frac{i\vartheta}{2}}$$

Den Differentialquotienten findet man leicht aus

$$(r' e^{i\vartheta})' = (r''+ir'\vartheta')e^{i\vartheta} = -\frac{r}{4}e^{i\vartheta}$$

Setzt man den conjugirten Wert ein, so ergibt sich:

$$r_3' = \frac{A\{f'-g-i(h-l)\}-B(1+f+g'+n-i(h'-m)\}}{2\sqrt{1+f+g'+n}} e^{-\frac{i\vartheta}{2}}$$

Hiernach muss für irgend welche Constanten A, B sein:

$$\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{\sqrt{1+f_2+g_2'+n_2}} = r_3 e^{\frac{i\vartheta}{2}}$$

$$\frac{f_2'-g_2+i(l_2-h_2)}{\sqrt{1+f_2+g_2'+n_2}} = 2r_3' e^{\frac{i\vartheta}{2}}$$

das ist für $f = g' = n = 1$:

$$\frac{1+a+b_1+c_2+i(b_2-c_1)}{\sqrt{1+a+b_1+c_2}} = 2A$$

$$\frac{b-a_1+i(c-a_2)}{\sqrt{1+a+b_1+c_2}} = -2B$$

Dies ergibt 2 neue algebraische Relationen und 2 neue Darstellungen des symmetrischen Products (37).

XXI.

Miscellen.

1.

Eine Gruppe planimetrischer Maxima und Minima.

Es sei ABC ein schiefwinkliges Dreieck mit den Seiten abc und den Winkeln $\alpha\beta\gamma$, h_a Höhe zu a, O der Mittelpunkt des eingeschriebenen, O_a der des der Seite a angeschriebenen Kreises, ϱ und ϱ_a deren Radien und $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_a$ ihre Berührungspunkte mit der Seite AC, $a+b+c=2s$ und $\varDelta$ der Inhalt des Dreiecks, so ist bekanntlich

$$A\mathfrak{B} = s-a, \quad A\mathfrak{B}_a = s, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_a, \quad \frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_a}\right),$$

$$\varDelta = \varrho s = \varrho_a(s-a) = \frac{ah_a}{2}$$

Betrachtet man von den Stücken α a s ϱ ϱ_a h_a $\varDelta$ je drei als gegeben, so erhält man eine Reihe von Aufgaben, deren Lösung sich meist durch den blossen Anblick der Figur ergiebt. Nimmt man je zwei Stücke als constant an und denkt im Uebrigen die Figur veränderlich, so ergeben sich ebenso leicht interessante Sätze über Maxima und Minima, die zwar vereinzelt in Aufgabensammlungen zu finden, in diesem Zusammenhange aber und so einfach bewiesen mir nicht bekannt geworden sind. Namentlich bei der Determination der oben angedeuteten Aufgaben dürften dieselben für den Unterricht vorteilhaft Anwendung finden.

Vorbemerkung: Berühren sich die Kreise O und O_a, so ist ABC gleichschenklig, weil die Halbirungslinie AOO_a des Winkels α auf der Basis senkrecht steht. Im folgenden kommt es immer darauf an, die Figur so zu verändern, dass die Kreise O und O_a sich berühren.

1. Es bleibe α und a constant. Mit α ist auch seine Halbirungslinie AO der Richtung nach festgelegt und mit $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ ist die Strecke OO_a unveränderlich. Wird nun $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ so verschoben, dass $A\mathfrak{B}_a = s$ wächst, so wachsen gleichzeitig ϱ, ϱ_a, $\Delta = \varrho s$ und $h_a = \frac{2\Delta}{a}$, bis sich O und O_a berühren, folglich gilt der Satz:

> Von allen Dreiecken über derselben Basis a, welche in dem Winkel an der Spitze übereinstimmen, hat das gleichschenklige den grössten Umfang und Inhalt, den grössten eingeschriebenen Kreis und die grösste zur Basis gehörige Höhe.

2. Durch α und s ist das Dreieck $A\mathfrak{B}_a O_a$ gegeben. Lässt man $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ kleiner werden, so wächst ϱ, demnach auch $\Delta = \varrho s$ und h_a zufolge der Beziehung $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_a}\right)$, folglich

> Alle Dreiecke, welche in dem Winkel an der Spitze A und dem Umfang übereinstimmen, haben den der Seite a angeschriebenen Kreis gleich. Das gleichschenklige aber hat beim Minimum der Basis ein Maximum des Inhalts, der Höhe und des eingeschriebenen Kreises.

3. Hält man α und ϱ und damit das Dreieck $A\mathfrak{B}O$ fest, so nehmen mit $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ auch $A\mathfrak{B}_a = s$, ϱ_a und $\Delta = \varrho s$ ab, während h_a wegen $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_a}\right)$ wächst, und $A\mathfrak{B} = s - a$ constant bleibt; also

> Alle Dreiecke, welche sich einem gegebenen Kreise so umschreiben lassen, dass sie einen gegebenen Winkel α an der Spitze enthalten, stimmen im Ueberschuss der Schenkelsumme über die Basis überein. Das gleichschenklige aber hat neben der grössten zu α gehörigen Höhe am kleinsten: den Umfang und Inhalt, die Basis und den der letzteren angeschriebenen Kreis.

4. Man schlage mit h_a einen Kreis um A, so ist BC äussere Tangente für denselben und den Kreis O. Bleibt jetzt α und h_a constant, so rückt O auf der festen Linie AO nach A hin, wenn ϱ kleiner wird. Gleichzeitig aber nehmen AB, AC, BC und damit s und $\Delta = \varrho s$ ab, also

> Von allen Dreiecken, welche in einem Winkel und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, hat das gleichschenklige ein Minimum für Basis, Umfang, Inhalt und eingeschriebenen Kreis.

5. Wenn bei constantem α und $\Delta = \varrho s$ der Umfang s abnimmt, so muss ϱ wachsen, also O und O_a auf der festen Linie AO zusammenrücken, ebenso $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_a$, bis sich die Kreise O bei wachsendem und O_a bei abnehmendem Radius berühren. D. h.

Von allen gleich grossen Dreiecken mit demselben Winkel α an der Spitze hat das gleichschenklige den grössten eingeschriebenen und gleichzeitig den kleinsten der Basis angeschriebenen Kreis. Ausserdem ein Minimum der Basis und des Umfangs und ein Maximum der zur Basis gehörigen Höhe.

6. Mit a und s sind die Strecken $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ und $A\mathfrak{B}_a$ und damit die Lote in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_a$ auf $A\mathfrak{B}_a$ als Oerter für O und O_a gegeben. Mit α wachsen auch ϱ und ϱ_a und daher wegen $\Delta = \varrho s = \frac{ah_a}{2}$ auch Δ und h_a, demnach:

Von allen Dreiecken, welche in der Basis a und dem Umfang übereinstimmen, hat das gleichschenklige den Winkel an der Spitze, den eingeschriebenen so wie den der Basis angeschriebenen, die zur Basis gehörige Höhe und den Inhalt am grössten.

7. Es sei a und ϱ constant, also auch Dreieck $O\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ und das Lot in $\mathfrak{B}_a$ auf $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ als Ort für O_a. Bewegt sich A nach $\mathfrak{B}$ hin, so wird $s = A\mathfrak{B}_a$ kleiner und damit auch $\Delta = \varrho s$ und $h_a = \frac{2\Delta}{a}$, während ϱ_a und α wachsen, folglich

Von allen Dreiecken, welche sich einem festen Kreise so umschreiben lassen, dass sie eine gegebene Basis a enthalten, hat das gleichschenklige den grössten Winkel an der Spitze und den grössten der Basis angeschriebenen Kreis, aber den kleinsten Umfang und Inhalt und die kleinste zur Basis gehörige Höhe.

8. Hält man neben a ϱ_a fest, und lässt A sich von $\mathfrak{B}$ fortbewegen, so wächst $s = A\mathfrak{B}_a$ und ϱ und damit $\Delta = \varrho s$ und $h_a = \frac{2\Delta}{a}$. Da stets $\varrho < \varrho_a$ bleibt, so tritt die Berührung der Kreise O und O_a nur dann ein, wenn $a < 2\varrho_a$, folglich

Von allen Dreiecken, welche die Basis und den derselben angeschriebenen Kreis gleich haben, besitzt das gleichschenklige den kleinsten Winkel an der Spitze, aber den grössten eingeschriebenen Kreis, den grössten Umfang und Inhalt und die grösste zur Basis gehörige Höhe.

9. Mit $a = \mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ sind die Lote in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_a$ auf $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ festgelegt. Soll dann noch Δ constant bleiben, so muss wegen $\Delta = \varrho s$ s abnehmen, wenn ϱ wächst, dann nehmen aber auch α und ϱ_a zu, während $h_a = \frac{2\Delta}{a}$ constant ist, also

> Von allen gleich grossen Dreiecken von derselben Basis hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang, den grössten ein- und der Basis angeschriebenen Kreis und den grössten Winkel an der Spitze.

10. Durch ϱ und s ist Δ bestimmt. Legt man $A\mathfrak{B}_a = s$ fest und lässt $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ abnehmen, so rücken die Kreise O und O_a zusammen bis zur Berührung, dann ist a ein Minimum $= a_1$. Wächst dagegen a, so bewegt sich das constante $O\mathfrak{B}$ nach A hin, und daher wächst der Winkel α und der Radius ϱ_a bis sich die Kreise zum zweiten Male berühren, dann ist a ein Maximum $= a_2$, d. h.

> Es lassen sich einem Kreise unendlich viele Dreiecke umschreiben, welche alle denselben Umfang und Inhalt haben. Unter diesen ist dasjenige, welches die kleinste Seite und den kleinsten gegenüber liegenden Winkel enthält, gleichschenklig, ebenso dasjenige, welches die grösste Seite und den grössten Winkel an der Spitze hat. Oder: Ein Dreieck lässt sich mit Beibehaltung des Umfangs stets so verwandeln, dass es eine Seite a zwischen zwei Grenzen a_1 und a_2 oder einen Winkel zwischen zwei Grenzen α_1 und α_2 enthält.

Da $3a_1 < 2s$ und $3a_2 > 2s$ ist, so liegt $\frac{2s}{3}$ zwischen a_1 und a_2, und man kann also jedes Dreieck mit Beibehaltung des Umfangs so verwandeln, dass eine Seite $\frac{1}{3}$ des Umfangs wird. Mit Benutzung von 6. ergiebt sich dann:

> Von allen Dreiecken mit demselben Umfang hat das gleichseitige den grössten Inhalt.

Da ferner $3\alpha_1 < 180^0$ und $3\alpha_2 > 180^0$ ist, so liegt 60^0 zwischen α_1 und α_2 und man kann demnach jedes Dreieck mit Beibehaltung des Umfangs so verwandeln, dass es einen Winkel von 60^0 enthält. Aus 5. folgt dann:

> Von allen gleich grossen Dreiecken hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Anmerkung. Die Sätze vom gleichseitigen Dreieck werden gewöhnlich als selbstverständliche Zusätze zu 5. und 6. gegeben, wie in der Planimetrie von Heis und Eschweiler. Steiner, gesammelte Werke II 185 führt einen andern Beweis von Lhuilier an und giebt einen eigenen, der dem obigen ähnlich ist. Geht man vom gleichschenkligen Dreieck aus, so ergiebt sich die halbe Basis x desselben als Wurzel der kubischen Gleichung

$$2x^3 - x^2 s + \varrho^2 s = 0$$

und zwar ist $x = \frac{s}{3}$ d. h. Dreieck gleichseitig, sowol wenn ϱ ein Maximum bei gegebenem s, oder s ein Minimum bei gegebenem ϱ ist. Dies sind ebenfalls die obigen Sätze. Siehe Lampe, Geometrische Aufgaben S. 7.

11. s und ϱ_a bestimmen das Dreieck $AO_a\mathfrak{B}_a$ und damit den Winkel α. Nimmt $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ ab, so wächst ϱ und folglich auch $\Delta = \varrho s$ und h_a wegen $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_a}\right)$ d. h.

> Alle Dreiecke, welche den Umfang und den der Basis angeschriebenen Kreis gleich haben, stimmen auch im Winkel an der Spitze überein. Das gleichschenklige unter ihnen aber hat die kleinste Basis, die grösste zur Basis gehörige Höhe, den grössten Inhalt und den grössten eingeschriebenen Kreis.

12. Aus $\Delta = \varrho s = \frac{ah_a}{2}$ folgt $\varrho : a = h_a : 2s$. Mit h_a und s ist also das Verhältniss $\varrho : a$ und dadurch die Richtung $O\mathfrak{B}_a$ als Ort für O gegeben, wenn der rechte Winkel $A\mathfrak{B}_aO_a$ festliegt. Mit wachsendem $a = \mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ nehmen auch $\varrho\varrho_a$ und α zu, indem sich AO um A dreht, ebenso $\Delta = \varrho s$:

> Von allen Dreiecken mit demselben Umfang, welche in einer Höhe übereinstimmen, hat das gleichschenklige am grössten: die Basis und den gegenüberliegenden Winkel, den eingeschriebenen, so wie den der Basis angeschriebenen Kreis und den Inhalt.

13. Sollen ϱ und ϱ_a constant sein, so ist dies auch h_a. Mit $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ wird $A\mathfrak{B}_a = s$ und $\Delta = \varrho s$ kieiner und α grösser, also

> Alle Dreieeke, welche sich einem Kreise so umschreiben lassen, dass der der Basis angeschriebene Kreis eine gegebene Grösse hat, stimmen in der Höhe zur Basis überein, das gleichschenklige aber hat die kleinste Basis, den

kleinsten Umfang und Inhalt, dagegen den grössten Winkel an der Spitze.

14. Mit α und ϱ_a ist α und s constant; mit a und h_a auch a und $\varDelta$, mit s und $\varDelta$ oder ϱ und $\varDelta$ ebenso s und ϱ, mit ϱ und h_a oder ϱ_a^2 und h_a endlich ϱ und ϱ_a gegeben. Diese Fälle sind also in dem Obigen miterledigt. Dr. J. Lange.

2.

Ein Dreieckssatz.

P sei ein belieger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC. Soll eine Gerade durch P so gelegt werden, dass ihr von den Dreiecksseiten AB, AC begrenzter Teil von P halbirt ist; so zieht man durch P eine Parallele zu AC, welche AB in K trifft, und trägt auf AB die Strecke $KC_a = AK$ auf; C_aP ist die verlangte Gerade.

C_aP treffe AC in B_a. Zu dem Zwecke, zwischen den drei Geraden B_aC_a und dem Dreiecke ABC eine Beziehnng herzustellen, suchen wir die Gleichung der Geraden B_aC_a.

Die trimetrischen Punktcoordinaten von P bezüglich des Urdreieckes ABC $(BC = a)$ seien $p_a p_b p_c$. Ferner ist:

$$AC \equiv 0 \quad 1 \quad 0$$

Der unendlich ferne Punkt dieser Geraden hat die Form:

$$c \quad 0 \quad -a$$

Die Gleichung der durch P zu AC gezogenen Parallelen PK ist demnach:

$$\begin{vmatrix} x_a & p_a & c \\ x_b' & p_c & 0 \\ x_c & p_c & -a \end{vmatrix} = 0$$

Die Geraden

$$PK \equiv -a p_b \quad c p_c + a p_a \quad -c p_b$$
$$AB \equiv 0 \quad 0 \quad 1$$

treffen sich in

$$k \equiv c p_c + a p_a \quad a p_b \quad 0$$

Bezeichnen wir mit $X(a)$ die Länge der Normale von X auf BC und mit F den Flächeninhalt des Fundamentaldreiecks, so ist:

$$K(a) = \frac{2F(cp_c + ap_a)}{a\Sigma ap_a}$$

$$K(b) = \frac{2F.ap_b}{a\Sigma ap_a}$$

$$K(c) = 0$$

Nach der angeführten Construction ist K die Mitte von AC_a. Es ist also:

$$K(a) = \frac{A(a) + C_a(a)}{2}$$

$$C_a(a) = 2K(a) - A(a)$$

$$= \frac{2F}{a\Sigma ap_a}(2cp_c + 2ap_a) - \frac{2F}{a}$$

$$= \frac{2F}{a\Sigma ap_a}(cp_c + ap_a - bp_b)$$

Ferner erhalten wir:

$$2K(b) = A(b) + C_a(b)$$

$$C_a(b) = 2ap_b : \frac{2F}{a\Sigma ap_a}$$

$$C_a(c) = 0$$

$$C_a \equiv cp_c + ap_a - bp_b \quad 2ap_b \quad 0$$

$$B_aC_a \equiv PC_a \equiv$$

$$-2ap_bp_c \quad p_c(cp_c + ap_a - bp_b \quad p_b(ap_a + bp_b - cp_c)$$

B_aC_a trifft BC in

$$\mathfrak{A} \equiv 0 \quad -p_b(ap_a + bp_b - cp_c) \quad p_c(cp_c + ap_a - bp_b)$$

Die $\mathfrak{A}$ liegen in der Geraden

$$\mathfrak{G} \equiv p_bp_c(bp_b + cp_c - ap_a)$$

Diese Gerade ist der Harmonikalen des Punktes P parallel.

Es sind nämlich zwei Gerade

$$a_1x_a + b_1x_b + c_1x_c = 0$$
$$a_2x_a + b_2x_b + c_2x_c = 0$$

einander parallel, wenn

$$\Sigma a(b_1c_2 - b_2c_1) = 0$$

Die Harmonikale des Punktes P bezüglich des Urdreiecks ist die Gerade p_bp_c. Für die Gerade $\mathfrak{G}$ und die Harmonikale von P ist demnach:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_c p_a & p_a p_b \\ p_c p_a (c p_c + a p_a - b p_b) & p_a p_b (a p_a + b p_b - c p_c) \end{vmatrix}$$
$$= 2 p_a^2 p_b p_c (b p_b - c p_c)$$

Es ist aber

$$\Sigma a p_a (b p_b - c p_c) = 0$$

Folglich ist die Gerade $\mathfrak{G}$ der $p_b p_c$ parallel. Wir haben also folgenden Satz:

Die drei durch einen beliebigen Punkt in der Ebene eines Dreiecks gezogenen Geraden, deren von je zwei Dreiecksseiten begrenzten Stücke durch den gewählten Punkt halbirt werden, treffen die Gegenseiten in Punkten einer Geraden, welche der Harmonikalen dieses Punktes parallel ist.

Projiciren wir die Figur, so wird die unendlich ferne Gerade eine Gerade $\mathfrak{G}_1$, welche die BC in A_1 trifft. K ist dann der Schnittpunkt der Geraden AB und PB_1. C_a ist der zu A bezüglich KC_1 vierte harmonische Punkt. Die $B_a C_a$ treffen die BC in Punkten einer Geraden $\mathfrak{G}$, von welcher die Harmonikale von P und die $\mathfrak{G}_1$ in demselben Punkte geschnitten werden. Wir haben also:

P sei ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC. Die Gerade $\mathfrak{G}_1$ treffe BC in A_1. Bezüglich C_1 und des Schnittpunktes der PB_1 mit AB liege C_a zu A harmonisch.

Dann treffen die $B_a C_a$ die BC in Punkten einer Geraden $\mathfrak{G}$; diese Gerade, $\mathfrak{G}_1$ und die Harmonikale von P schneiden sich in einem Punkte. Für $\mathfrak{G}_1 \equiv a_1$ wird

$$\mathfrak{G} \equiv p_b p_c (b_1 p_b + c_1 p_c - a_1 p_a).$$

Wien, December 1884. **Emil Hain.**

3.

Ein Satz über Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind.

Es möge mir gestattet sein im folgenden die Frage nach dem geometrischen Orte der Mittelpunkte der Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind, und deren Achsenquadratsumme eine gegebene Grösse hat, zu behandeln und daran einige Folgerungen zu schliessen.

ABC sei irgend ein Dreieck, AA_1, BB_1 und CC_1 dessen Höhen und H dessen Höhenschnitt. Wählen wir nun auf AB irgend einen Punkt E und auf AC irgend einen Punkt F und beschreiben über EC und BF als Durchmesser Kreise, so hat der Punkt H in Bezug auf die beiden Kreise die gleichen Potenzen $HC.HC_1$ und $HB.HB_1$, liegt also auf der gemeinsamen Sehne derselben. Sind ferner M und N die Schnittpunkte der beiden Kreise, so werden alle Kegelschnitte, die dem Dreieck einbeschrieben sind, und die die Linie EF berühren, aus diesen Punkten unter rechten Winkeln gesehen. Ist also P der Mittelpunkt eines solchen Kegelschnitts mit den Halbachsen a und b, so muss somit

$$a^2+b^2=PM^2=PN^2$$

sein. Andererseits finden wir jedoch, dass in dem gleichschenkligen Dreieck MPN auch die Relation

$$PH^2=PM^2+HM.HN$$

giltig ist. Daraus folgt aber sofort die Gleichung

$$HP^2=a^2+b^2+HA.HA_1.$$

Hiebei haben wir zwar vorausgesetzt, dass die beiden Schnittpunkte M und N der Kreise reell seien. Ist dem jedoch nicht so, so ist doch die letztere Formel giltig, nur erleidet der Gang der Ableitung eine unwesentliche Aenderung.

Aus der entwickelten Relation $HP^2=a^2+b^2+HA.HA_1$ ergeben sich nun folge Sätze:

1) Ist P der Mittelpunkt eines Kegelschnittes mit den Halbachsen a und b, der einem Dreieck A einbeschrieben ist, so ist stets, wenn H der Höhenschnitt des Dreiecks ist:

$$HP^2=a^2+b^2+\text{const.}$$

2) Ist der Höhenschnitt eines Dreiecks Mittelpunkt eines Kegelschnitts, der dem Dreieck einbeschrieben ist, so hat derselbe unter allen, dem Dreieck einbeschriebenen, Kegelschnitten die kleinste Achsenquadratsumme.

3) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind und die eine gegebene Achsenquadratsumme haben, ist ein Kreis um den Höhenschnitt des Dreiecks als Mittelpunkt.

Wird ferner $a^2+b^2=0$, so ist der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel und wir finden den bekannten Satz:

4) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, die einem stumpfwinkligen Dreieck einbeschrieben werden können, ist ein Kreis um den Höhenschnitt des Dreiecks, der die Kreise über den Seiten rechtwinklig durchschneidet.

Da ferner unter den Kegelschnitten sich solche befinden, die in eine doppelt zu rechnende Strecke übergehen, deren Endpunkte in eine Ecke und die gegenüber liegende Seite des Dreiecks fallen, ergiebt sich der Satz:

5) Wird um den Höhenschnitt eines Dreiecks ABC ein Kreis beschrieben, der die Seiten des Dreiecks der Seitenmitten von ABC bei entsprechender Bezeichnung in α, α_1, β, β_1, γ und γ_1 trifft, so ist stets:

$$A\alpha = A\alpha_1 = B\beta = B\beta_1 = C\gamma = C\gamma_1.$$

Da überdies congruente Kegelschnitte gleiche Achsenquadratsumme haben, so folgen noch die Sätze:

6) Einem Dreieck lassen sich höchstens 6 Kegelschnitte einbeschreiben, welche einem gegebenen Kegelschnitt congruent sind. Die Mittelpunkte desselben liegen auf einem Kreise um den Höhenschnitt des Dreiecks.

7) Einem Kegelschnitt lassen sich höchstens 24 Dreiecke umschreiben, die einem gegebenen Dreieck congruent sind; die Höhen derselben sind vom Mittelpunkt des Kegelschnitts gleich weit entfernt. (Die Sätze 5), 6) und 7)) finden sich in Steiner's g. W. B. II. p. 346., jedoch giebt Steiner in letzterem Satze irrtümlich die Zahl 6, anstatt der Zahl 24 an.)

Zum Schlusse wollen wir noch hinzufügen, dass diese Sätze wenigstens teilweise noch giltig sind, wenn zwei Seiten des Dreiecks zusammenfallen.

Weingarten, im Febr. 1885. B. Sporer.

4.

Körper zwischen zwei Rotationsellipsoiden.

Es liegt zu Grunde das System

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\[2ex] (2) \quad \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Das gemeinschaftliche Flächenstück $JCKHLDMGJ$ stellt sich dar als

$$F_1 = 4ab \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Das Flächenstück $JBMGJ$ stellt sich dar als

$$F_2 = ab \arcsin \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

1. Die beiden Ellipsen rotiren gleichzeitig um die x-Axe.

Es entstehen zwei Rotationsellipsoide, welche ein Körperstück gemeinschaftlich haben. Ausser diesem gemeinschaftlichen Körperstücke entstehen zu beiden Seiten des zweiten Rotationsellipsoids, links und rechts zwei congruente Körperstücke des ersten Rotationsellipsoids und endlich bleibt noch ein wulstförmiges Körperstück vom zweiten Rotationsellipsoide rings um das gemeinschaftliche Körperstück des durch Rotation der Ellipse (2) um die kleine Axe entstanden ist.

Es bezeichne nun

V_1 das Volumen des gemeinschaftlichen Körperstückes, das durch Rotation von $KCJGMDLHK$ entstanden ist;

V_2 das Volumen des Körpers, der durch Rotation von $GJBMG$ oder $HKALH$ um die x-Axe entstanden ist;

V_3 das Volumen des Körpers, der durch Rotation von $KCJE$ oder $LDMF$ um die x-Axe entstanden ist.

Dann ist

$$V_1 = \tfrac{4}{3}ab\pi\left(a - \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);$$

$$V_2 = \tfrac{4}{3}ab\pi\left(b - a + \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);$$

$$V_3 = \tfrac{4}{3}ab\pi \cdot \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Drehen sich beide Ellipsen gleichzeitig um die y-Axe, so entstehen dieselben Körper; blos ihre Lage ist eine andere.

2. Die beiden Ellipsen rotiren gleichzeitig um ihre kleinen Axen.

Es entstehen zwei breitgedrückte Rotationsellipsoide.

Denken wir uns in 0 senkrecht auf der xy-Ebene die z-Axe, so berühren sich beide Körper in $z = +a$ und $z = -a$.

Es soll das Volumen des den beiden Rotationsellipsoiden gemeinschaftlichen Körperteiles berechnet werden.

Die Gleichung des Rotationsellipsoides, welches durch Rotation von GEH um GH entsteht, lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Legen wir jetzt eine Schnittebene in der Entfernung $z = p$ von O durch beide Körper, so erhalten wir:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{p^2}{a^2};$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{p^2}{a^2};$$

oder, wenn für p nun wieder z stehen gelassen wird, wir uns aber denken, dass z jetzt constant ist, so können die Gleichungen auch die Form annehmen

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)} = 1;$$

$$\frac{x^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)} + \frac{y^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)} = 1.$$

Diese beiden Schnittfiguren sind wieder nur Ellipsen mit den beiden Axen bezüglich $a\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}$ und $b\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}$.

Das gemeinschaftliche Körperstück V wird sich nun einfach darstellen als $\int_{-a}^{+a} f(z)\,dz$, wo unter $f(z)$ das gemeinschaftliche Flächenstück $JCKHLDMGJ$ zu verstehen ist, und worin jetzt

$$a = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad b = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}$$

zu setzen ist.

Es war

$$f(z) = 4ab \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

folglich wird hier

$$f(z) = 4ab\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

also

$$V = \int_{-a}^{+a} 4ab\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} . dz;$$

oder

$$V = \tfrac{16}{3} a^2 b \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

oder

$$V = \tfrac{4}{3} a . F_1$$

d. h.

Das Volumen des gemeinschaftlichen Körperteiles ist gleich dem vierfachen Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche F_1 und der Höhe a.

Gröbzig, im December 1884.

Dr. Albert Bieler.

5.

Wann stehen die von einem Punkte an eine Kegelschnittslinie gezogenen zwei Tangenten auf einander senkrecht.

Um diese Frage sofort für alle Kegelschnittslinien K beantworten zu können, gehen wir von der sogenannten Scheitelgleichung

$$y^2 = px + qx^2 \qquad 1)$$

aus, welche bekanntlich für $p = 2a$ und $q = -1$ einem Kreise vom Halbmesser a, für $p = \frac{2b^2}{a}$ und $q = -\frac{b^2}{a^2}$ einer Ellipse mit den Halbachsen a und b, für $p = \frac{2b^2}{a}$ und $q = \frac{b^2}{a^2}$ einer Hyperbel mit den Halbachsen a und b, für $q = 0$ einer Parabel mit dem Parameter p entspricht.

Die Tangente T an den Kegelschnitt K hat die Gleichung

$$(\eta - y) = (\xi - x)\frac{p + 2qx}{2\sqrt{px + qx^2}},$$

welche auch auf die Form

$$2\eta y = 2q\xi x + p\xi + px \qquad 2)$$

gebracht werden kann. Die Coordinaten (x, y) der Berührungspunkte müssen den Gleichungen 1) und 2) genügen, können somit berechnet werden. Es ergeben sich, wie bekannt, zwei Berührungspunkte $B_1 \ldots (x_1, y_1)$ und $B_2 \ldots (x_2, y_2)$ und dem entsprechend auch zwei Tangenten

$$T_1 \ldots 2y_1\eta = (p + 2qx_1)\xi + px_1 \text{ und } T_2 \ldots 2y_2\eta = (p + 2qx_2)\xi + px_2.$$

Diese stehen auf einander senkrecht, wenn

$$\frac{p + 2qx_1}{2y_1} = -\frac{2y_2}{p + 2qx_2}$$

ist, oder die Gleichung

$$p^2 + 2pq(x_1 + x_2) + 4q^2x_1x_2 + 4y_1y_2 = 0 \qquad 3)$$

besteht. Wenn wir in die letzte Gleichung die aus 1) und 2) folgenden Wurzelwerte einsetzen, so erhalten wir eine Gleichung 4), in welcher die laufenden Coordinaten (ξ, η) der Tangente T vorkommen. Wählen wir ξ und η so, dass der Gleichung 4) genügt wird, dann sind die vom Punkte $P \ldots (\xi, \eta)$ an K gezogenen Tangenten normal; d. h. die Gleichung 4) ist die Gleichung einer Linie, die alle jene Punkte enthält, von welchen Tangenten an K ausgehen, die auf einander senkrecht stehen. Wie Gleichung 3) zeigt, braucht man die Wurzelwerte selbst nicht, sondern nur $(x_1 + x_2)$, x_1x_2 und y_1y_2. Um dafür Werte zu finden, berechne man y aus 2) und setze es in 1) ein. Man erhält:

$$x^2(p^2 + 4q^2\xi^2 + 4pq\xi - 4q\eta^2) + x(2p^2\xi + 4pq\xi^2 - 4p\eta^2) + p^2\xi^2 = 0,$$

weshalb

$$(x_1 + x_2) = \frac{4p\eta^2 - 2p^2\xi - 4pq\xi^2}{p^2 + 4pq\xi + 4q^2\xi^2 - 4q\eta^2}$$

und

$$x_1x_2 = \frac{p^2\xi^2}{p^2 + 4pq\xi + 4q^2\xi^2 - 4q\eta^2}$$

Berechnet man x aus 2) und setzt es in 1) ein, so ergibt sich die Gleichung:

$$y^2(p^2 + 4pq\xi + 4q^2\xi^2 - 4q\eta^2) - 2p^2\eta y + p^2q\xi^2 + p^3\xi = 0.$$

Es ist also:

$$y_1 y_2 = \frac{p^2\xi(q\xi+p)}{p^2+4pq\xi+4q^2\xi^2-4q\eta^2}.$$

Werden nun diese Werte in die Gleichung 3) eingeführt, so findet sich nach einfacher Umformung die Gleichung

$$\xi^2+\eta^2+\frac{p}{q}\xi+\frac{p^2}{4q}=0 \qquad 4)$$

d. i. die Gleichung eines Kreises K.

Wir können somit die oben gestellte Frage dahin beantworten: Die vom Punkte $P\ldots(\xi,\eta)$ an die Kegelschnittslinie $K\ldots y^2=px+qx^2$ gezogenen Tangenten stehen nur dann auf einander senkrecht, wenn der Punkt P auf dem Kreise $K\ldots\xi^2+\eta^2+\frac{p}{q}\xi+\frac{p^2}{4q}=0$ liegt.

Die Gleichungen 1) und 4) zeigen uns auch noch, dass K und k denselben Mittelpunkt $M\ldots(x=-\frac{p}{2q},\ y=0)$ besitzen, und dass der Halbmesser des Kreises k die Grösse $r=\sqrt{\frac{p^2}{4q^2}-\frac{p^2}{4q}}$ hat. Demnach nimmt r den Wert $a\sqrt{2}$ an, wenn K ein Kreis vom Halbmesser a ist; den Wert $\sqrt{a^2+b^2}$, wenn K eine Ellipse mit den Halbachsen a und b ist; den Wert $\sqrt{a^2-b^2}$, wenn K eine Hyperbel mit den Halbachsen a und b ist; den Wert ∞ (d. h. k wird eine Gerade) wenn K eine Parabel ist. In letzterem Falle ($q=0$) reducirt sich die Gleichung 4) wirklich in die lineare Gleichung:

$$\xi+\frac{p}{4}=0;$$

k geht also in die Leitlinie der Parabel über.

Die Werte für r lassen auch noch erkennen, dass k bei einem Kreise, einer Ellipse oder einer Parabel K immer reell ist, dass aber k dann in einen Punkt degenerirt, wenn K eine gleichseitige Hyperbel ist, (weil ($r=\sqrt{a^2-b^2}=0$ wird) und dass gar keine zu einander senkrechten Tangenten möglich sind, wenn K eine Hyperbel ist, deren Hauptachse kleiner ist als die Nebenachse. ($r=\sqrt{a^2-b^2}$ wird nämlich in diesem Falle imaginär.)

Pola, am 10. Mai 1885.

Franz Schiffner,
k. k. Prof.

6.

Zur Convergenz der Reihen.

Eine unendliche Reihe

$$t_0+t_1+t_2+\ldots+t_k+\ldots=T$$

ist convergent, wenn

$$-1<\lim_{k=\infty}\frac{t_{k+1}}{t_k}<+1 \tag{1}$$

ist.

Wird $\lim\frac{t_{k+1}}{t_k}=+1$, so convergirt die Reihe noch, wenn statthat

$$\lim_{k=\infty} k\left\{\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right\}>+1 \tag{2}$$

Für den Fall $\lim\frac{t_{k+1}}{t_k}=-1$ soll im Folgenden eine analoge Regel aufgestellt werden.

Betrachten wir die unendliche Reihe

$$U=\frac{1}{1^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k^n}+(-1)^k\frac{1}{(k+1)^n}+\ldots,$$

so ist dieselbe convergent, so lange $n>0$ ist, weil in diesem Falle die absoluten Werte der Glieder fortwährend abnehmen und ausserdem regelmässiger Zeichenwechsel vorhanden ist. Für $n\geqq 1$ ist dies klar. Wird $n<1$, so kann man setzen

$$n=\frac{1}{p};\quad p>1,$$

und die Reihe geht über in

$$\frac{1}{\sqrt[p]{1}}-\frac{1}{\sqrt[p]{2}}+\frac{1}{\sqrt[p]{3}}-\ldots,$$

welche aus obigen Gründen ebenfalls convergirt. Für U wird nun

$$\lim\frac{u_{k+1}}{u_k}=\lim\left(-\frac{\frac{1}{(k+1)^n}}{\frac{1}{k^n}}\right)=\lim\left(-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^n}\right)=-1;\ n>0.$$

Ist also $\lim\frac{t_{k+1}}{t_k}=-1$, so wird nach einem bekannten Satze die Reihe T noch convergiren, wenn

$$-\frac{t_{k+1}}{t_k} < \left(\frac{k}{k+1}\right)^n; \quad n > 0$$

bleibt. Hieraus folgt:

$$-\frac{t_k}{t_{k+1}} > \left(1+\frac{1}{k}\right)^n.$$

Es ist aber

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^n = 1+\frac{n}{k}+\frac{1}{k^2}f\left(\frac{1}{k}\right); \quad -1 < \frac{1}{k} < +1.$$

Also muss auch sein

$$k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right) > n+\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k}\right)f\left(\frac{1}{k}\right).$$

Lassen wir jetzt k unendlich werden, so ergiebt sich

$$\operatorname*{Lim}_{k=\infty}\left\{k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right)\right\} > n.$$

Da nun $n > 0$ sein muss, so ist die Reihe T für $\operatorname{Lim}\frac{t_{k+1}}{t_k} = -1$ noch convergent, wenn

$$\operatorname*{Lim}_{k=\infty}\left\{k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right)\right\} > 0 \tag{3}$$

ist.

Diese Regeln wollen wir auf die Binomialformel anwenden. Es ist

$$(1+x)^\mu = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2.3\ldots k}x^k+\ldots$$

Nach (1) erhalten wir zunächst

$$\operatorname{Lim}\frac{t_{k+1}}{t_k} = \operatorname{Lim}\left\{\frac{\mu-k}{k+1}x\right\} = \operatorname{Lim}\left\{\frac{\frac{\mu}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}x\right\} = -x.$$

Es muss demnach

$$-1 < -x < +1 \qquad (-\infty < \mu < +\infty)$$

sein.

Untersuchen wir jetzt die Grenzfälle $x = -1$ und $x = +1$.

I. Für $x = -1$ wird

$$\operatorname{Lim}\frac{t_{k+1}}{t_k} = +1:$$

Nach Regel (2) haben wir also zu bilden

$$k\left\{\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right\}=k\left\{-\frac{k-1}{\mu-k}-1\right\}=-\frac{1+\mu}{\frac{\mu}{k}-1}$$

und

$$\operatorname{Lim} k\left\{\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right\}=1+\mu.$$

Für das Statthaben der Convergenz ist also notwendig

$$1+\mu>1$$

oder

$$+\infty>\mu>+1.$$

II. Ist $x=+1$, so wird

$$\operatorname{Lim}\frac{t_{k+1}}{t_k}=-1.$$

Nach Regel (3) erhalten wir sodann

$$k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right)=k\left(-\frac{k+1}{\mu-k}-1\right)=-\frac{(1+\mu)}{\frac{\mu}{k}-1}$$

und

$$\operatorname{Lim}\left\{k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right)\right\}=1+\mu.$$

Also muss sein

$$1+\mu>0$$

oder

$$+\infty>\mu>-1.$$

Berlin, März 1884.

Dr. A. Börsch,
Assistent im Königl. geodätischen Institut.

7.

Archimedische Kreisquadratur.

Nimmt man nach Archimedes das Verhältniss des Durchmessers zum Kreise wie 7 zu 22 an, ein Wert der vom wahren nur um 4 Zehntausendtel desselben differirt, so verhält sich der Radius zur Seite eines der Kreisfläche gleichen Quadrats wie 1 zu $\sqrt{\frac{22}{7}}$.

Eine recht einfache Construction dieses Verhältnisses möchte wol manchmal von Anwendung sein.

Man trage auf einer Geraden 4 gleiche Strecken $= a$ ab, deren Grenzpunkte $ABCDE$ seien, errichte in D ein Lot, welches von einem um A durch E geschlagenen Kreisbogen in F getroffen werde, ziehe BF, errichte in B auf BF das Lot $BG = BF$ und verbinde F mit G. Dann ist das Quadrat über FG gleich der Kreisfläche vom Radius DF.

Ist der Radius r gegeben, so mache man $FH = r$ zur Strecke auf FD, ziehe HJ parallel DG, wo J Schnittpunkt auf FG. Dann ist FJ die gesuchte Quadratseite.

Die Werte der einzelnen Strecken, sämtlich Seiten rechtwinkliger Dreiecke, ergeben sich einfach. Aus

$$AF = 4a; \qquad AD = 3a$$

folgt

$$DF = \sqrt{7} . a$$

dies verbunden mit $BD = 2a$ gibt:

$$BF = \sqrt{11} . a = BG$$

woraus wieder:

$$FG = \sqrt{22} . a$$

so dass, wie behauptet war,

$$DF : FG = 1 : \sqrt{\frac{22}{7}}.$$

R. Hoppe.

Litterarischer Bericht
V.

Methode und Principien.

Die Mathematik als Lehrgegenstand des Gymnasiums. Eine pädagogische Untersuchung von Joh. Karl Becker, Professor der Mathematik am Gymnasium zu Bruchsal. Berlin 1883. Weidmann. 99 S.

Von J. K. Becker sind in den litt. Ber. 244. 247. 251. 256 bisher 5 Schriften besprochen worden, deren erste bei systematischer Ausführung die Darstellung didaktischer Grundsätze bezweckt, während die 4 übrigen für den Schulgebrauch bestimmt sind. Diese Schriften zeichnen sich (abgesehen von ihrem eigenen Werte) unter andern mathematischen Schulbüchern und didaktischen Schriften dadurch aus, dass sich in ihnen mehr als gewöhnlich die Idee einer Vervollkommung der Methode durch Austrag der differirenden Grundsätze kund gibt, während andere den allgemeinen Standpunkt der Methode als einen bleibend unfertigen unberührt lassen und jedes für sich nur nach den Ansichten des Verfassers und nach den Bedürfnissen der einzelnen Unterrichtsanstalten die beste Wahl zu treffen sucht. Offenbar bietet eine Erscheinung vom erstern Charakter, sofern sie die Fortbildung der Methode zu einer gemeinsamen Arbeit aller Pädagogen macht und einen dauernden Erfolg für die Zukunft anbahnt, dem Interesse der Fachgenossen mehr dar als eine solche letzterer Art, die im ziellosen Wechsel nur eine auf ihren Kreis und ihre Zeit beschränkte Stellung behauptet. Was man jedoch in andern Dingen von einem Autor, dem der bewusste stetige Fortschritt am Herzen liegt, zu erwarten pflegt, die Berücksichtigung der bisherigen Leistungen und Anknüpfung an dieselben, war im vorliegenden Falle

nicht wol ausführbar; der Grund findet sich auch im 4. Abschnitt der gegenwärtigen Schrift einmal kurz ausgesprochen. Ein systematisch ausgearbeiteter Entwurf war vor allem notwendig; einen solchen fand der Verfasser nicht vor; es blieb ihm daher nur übrig selbst einen Entwurf aufzustellen, und als solcher lassen sich seine Schriften betrachten. Ueber diejenigen Punkte, in welchen derselbe teils vom Gewöhnlichen abweicht, teils über bestehende Differenzen entschied, hat sich der Verfasser ausgesprochen und den Fachgenossen Gelegenheit geboten an seinen Aufstellungen Kritik zu üben. Letzteres ist von mehreren Seiten geschehen. Eine Beantwortung der erfahrenen Beurteilungen ist bereits in der Programmarbeit des Verfassers enthalten: Zur Reform des geometrischen Unterrichts, Beilage zum Jahresbericht des Grossherzoglichen Gymnasiums zu Wertheim für das Schuljahr 1879—1880. Diese Arbeit erscheint jetzt nochmals als Anhang zur gegenwärtigen „pädagogischen Untersuchung". Der Gegenstand letzterer ist die, aus einer Vorbetrachtung über die Stellung und den dieselbe begründenden Wert des mathematischen Unterrichts an Gymnasien sich ergebende Frage: Welche Stellung hat unter den Lehrfächern des Gymnasiums speciell die Mathematik einzunehmen, wenn dieses seinen Zweck vollkommen erreichen soll, ohne die Schüler mehr als nötig zu belasten? Sie wird in 2 Fragen geteilt: 1) Welchen Gewinn für die formale Bildung zieht man aus dem Unterrichte in der Mathematik speciell, und inwieweit ist gerade die Mathematik zur Erzielung dieses Gewinnes unerlässlich oder wenigstens zweckmässiger als andere Disciplinen? 2) Welchen realen Gewinn für die Bildung ziehen wir aus dem Studium der Mathematik, und wieviel ist von dem mathematischen Wissen und Können unerlässlich, wenn wir in dem Verständniss unsrer gegenwärtigen Cultur nicht empfindliche Lücken haben wollen? Die Beantwortung führt auf die weitern Fragen: 3) Welche Disciplinen der Mathematik erweisen sich als unerlässlich oder wenigstens als zweckmässig für den Lehrplan des Gymnasiums; und in welcher Ausdehnung müssen sie gelehrt werden? 4) In welcher Methode müssen diese einzelnen mathematischen Disciplinen gelehrt werden, damit a) der Gewinn für die formale Bildung ein grösstmöglicher, b) der Gewinn an notwendigem mathematischem Wissen und Können ausreichend und fest sei, c) die Belastung der Schüler durch diese Disciplinen im richtigen Verhältnisse stehe zu dem erzielten Gewinne? Und wie sind diese Disciplinen auf die einzelnen Classen zu verteilen? — Der formale Gewinn besteht darin, 1) dass der Schüler lernt, die Dinge selbst, nicht blosse Begriffe, richtig wahrzunehmen, zu vergleichen, zu unterscheiden und zu ordnen; selbst Begriffe auf ihre Realität zu prüfen; 2) dass er beobachten lernt, was um ihn vorgeht, und befähigt wird selbständig aus beobachteten Einzelfällen allgemeine Regeln zu abstrahiren und

andre, welche ihm mitgeteilt werden, auf ihre Richtigkeit zu prüfen; 3) dass er nachdenken lernt. Diese Fähigkeiten, die für das Studium der Naturwissenschaften direct notwendig sind, ergänzen auch, abgesehen von der Bedeutung der Mathematik als Hilfswissenschaft, wesentlich die allgemeine Bildung. Mehr als die Arithmetik ist die Geometrie geeignet sie zu entwickeln, und in dieser mehr die Aufgaben als die Beweise förderlich für das Nachdenken. Der reale Gewinn vom mathematischen Unterrichte auf gegenwärtigem Standpunkte ist nach Ansicht des Verfassers, abgesehen von einigen Berufsarten, gering, würde sogar noch geringer werden, wenn man, wie einige wollen, die Steiner'sche projectivische Geometrie an die Stelle der Euklid'schen setzte. Die Frage, ob er sich erhöhen liesse, führt auf den vierten zu erörternden Punkt. Die dritte Frage wird durch wenig mehr als Aufzählung der zweckmässigen Disciplinen erledigt. Bevor noch der formale Gesichtspunkt zur Geltung gebracht ist, hat der reale, rücksichtlich der elementaren Physik, Erd- und Himmelskunde, denen der Verfasser noch das Versicherungswesen hinzufügt, bereits ziemlich so viel gefordert, als der gewöhnliche Gymnasialcursus enthält. Eine mögliche Beschränkung ergibt sich also nicht. Die vierte Frage betreffend die Methode gibt Anlass zu principiellen Erörterungen, welche zugleich als Rechtfertigung des Verfahrens in den Lehrbüchern des Verfassers dienen. In Betreff der Arithmetik wird zuerst erinnert, dass die algebraischen Operationen mit allgemeinen Zahlen nicht als Auswertungen, sondern als Transformationen mit reciproker Anwendung aufzufassen sind, und dass in diesem Punkte selbst die Einteilung der Aufgaben nicht zur falschen Ansicht verleiten sollie. Gegen diese Lehre ist von keiner Seite ein Einwand erhoben worden; in so vielen Lehrbüchern sie auch unbeachtet bleibt, so scheint doch niemand die entgegenstehende alte Gewohnheit verteidigen zu wollen. Der zweite Punkt betrifft die successive Erweiterung des Zahlbegriffs. Die sich derselben anschliessende Methode, welche nach Th. Wittstein's schematischer Aufstellung von den meisten Lehrbüchern dem Grundgedanken nach adoptirt ist, und die wir für die einzig richtige halten, wird hier ohne ein Wort der Rechtfertigung vorausgesetzt. Ihr zufolge werden, wie es nicht anders sein kann, die Operationen zuerst an positiven ganzen Zahlen erklärt und behandelt. In Bezug auf die Reihenfolge der Erweiterungen pflegt man sich nicht an das Schema der Operationen zu binden. Nach dem Schema würden die Negativen vor den Brüchen einzuführen sein, weil die Division später als die Subtraction gelehrt wird. Es empfiehlt sich aber die Negativen später einzuführen, wodurch ein vexirender mehrmaliger Wechsel der Anschauung vermieden wird. Der Verfasser sagt hier davon, man müsse die Abstraction nicht weiter treiben, als unbedingt notwendig ist, und die Begriffe

erst dann erweitern, wenn der Lehrstoff diese Erweiterung verlangt — mit der ganz unbegreiflichen, durch nichts motivirten Aeusserung, er könne darum von der ihm vom Ref. des Archivs „über diesen Punkt“ erteilten Belehrung keinen Gebrauch machen. Das Referat über B. Lehrbuch der Arithmetik steht im 244. litt. Ber. S. 41—44. Darin ist gegen das Obige nichts erinnert worden; welche Belehrung der Verfasser meint, ist schlechthin nicht zu erraten. Dagegen verschweigt er die darin erfahrene Misbilligung seines Verfahrens in andrer Hinsicht, dass er nämlich den Begriff der Negativen, der im Vorhergehenden bereits angebahnt war, davon abspringend auf eine neue Basis, auf die der entgegengesetzten Qualitäten stellt, wodurch der Schüler, der die Identität nicht durchschauen kann, unnötigerweise in eine Complication zweier anscheinend verschiedener Begriffe geführt wird — unnötigerweise, denn wenn er den Begriff der Negativen durch entgegengesetzte Qualitäten verdeutlichen wollte, so stand dem nichts entgegen, nachdem der Begriff aus der Transformation von $a-b$ in $-b+a$ abgeleitet war. Dass er den nicht unwichtigen Punkt der Definition der Negativen hier gar nicht erwähnt, lässt vermuten, dass er sein Verfahren, welches statt des allgemeinen und gleichmässigen Begriffs einen speciellen und von Umständen abhängigen gibt, nicht verteidigen will oder wenigstens keinen Wert darauf legt. Es folgt die Besprechung einiger unbedeutenden Punkte, Mit Recht wird die Forderung abgewiesen, die Multiplication nach sogen. neuer Methode zu lehren, d. h. Rechnungsvorteile in die Erklärung einzumischen, was auf ein mechanisches Einüben mit Vernachlässigung des Verständnisses hinauskommt. Wichtiger ist die nachher besprochene Frage nach dem Begriff der Multiplication mit Brüchen. Der Verfasser verteidigt die längst als falsch verurteilte Definition: „a mit b multipliciren heisst aus der Zahl a ebenso eine neue Zahl bilden, wie b aus der positiven Einheit gebildet wird“. Er sagt: ein Schüler auf dieser Stufe könne sie nur so verstehen, wie sie gemeint sei. Das heisst doch, er kann sie entweder gar nicht oder so verstehen, und in der Tat ist es ihm durch die Andeutung leicht gemacht die Begriffsbildung ganz zu unterlassen; denn wenn selbst der Lehrer nicht direct zu sagen weiss, wie die „neue Zahl“ zu bilden sei, so wird der Schüler nicht klüger sein wollen; letzterem wird die Schwierigkeit zugeschoben, über welche ersterer nicht hinwegkommen kann. Beifügungen zu dem rätselhaften „wie“, die der Verfasser vorschlägt, „direct“ oder „unmittelbar“ würden dem Mangel nicht abhelfen; denn es handelt sich überhaupt um Verstehen, nicht um Vermeidung eines Misverständnisses. Weiter sagt der Verfasser, er kenne nur 2 präcise Definitionen, und diese seien für Obertertianer nicht fasslich. Auch lässt er zu, dass man auf eine Definition verzichte. Da ihm keine der angeführten Auskünfte annehmbar scheint,

so wird es wol dem Ref. gestattet sein, an das nächstliegende Verfahren zu erinnern, welches Becker gar nicht in Betrachtung zieht. Ist die Definition der Multiplication mit ganzen positivem Zahlen $mB = B + B + B + \ldots$ nicht auch für Brüche ausreichend? In der Tat bedarf es nur zur Anwendung der Zuziehung vorherbekannter Sätze, an welche die Schüler mit Nutzen erinnert werden, und die auch für den erweiterten Begriff unentbehrlich sind: 1) Der Multiplicand B ist beliebig benannt. 2) Der Bruch $\frac{m}{n}$ mit beliebiger Benennung ist gleichbedeutend mit der in Einheiten, deren n die ursprüngliche Einheit geben, gezählten Zahl m. Da nun $\frac{B}{n}$ das Zeichen für eine Zahl ist, deren n die Einheit B geben, so ist $\frac{m}{n}B$ nach gewöhnlichem Begriff dasselbe als $m.\frac{B}{n}$. Eine neue Definition ist demnach ganz überflüssig; es bedarf nur einer Erläuterung, damit das Bekannte richtig angewandt wird; eine solche würde aber nach jeder der genannten Definitionen ohnehin nötig sein, und letztere würden die Orientirung eher erschweren. Auch für die Multiplication der Irrationalen ist keine neue Definition, sondern nur Anleitung zum richtigen Gebrauch des Bekannten erforderlich. Zum Bekannten darf man wol rechnen die Darstellung der Irrationalen durch Decimalbruch bis zum beliebigen Grad der Genauigkeit, d. h. den Begriff der unendlich kleinen Differenz. Determinanten in Anwendung auf die elementare Behandlung der Gleichungen einzuführen verwirft der Verfasser, und dem wird man gewiss gern beistimmen, wenn man die detaillirte Ausführung vor Augen hat. So einfach die Determinantentheorie auf allgemeiner Basis ist, so complicirt und unerquicklich gestaltet sie sich, wenn man vom Speciellen aufsteigen will. Soll sie überhaupt auf Schulen gelehrt werden, so gehört sie ihrer Natur nach zur Combinatorik, mithin in die höhere Classe. Die übrige Mitteilung des Lehrgangs, mag sie auch ganz wesentlich für die betreffende Frage sein, können wir hier nicht wiedergeben. Gründe sind zwar für jede Wahl ausgesprochen; doch erscheinen dieselben nicht als entscheidend, solange der beliebten Methode keine andern gegenübergestellt werden, und dazu hätte der Aufsatz weit länger sein müssen.

In Betreff der Geometrie nehmen wir zu dem Wenigen, was dieses Capitel enthält, sogleich die Programmarbeit hinzu, welche die dazu gehörigen Fragen ausführlicher bespricht. Die erste Frage ist nach der Ursache, warum die Schüler so ungleiche Fortschritte in der Mathematik machen. Der Verfasser ist sehr schnell mit der Antwort

fertig: wenn wir nicht annehmen sollen, dass zum Lernen der Mathematik eine besondere, seltene Begabung gehört (dass würde heissen auf alle Erklärung verzichten), so kann nur die Lehrmethode schuld sein. Er hält also den erstern Fall, dass in einer Eigentümlichkeit der Mathematik ein wesentlicher Grund liegt, gar nicht der Betrachtung für wert, sondern lässt ihn beiseite, weil sein Extrem gewiss von niemandem behauptet wird. Dass freilich nur besonders begabte Schüler fähig sind Mathematik zu lernen, scheint nicht wol glaublich. Ob aber eine gewisse natürliche Geistesrichtung und Neigung, wenn auch nicht vorausgesetzt werden muss, so doch das Lernen sehr erleichtert, ist dadurch nicht entschieden, und umsomehr wert zu untersuchen, weil daraus wesentliche Gesichtspunkte für die Methode entspringen. Wir dürfen die Frage nicht übergehen: Was fordert die Mathematik vom Lernenden verschieden von andern Disciplinen? Es lassen sich sogleich 3 Dinge nennen: 1) Das Verweilen im engsten Ideenkreise; denn wer im Kleinen am Unterschiedlichen achtlos vorbeigeht, wird im Grossen kein Auge dafür haben. 2) Die absolute (vom Gemüt unabhängige) Gerechtigkeitsliebe und Unparteilichkeit, welche sich beim Zuviel sowenig beruhigt als beim Zuwenig. 3) Der Ordnungssinn, der Gesetze entdeckt. In diesen Punkten zeigen die Kinder schon im frühen Alter verschiedene, bisweilen entgegengesetzte Neigung; offenbar werden diejenigen, deren Triebe den 3 Forderungen entsprechen, einen grossen Vorsprung in der Mathematik haben. Hieraus erklären sich hinreichend die ungleichen Fortschritte. Becker erwähnt als specifische Eigenschaft der Mathematik nur die, dass sie abstracte Gegenstände habe. Gerade diese Aussage aber, sooft man sie auch hört, ist unzutreffend, und vermutlich der Ausdruck fehlgegriffen; es ist eben ein unüberlegtes, vom Gefühl eingegebenes Urteil. Abstracte Gegenstände haben alle Disciplinen ausser etwa der Geographie und Naturgeschichte. Mag vielleicht damit gemeint sein, dass die Gegenstände moralisch indifferent sind und dem Leben fern stehen; doch auch dies fällt nur darum auf, weil eben solche eine so minutiöse Sorgfalt beanspruchen.

Ist es nun Sache des Unterrichts auch diejenigen Schüler, welche die günstige Neigung nicht mitbringen, für Mathematik zu befähigen, so ist es jedenfalls unerlässlich, dass derselbe die genannten Forderungen selbst erfüllt. Davon abweichen zu wollen ist wol auch seit Euklid niemandem in den Sinn gekommen, bis die Reformbestrebungen an die Oeffentlichkeit traten, in denen namentlich die erste Forderung vielfach ausser Augen gesetzt ward. Da auch die gegenwärtige Schrift von der Reform des mathematischen Unterrichts handelt, so wird das Vorstehende darauf anzuwenden sein. Nennt

man wie gewöhnlich die vor dem Reformzeitalter herrschende Methode die Euklidische, so müsste es doch die nächste Aufgabe für eine Schrift zugunsten der Reform sein, diese Euklidische Methode soweit zu charakterisiren, dass man daraus erkennt, was daran besserungsbedürftig sei. Dass dies bisher alle solche Schriften unterlassen haben, darauf deutet die Angabe der gegenwärtigen hin, welche als hauptsächliche Vorwürfe, die man jener Methode gemacht hat, die unklarst möglichen Aufstellungen anführt. Der erste lautet: Sie gibt kein „innerlich" zusammenhangendes Ganze, sondern eine Fülle von Sätzen, die nur dadurch „äusserlich" verbunden sind, dass der Beweis für die Richtigkeit eines solchen Satzes die Anerkennung des früheren vorausgesetzt. Ist diese Verkettung der Sätze durch die Beweise kein innerer Zusammenhang, und kann man einer beliebigen Menge von Sätzen äusserlich einen solchen verleihen? Sollte die Aeusserung irgend einen vernünftigen Gedanken bergen, so müsste man doch den Denker bitten sich verständlich auszudrücken. Der zweite Vorwurf lautet: Sie gibt überall nur Erkenntnissgründe, wo man Realgründe sucht; d. h. es wird immer nur gezeigt, „dass" ein Lehrsatz richtig ist, während man nirgends Einsicht in den innern Zusammenhang (schon oben gesagt!) der in den einzelnen Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften der Figuren erhält, durch die uns erst klar wird, „warum" er richtig ist. Was mit Erkenntniss- und Realgrund gemeint sei, bedurfte freilich einer Erläuterung. Soll aber die beigefügte den Sinn geben, so wird man erst recht in die Irre geführt. Jeder Beweis gibt doch zunächst das Warum und erst dadurch vermittelt die Gewissheit, dass der Satz richtig ist.. Beide Vorwürfe, sowie sie ausgesprochen werden, sind also nichtig, das Vermisste ist vorhanden, es abzuleugnen wird nicht gelingen. Man wird nicht fehlgehen, wenn man die ganze Unklarheit des Ausdrucks aus dem Wunsche der Verbesserer herleitet, mehr zu sagen als sie aufweisen können. Dass manche Beweise nicht einfach genug sind, dass es an systematischer Ordnung gefehlt hat, und dass durch diese sowol wie durch mancherlei Beziehungen die Uebersicht gefördert werden könnte, sind Vorwürfe, die man versteht, nur geht daraus keine eigentliche Reformfrage hervor; denn Jeder vollzieht die Besserung selbst. Hierzu anzutreiben beabsichtigte man nicht, man wollte das Alte von Grund aus verwerfen, hatte aber nichts ihm gegenüberzustellen und musste daher zu einem so kläglichen Appell an die Sympathie der Menge seine Zuflucht nehmen. Der Verfasser lässt uns ungewiss, ob die von ihm angeführten 2 Vorwürfe zugleich seine eigenen sind; wollte er sie aber nicht vertreten, so durfte man wol eine Klarstellung oder Abweisung von ihm erwarten. Als Ersatz dafür weist er nun auf das Vorbild der Steiner'schen Methode hin, welche das ganze Gebiet der elementaren Sätze mit einem Blicke überschauen lehrt.

Wenn eine solche Leistung für die projectivische Geometrie möglich sei, so dürfe man nicht daran verzweifeln ein gleiches auch für die Anfänge der Geometrie zu erreichen. Damit also deutet der Verfasser, ohne den Euklidischen Standpunkt charakterisirt zu haben, an, dass sich doch ein höherer Standpunkt der Methode denken lasse. Doch in diesem Gedanken liegt von vorn herein ein Widerspruch. Nehmen wir an, wie in der Tat manche Lehrer aussagen, nach Steiner'schem Vorbild die Anfänger mit bestem Erfolge unterrichtet zu haben, die Schüler seien wirklich ohne Mühe zu einem so umfassenden Ueberblick gelangt; dann werden sie vergleichsweise in der Lage dessen sein, der zum erstenmal einen Fabrikraum betritt und das ganze Getriebe von einem Punkte aus überschaut, der aber, wenn er mit Arbeit und Maschinen nicht vorher im einzelnen bekannt geworden ist, keine Ahnung davon hat, was alles bedeutet. Sie werden unter den vielen Beziehungen die wesentlichen und notwendigen nicht unterscheiden können, manches zur Anwendung erforderliche wol gar nicht kennen lernen. Eben dieses Notwendige und zwar dieses allein gibt die Euklidische Methode und erfüllt damit die erste Forderung, die des Verweilens im engen Ideenkreise. Es ist ein Widerspruch, mit dieser Forderung das Streben, gleich anfangs den Blick zu erweitern, verbinden zu wollen; eins arbeitet dem andern entgegen.

Sehr oft lässt sich die Meinung vernehmen, das Festhalten an der Euklidischen Methode beruhe allein auf dem alten Herkommen. Nun sind aber nach Becker's Rechnung die Reformgedanken bereits 70 Jahre lang tätig. Wie geht es dann zu, dass noch keine wesentlich abweichende Bearbeitung entschiedene Anerkennung gefunden hat? Obgleich längst widerlegt, ist es immer von neuem das genannte Vorurteil, wodurch sich die Reform meistens einzuführen sucht. Jede fängt von neuem mit derselben Lästerung an und schliesst mit demselben Miserfolg. Die Reform würde auf einem weit klarerem Boden stehen und mehr Achtung gewinnen, wenn sie mit der Frage begönne: Welche Eigenschaften der Euklidischen Methode müssen festgehalten werden, damit der mathematische Unterricht seinen Zweck nicht verfehle? Der Verfasser legt sich diese Frage nicht vor, ist vielmehr gleich von Anfang und im allgemeinen und ganzen gegen Euklid eingenommen, zeigt sich aber offen für die Lehren seiner eigenen Erfahrung, welche ihn doch Punkt für Punkt dem Euklid näher führen. Er verteidigt die Darstellungsform, welche den Lehrsatz zu Anfang stellt und den Beweis folgen lässt, und gesteht, dass ihn die Uebereinstimmung in diesem Punkte günstiger für Euklid gestimmt habe. Diese Form ist doch also schon eine Eigenschaft der Methode, von der wir nicht abgehen dürfen. Auch ist dies nicht die einzige Concession: auch seine Erklärung, dass die projectivische

Geometrie nicht an die Stelle der Euklidischen zu setzen ist, zeigt indirect, das letztere manches besitzt, was wir nicht ohne weiteres fallen lassen können. Ein Punkt, und zwar ein wichtiger, ist dagegen im Programm nicht berührt, steht aber in Beziehung zu einer Stelle in der gegenwärtigen Schrift. Diese empfiehlt, den streng wissenschaftlichen geometrischen Unterricht erst in Obertertia zu beginnen und ihm in Quarta und Untertertia einen propädeutischen Unterricht vorhergehen zu lassen, der sich, um es kurz zu sagen, auf äussere Beobachtung beschränkt, die dabei bemerkten Eigenschaften der Figuren nicht beweist. Ob dieses Vorgehen zu einem guten Ziele führt; muss erst die Erfahrung zeigen. Hier ist es jedenfalls sehr einseitig erwogen, indem bloss in Betracht gezogen wird, dass abstracte Gegenstände leichter von ältern Schülern gefasst werden, leitende Gesichtspunkte gar nicht aufgestellt sind, ein Lehrbuch unnötig sein soll, weil ja der nachherige strenge Cursus alles mangelnde ergänze. Was dabei ausser Acht gelassen ist, liegt nahe genug. Werden die Schüler leichter über den Berg hinwegkommen, nachdem sie zwei Jahre lang vor demselben Halt gemacht haben? Werden sie, nachdem sie bereits eine Menge geometrischer Gegenstände kennen gelernt und sich oberflächliche Begriffe angeeignet haben, geneigter und fähiger sein, noch einmal Winkel, Dreieck u. s. w. rücksichtlich logischer Beziehungen anzusehen, ohne dass ein wirklicher realer Zuwachs an Kenntnissen die Mühe lohnt? Keinem Lehrer kann wol die Bemerkung entgehen, dass Schüler in den ersten Jahren des Unterrichts jeden neuen Lehrgegenstand ohne Unterschied was ihnen geboten wird mit gleicher Spannung aufnehmen. Wird diese Zeit mit Verweilen bei den einfachsten Figuren benutzt um sie mit dem zur Folgerung notwendigen Beziehungen vertraut zu machen, so wird man keinem Widerwillen begegnen. Später werden sie wählerischer, der Gegenstand scheint ihnen zu armselig; da ist die zum präcisen Zuwerkegehen erforderliche Geduld für sie eine schwere Aufgabe. Diese wird schon an sich um so abschreckender, je weiter sie ohne Präcision fortgeschritten waren; nun kommt aber noch die Zumutung hinzu, dass sie beim Beweis nicht allein die vorhergehenden Sätze wissen, sondern dieselbe auch von den aus dem propädeutischen Unterricht bekannten Sätzen unterscheiden sollen, die hier keine Geltung haben. Wenn der Verfasser eine Methode des propädeutischen Unterrichts kennt, welche von allen diesen Nachteilen frei ist, so wird er ein neues Problem lösen, indem er davon Rechenschaft und dazu Anleitung gibt. Bis jetzt hat man die Nachteile nur durch äusserste Beschränkung des Umfangs so gut als möglich zu verringern gesucht.

Die Schrift wendet sich nun zu den Recensionen der citirten

Bücher des Verfassers. Die in diesem Archiv enthaltenen sind ziemlich reichlich bedacht worden. Die Hauptstellen sind in extenso mitgeteilt, und die Antwort darauf übergeht keinen Punkt mit Stillschweigen. Gleichwol ist die Behandlung der Fragen nicht der Art, dass sie dem Aufwand entsprechend den Zweck fördern könnte; sie ist mehr darauf gerichtet durch dialektische Kunstgriffe die Entscheidung hinauszuschieben und für diesmal noch dem Urteil zu entgehen als die Sache zu klären. Die erste Antwort beginnt mit einem persönlichen Ausfall gegen den Recensenten, indem sie demselben ein Dogma von vermeintlich unfehlbarer Wahrheit zuschreibt — wol nur um dem zuvorzukommen, dass man vom Verfasser ein gleiches sage. Es handelte sich um die Bedeutung der Axiome der Geometrie. Der Verf. erklärt sie für unmittelbar einleuchtende Sätze; hat aber an einer Stelle geäussert, dass man bei oberflächlicher Betrachtung für einleuchtend halten könne, was nicht einmal wahr sei. Der Ref. glaubt nicht an die Untrüglichkeit jener Divination, welche ohne bewussten, angebbaren Grund Urteile als sicher aufstellt, und hat nach Hinweis auf des Verf.'s eigene Mahnung zur Vorsicht an einem weitern Beispiel aus dessen Lehrbuch (Axiom III.) gezeigt, welcher Täuschung eine solche Divination ausgesetzt ist. Kann man hier von einem Dogma reden, so ist es nicht vom Ref., sondern vom Verf. aufgestellt und ohne Widerlegung des Entgegenstehenden festgehalten worden; der Zweifel daran kann doch kein Dogma sein. Jetzt verkehrt der Verf. zur Verteidigung alle Aussagen in ihr Gegenteil. Zunächst soll die obige Aeusserung nur von Fällen der Unachtsamkeit gelten, und unter „oberflächlich" verstehe er überhaupt „unachtsam". Ob jemand das für gleichbedeutend hält, sei dahingestellt; im Bericht ist beides unterschieden berücksichtigt. Der wörtliche Inhalt des dem Ref. zugeschobenen Dogmas lautet nun: „dass alle unmittelbare Erkenntniss nur oberflächlich sein könne". Dies sagt der Verf., wol zu merken, in seiner abweichenden Wortdeutung. Oberflächlich nennt man aber, wie das Wort selbst sagt, die Urteile, die auf das äussere Anschauen des Nächstliegenden hin ohne eingehendes Studium, ohne gründliche Untersuchung gefällt werden; es schliesst nicht aus, dass dieses Anschauen alles treu aufnimmt, was sich ihm darbietet. Da es nun ein Widerspruch ist, unmittelbar evident zu nennen, was auf gründlicher Untersuchung, ja überhaupt auf Ueberlegungen beruht, so war wol der obige Satz selbstverständlich. Auch war bis dahin dem Ref. durch keinen Einwand dagegen ein Anlass geboten ihn zu verteidigen. Erst jetzt hat der Verf. in der Wortdeutung ein Mittel gefunden ihn anzufechten. Was er von Verketzerung sagt, ist aus der Luft gegriffen; diese Beschuldigung möchte er doch mit Worten des Berichts belegen. Doch trotz jener Umdeutung und gerade durch die Verkehrung der Auf-

stellungen verfällt er weiterhin in den genannten Widerspruch, dem er durch erstere entgehen wollte. Ref. hatte vom Axiom III. ausgesprochen, dass es bei oberflächlicher Betrachtung für evident gehalten werden könnte. Der Verf. erwidert jetzt: allerdings könnte es bei oberflächlicher Betrachtung bezweifelt (!) werden, doch nach gewissen Ueberlegungen — es werden deren eine längere Reihe aufgeführt, die schwerlich der Schüler von selbst anstellt, und deren jede wieder neue Fragen hervorrufen würde — würde die Richtigkeit des Axioms einleuchten. Ist nach allen diesen Ueberlegungen das Axiom noch unmittelbar evident?

Das übrige bedarf wol nur kurzer Antwort. In Betreff der Bemerkung über kürzeste Distanz (welche keiner Ansicht des Verf. entgegentritt) sei gern eingeräumt, dass sie an unrechter Stelle angebracht war und wol deshalb nicht verstanden worden ist. Das Wort „mithin“ mag nicht als folgernd gemeint sein; liess es sich aber nicht entbehren, um so schlimmer. Die Auffassung der Axiome als Hypothesen verwirft der Verfasser in der Besorgniss, dass dadurch den Schülern die Lust zu weiterer Forschung geraubt würde. Sie sollen ihre „anschaulich evidente Erkenntniss“ solange für zuverlässig halten, bis ihnen die Möglichkeit des Irrtums gezeigt wird. Sollte man meinen, dass in unsern Zeiten, wo die Erfolge der auf wissentlich fehlbare Hypothesen bauenden Forschung, die auf keiner aprioristischen Basis zu gewinnen waren, bekannt sind, sich jenes alte Vorurteil noch könnte hören lassen! Wenn der Verf. meint, über der Controverse sei der übrige Inhalt seiner Schrift übersehen worden, so ist das ein Irrtum; das Vielteilige eignet sich einmal weniger zur Besprechung, und einzelne Punkte, auf dier er besonders Wert legte, hatte der Verf. nicht hervorgehoben. Hoppe.

Vermischte Schriften.

American Journal of Mathematics. J. J. Sylvester, Editor. Thomas Craig, ph. Dr., Assistant Editor. Published under the Auspices of the Johns Hopkins University. Volume VI. Baltimore 1884.

Der Inhalt des 6. Bandes ist:

A. Cayley: Note über eine Teilungsreihe.

Th. Craig: Ueber vierfache Thetafunctionen. — Ueber gewisse Gruppen von Relationen, denen jene genügen. — Ueber Thetafunctionen mit complexen Charakteristiken.

A. L. Daniels: Zwei Noten über Weierstrass' Theorie der elliptischen Functionen.

G. S. Ely: Die graphische Methode angewandt auf zusammengesetzte Teilungen.

Dr. F. Franklin: Note über die Entwickelung eines algebraischen Bruches.

A. S. Hathaway: Einige Aufsätze über die Zahlentheorie.

M. Hermite: Ueber eine Formel bezüglich auf die Theorie der Functionen einer Variabeln.

G. W. Hill: Ueber gewisse mögliche Kürzungen in der Berechnung der langperiodischen Ungleichheiten in der Bewegung des Mondes infolge directer Einwirkung der Planeten.

E. W. Hyde: Rechnung der Richtung und Lage.

M. Jenkins: Beweis eines Satzes über Teilungen. — Fernere Liste der Correctionen zu Prof. Sylvester's constructiver Theorie der Teilungen.

W. W. Johnson: Die imaginäre Periode der elliptischen Functionen.

E. McClintock: Ueber die Lösungen der Gleichungen 5. Grades.

P. A. Mac Mahon: Semivarianten und symmetrische Functionen. — Note über die Entwickelung eines algebraischen Bruches. — Symmetrische Functionen der Wurzeln einer Gleichung 13. Grades.

H. A. Rowland: Ueber die Fortpflanzung einer beliebigen elektromagnetischen Störung, über sphärische Lichtwellen und die dynamische Theorie der Diffraction.

Ch. H. Smith: Eine graphische Methode der Lösung sphärischer Dreiecke.

W. E. Story: Ueber die absolute Classification der quadratischen Oerter und ihre Schnitte mit einander und mit linearen Oertern.

J. J. Sylvester: Vorlesungen über die Principien der allgemeinen Algebra.

C. A. van Velzer: Zusammengesetzte Determinanten.

G. P. Young: Principien der Lösung von Gleichungen höhern Grades, nebst Anwendungen. — Lösung lösbarer Gleichungen 5. Grades. H.

Acta Mathematica, Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 4. Stockholm 1884. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der Inhalt des 4. Bandes ist:

P. Appell: Ueber die Functionen dreier reeller Variabeln, die der Differentialgleichung $\Delta F = 0$ genügen.

C. A. Bjerknes: Hydrodynamische Untersuchungen. 1. Die hydrodynamischen Gleichungen und die ergänzenden Relationen.

G. Cantor: Von der Mächtigkeit vollkommener Gesamtheiten von Punkten.

G. Darboux: Ueber die partielle Differentialgleichung 3. Ordnung der orthogonalen Systeme.

E. Goursat: Beweis des Cauchy'schen Satzes.

Ch. Hermite und L. Fuchs: Ueber eine Entwickelung in Kettenbruch.

Sophie Kowalevski: Ueber die Reduction einer bestimmten Classe Abel'scher Integrale 3. Ranges auf elliptische Integrale.

E. Laguerre: Ueber einige Punkte der Theorie der numerischen Gleichungen.

L. Matthiessen: Untersuchungen über die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels gegen einander und gegen einen Hauptstrahl.

G. Mittag-Leffler: Ueber die analytische Darstellung der monogenen einförmigen Functionen einer unabhängigen Variabeln. — Neuer Beweis des Laurent'schen Satzes.

H. Poincaré: Ueber die Gruppen der linearen Gleichungen.

L. Scheffler: Beweis des Laurent'schen Satzes.

N. Sonine: Ueber die Verallgemeinerung einer Formel von Abel.

Chr. Zeller: Zu Euler's Recursionsformel für die Divisorensummen.

H.

IV. Procházka: Ein Beitrag zur Schattenlehre.

$\angle\, POA = \varphi_1 = P_0OB$

$POB = \varphi_2 = P_0OA$

J. Mack: Der Winkelspiegel

V. Schoute: (

Steindruckerei v. F. W. Kunike

VII. Oe

Steindr. v. F. W.

VIII. D

Fig. 1. 2.

Fig. 3.

Steindruck v. F W. K

XIV.

Fig. 2.

P_3

P_2

Q_1 Q_2 R_2 Q_3

c a_2 b_2

c_3 c_4 c_5 c_6

Fig. 5.

Darst. d. Flächen 4. Ordnung.

Steindr. v. F. W. K

XXI. **Sporer:** Ein Satz über Kegelschnitte.

XXI. **Lange:** Eine Gruppe plan. Maxima u. Min.

XII. **Bieler:** Körper zwischen 2 Rotationsellipsoiden.

Litterarischer Bericht VI.

Physik.

Die Physik im Dienste der Wissenschaft, der Kunst und des praktischen Lebens. Unter Mitwirkung von Dr. J. von Bebber, Abteilungsvorstand auf der deutschen Seewarte in Hamburg; C. Grahwinkel, kais. Postrat in Frankfurt a. M.; Dr. E. Hartwig, Assistent an der Univ. Sternwarte in Strassburg; Dr. E. Lommel, Professor an der Univ. Erlangen; Dr. F. Melde, Prof. an d. Univ. Marburg; Dr. J. Rosenthal, Prof. an d. Univ. Erlangen; Th. Schwartze, Ingenieur in Leipzig; Dr. A. v. Urbanitzky, Assistent an d. techn. Hochschule zu Wien; Dr. H. W. Vogel, Prof. an d. techn. Hochschule zu Berlin; Dr. J. H. Wallentin, Prof. am Obergymnasium im IX. Bezirk in Wien; herausgegeben von Dr. G. Krebs, Oberlehrer an der Musterschule (Realgymnasium) zu Frankfurt a. M. Stuttgart 1883. Ferdinand Enke.

Das Werk behandelt eine Anzahl solcher physikalischer Entdeckungen, welche in neuerer Zeit durch die ausgedehnteste Anwendung bekannt geworden sind. Es gibt in den folgenden 13 Aufsätzen deren Erfindungs- und Fortbildungsgeschichte und so viel von der Theorie und Technik, als zum Verständniss des Zusammenhangs erforderlich ist, mit einigen eingelegten Holzschnitten. Die Titel der Aufsätze sind: Vogel: Im photographischen Atelier. Lommel: Spectrum und Spectralanalyse. Krebs: Eine meteorologische Station. Bebber: Auf der deutschen Seewarte. Rosenthal: Heizung und Ventilation. Melde: Die Akustik in ihren Hauptbeziehungen zu den musikalischen Instrumenten. Schwartze: Die Motoren des

Kleingewerbes. Urbanitzky: Die elektrischen Maschinen. Wallentin: Kerzen und Lampen. Urbanitzky: Der Kampf des elektrischen Lichtes mit dem Gaslichte. Wallentin: In der galvanoplastischen Werkstätte. Grahwinkel: Die Telephonie und ihre Verwendung im Verkehrsleben der Gegenwart. Hartwig: Auf der Sternwarte.

H.

Die Spannungs-Elektricität, ihre Gesetze, Wirkungen und technischen Anwendungen. Von K. W. Zenger, o. ö. Professor der Physik an der k. k. böhm. techn. Hochschule in Prag. Mit 86 Abbildungen. Pest, Leipzig (1884). A. Hartleben. 252 S.

Das Buch gibt genau das, was der Titel sagt. Es eignet sich zur Selbstbelehrung ohne Rücksicht auf Studium und Beruf. Der Inhalt ist selbstverständlich.

H.

Die Generatoren hochgespannter Elektricität mit vorwiegender Berücksichtigung der Elektrisirmaschinen im engeren Sinne. Von Dr. Ignaz G. Wallentin, k. k. Professor. Mit 75 Abbildungen. Wien. Pest, Leipzig (1884). A. Hartleben. 271 S.

Auch dieses Buch ist, wie das vorige, zur Selbstbelehrung ohne Rücksicht auf Studium und Beruf eingerichtet. Seine Aufgabe besteht darin, die Apparate in erforderlicher Vollständigkeit zu beschreiben und ihre Wirkungsweise darzulegen. Unter diesen werden nach einander behandelt: die Reibungselektrisirmaschinen, die Elektrisirmaschinen, welche auf den Principien der Influenz und des Transportes der Ladungen beruhen, Apparate nach dem Princip der Metallinductoren, Inductionsapparate als Generatoren hochgespannter Elektricität, Accumulatoren, die rheostatische Maschine. Hierbei werden keine Kenntnisse des Gegenstandes vorausgesetzt, sondern die zum Verständniss erforderlichen Begriffe vorher erläutert, weiterhin auch das zur Messung der Kräfte gehörige Verfahren gelehrt.

H.

Die physikalischen Grundsätze der elektrischen Kraftübertragung. Eine Einleitung in das Studium der Elektrotechnik. Von Josef Popper, Mit einer Figurentafel. Wien, Pest. Leipzig (1884). A. Hartleben. 55 S.

In dieser Arbeit war der Verfasser bestrebt, das theoretisch so interessante und praktisch so wichtige Problem der elektrischen Kraftübertragung in seiner grössten Allgemeinheit als elektrischen

Transport von Energie überhaupt — in gründlicher und systematischer Weise zu behandeln, um dem Physiker, Elektrotechniker, wie auch dem Unternehmer die Kenntniss aller jener Factoren zu verschaffen, die bei diesem Problem massgebend sind. Um diesen Zweck zu erreichen, wird zuerst eine allgemeine Uebersicht über die verschiedenen Arten von Kraftübertragung überhaupt gegeben, sodann gezeigt, welche Grössen speciell bei dem elektrischen Transport von Arbeit gemessen werden müssen, und welche physikalische Bedeutung denselben zu Grunde liegt; dabei wird der allgemeine Arbeitsbegriff und der sonst so schwierig zu erfassende Begriff des Potentials in leichtfasslicher Weise von der elementaren Mechanik angefangen bis hinein in das Capitel der statischen und dynamischen Elektricität gleichartig durchgeführt und hiedurch auch die Bedeutung der elektrischen Maassmethoden principiell klargelegt. Gegen Schluss der Arbeit werden die für den Elektrotechniker und Unternehmer wichtigen Betrachtungen über die Oekonomie des Betriebes, Ausnützung des Anlagecapitals, Einfluss der Distanzen, der Spannungen u. s. w. in conciser Weise zusammengefasst, so dass sich Jedermann auch von Fall zu Fall ein Urteil zu bilden vermag über jene Umstände, von welchen das Ergebniss einer elektrischen Kraftübertragung abhängt, und welche näheren Detailstudien stets zu machen sind, um eine solche Anlage geschäftlich calculiren zu können. Zur noch grösseren Erleichterung des Verständnisses wird schliesslich der bisher am vollständigsten studirte und gemessene Fall einer elektrischen Kraftübertragung durchgeführt und unter Zugrundelegung des Diagrammes dazu benützt, jede einzelne der conventionell bezeichneten Grössen vor das Auge zu führen und die allgemeinen Begriffe und Betrachtungen an einem speciellen Falle zu illustriren. Nach dem Studium dieser Arbeit wird wohl Jeder eine gründliche Einsicht in das Problem der elektrischen Kraftübertragung gewonnen haben und mit Leichtigkeit im Stande sein, dessen weitere Entwicklung mit selbständigen Urteil zu verfolgen

A. Hartleben's Verlag.

Diesem Urteile treten wir vollkommen bei.

Die Redaction.

Analytische Theorie der Wärme. Von M. Fourier. Deutsche Ausgabe von Dr. B. Weinstein. Mit 21 in den Text gedruckten Holzschnitten. Berlin 1884. Julius Springer. 476 S.

Die Uebersetzung der „Théorie de la chaleur" vertritt zugleich mit dem in Breslau erschienenen unveränderten Abdruck eine neue Ausgabe des Werks, welche lange Zeit gefehlt hat, besitzt aber vor

dieser den Vorzug, dass darin nach sorgfältiger Revision der analytischen Rechnungen die zahlreichen Druckfehler des Originals beseitigt sind. In der Abfassung ist nichts geändert, nur haben einige Hinzufügungen stattgefunden: die kleinern Teile haben Ueberschriften erhalten, hin und wieder ist der Calcul des leichtern Verständnisses wegen erweitert, und den Reihenentwickelungen sind überall die Grenzen der Gültigkeit hinzugeschrieben. Anmerkungen sind selten; die Litteratur ist am Schlusse zusammengestellt. Das Originalwerk ist bekannt als bahnbrechend für mathematische Behandlung der Physik, es hat die dazu dienenden Mittel der Analysis bedeutend vermehrt durch die Theorie der trigonometrischen Reihen. Es behandelt die Bewegung der Wärme, hauptsächlich in festen Körpern nebst Ein- und Austritt unter äusseren Einflüssen. Die Hauptabschnitte sind folgende. Nach einer Einleitung, welche die analytische Gestaltung der physikalischen Gesetze vollzieht, kommt: Gleichungen für die Verbreitung der Wärme; Verbreitung in einer unendlichen rechteckigen Halbplatte; variirende Bewegung in einem Ringe; radiale Verbreitung in einer Kugel; desgl. in einem unendlich langen Cylinder; stationäre Bewegung in einem einseitig unendlich langen rechteckigen Prisma; Bewegung in einem Würfel; Diffusion der Wärme; allgemeine analytische Ergebnisse über Integration von Differentialgleichungen und Darstellung von Functionen; Analyse und Grundlage der Wärmetheorie. H.

Das internationale elektrische Maasssystem im Zusammenhange mit anderen Maasssystemen dargestellt von F. Uppenborn, Ingenieur, Redacteur des Centralblattes für Elektrotechnik. (Enthält die Beschlüsse der beiden Pariser Congresse (1881 und 1884) nebst genauer Erläuterung von deren Consequenzen.) 2. Auflage. München und Leipzig 1884. R. Oldenbourg. 26 S.

Das elektrische Masssystem beruht auf dem mechanischen. Obwol man diese Grundlage als bekannt und feststehend zu betrachten pflegt, so war es doch nicht überflüssig eine eingehende Erörterung derselben vorausgehen zu lassen. Einesteils lässt die Wahl der Einheiten Verschiedenheit zu, über welche Entscheidung und Definition erfordert wird: anderenteils kommen auch Zweifel über Begriffe vor. Der Umstand, dass das Gewicht meistens auf eine Frage nach der Masse antwortet, verleitet sehr stark dazu den Urbegriff des Gewichts als einer Kraft preiszugeben. Dem ist hier vorgebeugt durch Hinweis auf die Erklärung des Congresses, welche das Grammgewicht als Kraft bezeichnet und die es repräsentirende Masse Grammmasse nennt. Die fundamentalen Einheiten sind nun Centimeter *C*, Gramm-

masse *G* und Secunde *S*. Auf sie werden die fernern mechanischen Einheiten der Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, der Arbeit und des Effectes reducirt. Die davon abweichenden technischen Einheiten sind dann aufgeführt. Von den elektrischen Masssystemen werden das elektrostatische und elektromagnetische behandelt. Die Masseneinheit der Elektricität wird durch das Coulomb'sche Gesetz bestimmt, die Stromeinheit aus Faraday's Relation hergeleitet. Ausführliche Erklärung bedurfte die Einheit der elektromotorischen Kraft. Zu diesen kommen für das elektromagnetische Masssystem hinzu die Widerstandseinheit und die Einheit der Capacität. Das Fernere handelt von den gesetzlichen Bestimmungen und Congressbeschlüssen. H.

Zeitschrift zur Förderung des physikalischen Unterrichts. Herausgegeben und redigirt vom Physikalisch-technischen Institut, Lisser u. Benecke. Erster Jahrgang 1884. Berlin 1884. Lisser u. Benecke.

Diese neue Zeitschrift, welche seit October v. J. in monatlichen Heften erscheint, hat sich vor allem zur Aufgabe gemacht Apparate zu Demonstrationszwecken, deren Verfertiger die Herausgeber selbst sind, und demonstrative Experimente anzugeben. Solche sind auch die Gegenstände der Aufsätze, mit welchen sich eine Anzahl Physiker, besonders Lehrer der Physik an dem Unternehmen beteiligt haben. H.

Vermischte Schriften.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Udgivet af Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars. II. III. IV. V. VI. VII. Bind. Kristiania 1877—1882. Alb. Cammermeyer.

Ueber den Anfang dieser Zeitschrift s. litt. Ber. 243. S. 37. Der 2. bis 7. Band enthält an mathematischen Abhandlungen:

S. Lie: Neue Integrationstheorie der Monge-Ampère'schen Gleichung. — Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen. — Eine Eigenschaft der Steiner'schen Fläche 3. Classe und 4. Ordnung. — Ueber reelle algebraische Minimalflächen. — Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen. I. Ueber reelle algebraische Minimalflächen. — Theorie des Pfaff'schen Problems 2. — Kleiner Beitrag zur Theorie der Steiner'schen Fläche. — Theorie der Transformationsgruppen, III. IV. V. 3. 4. — Sätze über Minimal-

flächen, II. III. 3. — Bestimmung aller in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Differentialgleichung $s = 0$. 4. — Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. 4. 5. — Weitere Untersuchungen über Minimalflächen. 4. — Ueber Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind. 4. — Bestimmung aller Flächen constanter Krümmung. 5. — Discussion der Differentialgleichung $s = F(s)$. 6. — Transformationstheorie einer partiellen Differentialgleichung. 6. — Ueber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Classe linearer partieller Differentialgleichungen. 6. — Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen. 6. — Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden. 7. — Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten. 7. — Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. 7.

S. A. Sexe: Wie man die imaginäre Grösse vermeidet. 4. — Sollte sich nicht ein reeller mathematischer Ausdruck finden lassen, der die Rolle der imaginären Grössen übernehmen und dieselben Dienste leisten könnte wie diese Grössen? 7. —

H. Geelmuyden: Die konische Pendelbewegung. 5. — Bemerkungen über die Theorie des Zodiakallichtes. 7.

Elling Holst: Ueber algebraische cykloidische Curven. 6. — Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Curven. 7. — Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes. 7. — Ein Par synthetische Methoden in der metrischen Geometrie mit Anwendungen. 7.

J. J. Åstrand: Ueber eine neue Methode zur Lösung trinomischer Gleichungen $n$ten Grades. 6. H.

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. Francesco Gomes Teixeira, Professor de mathematica na Universidade de Coimbra, Socio correspondente da Academia Real das sciencias de Lisboa e da Sociedade de sciencias physicas e naturaes de Bordeaux. Volume III. IV. Coimbra 1881—1883. Imprensa da Universidade.

Der 3. und 4. Band enthalten folgende Abhandlungen.

A. Schiappa Monteiro: Ueber eine im Journal de mathématiques élémentaires (herausgeg. zu Paris von Bourget u. Koehler) gestellte Aufgabe. — Lösung der Aufgabe 17. — Note bezüglich auf descriptive Geometrie über den Schnitt der Flächen 2. Grades. — Lösung der Aufgabe 16. — Note über die Strictionslinie des Hyperboloids. — Lösung der Aufgaben 15. 14. — Ueber die Teilung

der Geraden und des Kreises in gleiche Teile, bezüglich auf eine Aufgabe von Marecas Ferreira. — Note über die Erzeugung eines Kegelschnitts mittelst des Kreises oder eines andern Kegelschnitts und über andere geometrische Untersuchungen.

L. F. Marrecas Ferreira: Ueber ein geometrisches Problem.

J. A. Martins da Silva: Ueber die Transformation der Legendre'schen Function X_n in ein bestimmtes Integral. — ,Ueber die directe Reduction einer Classe vielfacher bestimmter Integrale. — Beweis eines Satzes von Besge. — Note über die Transformation eines bestimmten Integrals. — Ueber einige neue Formeln bezüglich auf die Wurzeln der algebraischen Gleichungen. — Lösung der Aufgabe 21.

F. Gomes Teixeira: Vorlesungen über die Principien der Infinitesimalrechnung. — Ueber die Multiplication der Determinanten.

Pedro Gomes Teixeira: Ueber einige arithmetische Sätze.

A. F. Rocha Peixoto: Ueber einen Satz bezüglich auf ebene Schnitte des Ratationskegels.

J. M. Rodrigues: Ueber eine Formel von Wronski. — Ueber die Theorie der Facultäten. — Ueber eine Formel von Euler. — Ueber eine Formel von Lagrange.

Breusing: Ueber die Geschichte des Nonius.

M. Birger Hansted: Verallgemeinerung der Legendre'schen Function X_n.

F. da Ponte Horta: Einige Eigenschaften der Kegelschnitte.

Duarte Leite Pereira da Silva: Ueber einige unbestimmte Integrale. — Derivirte beliebiger Ordnung von y nach x für $f(x, y) = 0$.

J. C. O'Neil de Medeiros: Ueber ein Problem der elementaren Algebra.

Ausserdem sind 7 neue Aufgaben, Nr. 18—24., gestellt, und einige Nachrichten über erschienenen Bücher gegeben. H.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel XI. Amsterdam 1884. J. F. Sikken.

Der Inhalt des 11. Bandes an Abhandlungen ist folgender.

L. Janse Bz: Ueber die graphische Auflösung der sphärischen Dreiecke und darauf gegründete nautische und astronomische Aufgaben.

P. van Geer: Die Methode von Roberval.

D. Bierens de Haan: Zwei seltene Werke von Benedictus Spinoza. — Ein äusserst seltenes Werk von Albert Girard, „Invention nouvelle en l'algèbre.“

F. J. van den Berg: Ueber die geometrische Verbindung zwischen den Wurzelpunkten einer Gleichung und denen ihrer derivirten.

Ferner sind mitgeteilt ein Beweis des Ptolemäischen Satzes, welchen ein Schüler 4. Classe der höhern Bürgerschule in Tiel gefunden hat; ein Beweis der Formel für die Anzahl der Combinationen, von W. Mantel; und die in den Winterversammlungen der Wiskundig Genootschap in Amsterdam verhandelten Themata.

H.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Correspondent de l'Académie royale de Belgique, etc. et J. Neuberg, Professeur à l'Université de Liége, Membre de la Société royale des sciences de Liége, etc avec la collaboration de plusieurs professeurs belges et étrangers. Tome quatrième, année 1884. Gand 1884. Ad. Hoste. Paris, Gauthier Villars.

Der 4. Band enthält folgende Abhandlungen.

P. Mansion: Abriss der Theorie der hyperbolischen Functionen. — Aus dem Leben von W. Snel. — Der 200ste Jahrestag der Erfindung der Differentialrechnung. — Curven mit Verzweigungspunkt. — Erfindung der Differentialrechnung.

Barbarin: Sätze über die Ellipse. — Aufgaben über die Kugel

E. Catalan: Ueber einen Satz von Abel.

Angelo Genocchi: Zusammenstellung verschiedener Untersuchungen über die Ovalen von Descartes und einige andre Curven.

De Rocquigny: Arithmetische Aufgaben.

Gelin: Algebraische Aufgaben.

M. d'Ocagne: Ueber die centralen Transformationen der ebenen Curven.

J. Mister: Schwerpunkt einer abgestumpften dreiseitigen Pyramide. — Schwerpunkt des schräg abgeschnittenen Prismas und Parallelepipeds.

E. Césaro: Untersuchung über Transversalen. — Wahrscheinlichkeit gewisser arithmetischer Facta. — Ueber die innere Gleichung der Curven.

H. Brocard: Aufgaben. — Geometrische Eigenschaft einer gewissen Gruppe von 2 Systemen concentrischer Kreise.

H. Schoentjes: Ueber die Erzeugungsart der Conchoide.

Radicke: Ueber die Summen der gleichhohen Potenzen einer Reihe von Cosinus.

E. Lemoine: Verschiedene Sätze über die Antiparallelen der Seiten eines Dreiecks.

Weill: Ueber ein Zweieck und ein Dreieck aus Kreisbogen gebildet.

Boije af Gennäs: Aufgabe der unbestimmten Analytik.

Ausserdem enthält der 4. Band Lösungen vieler in den vorhergehenden gestellten Aufgaben und 100 neue Aufgaben, Nr. 301 bis 400. Von diesen gesondert sind Examenaufgaben. H.

Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Nr. 3. 4. 1883. 1884. — 18 + 39 S.

Aus den Vorträgen sind folgende Gegenstände von Interesse hervorzuheben.

F. H. Reitz: Ueber die ins Werk gesetzte Verbindung der Dreiecksnetze von Spanien und Algier.

Ahlborn: Ueber Connexe und Coincidenzcurven.

E. Liebenthal: Untersuchungen über die Attraction zweier homogenen Körper.

Plath: Ueber die Wiederauffindung des Planeten Sylvia. Hierbei die Zusammenstellung der von 1687 bis 1881 erhaltenen 20 Werte für die Masse des Jupiter.

F. H. Reitz: Ueber den Hohmann-Coradi'schen Flächenintegrator.

J. F. Bubendey: Ueber die Constantenbestimmung der Functionen durch Wahrscheinlichkeitsrechnung bei stark abweichenden Einzelwerten.

P. Jaerisch: Ueber die Kritik der Anwendbarkeit der Gleichungen der Elasticitätstheorie. — Ueber anomale Dispersion.

Reitz: Ueber das Periheliotrop, Instrument zur Erleichterung des Auffindens neuer Dreieckspunkte durch Sonnenlichtblitze.

Schubert: Ueber die Ausdehnung des Begriffs der 7 arithmetischen Operationen von höherer als 3. Stufe.

Ahlborn: Ueber die Beziehung der elliptischen Functionen zur Geometrie.

Wagner: Ueber die Abbildung ebener Curven und Flächenstücke.

Krüss: Ueber die Verwertung der Resultate photometrischer Messungen.

Bock: Ueber die Entwickelung von Functionen in unendliche Producte.

Ahlborn: Ueber die Bedeutung der Zahl p in den Abel'schen Functionen und ihre Beziehung zur Geometrie.

H. Schubert: Ueber eine gewisse Familie von Configurationen. — Die n dimensionalen Verallgemeinerungen des 3 dimensionalen Satzes, dass es 2 Strahlen gibt, welche 4 gegebene Strahlen schneiden.

P. Jaerisch: Lösungen der Elasticitätsgleichungen von der Form

$$f(t, x, y, z) \cos(\alpha t + a_1 x + a_2 y + a_3 z)$$ H.

Association Française pour l'avancement des sciences. Congrès de Lille 1884. Congrès de la Rochelle 1882. Paris, au secrétariat de l'Association.

Wie aus einem Auszug aus den Statuten zu ersehen, ist die Association Française eine dauernd bestehende Gesellschaft, der Jeder durch Anmeldung bei dem Conseil beitreten kann, mit einem Capital in Teilen zu 500 Francs. Sie unterscheidet Gründer, die wenigstens einen solchen Teil zeichnen, und Mitglieder mit jährlichem Beitrag von 20 francs. Ueber die Congresse in den einzelnen Städten Frankreichs und die aus denselben hervorgehenden Publicationen sind keine nähern Angaben gemacht. Zwei solche Publicationen liegen dem Ref. vor; eine dritte aus dem Congress zu Algier 1881 ist bereits im 275. litt. Bericht besprochen. Die gegenwärtigen sind verfasst von M. E, Lemoine, Ingénieur civil, Ancien élève de l'École polytechnique. Die erste behandelt die Peaucellier'sche Vorrichtung, welche mittelst eines lenkbaren Gestänges bei Führung eines Punkts im Kreise einen andern Punkt in gerader Linie bewegt, ein Princip welches im Auslande mehr bekannt sei als in Frankreich. Die zweite, bestehend aus 2 Arbeiten, leitet 17 neue Dreieckssätze her.

H.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 3me série, t. I.—V. 1881—1883. Bruxelles, F. Hayez.

Die 5 ersten Bände der 3. Reihe enthalten folgende mathematische Arbeiten nebst Referaten über dieselben.

C. Le Paige: Note über die Theorie der Polaren. — Ueber gewisse Covarianten. 1. — Ueber die Curven 3. Ordnung. 1. 3. 4. — Ueber die Theorie der binären Formen für mehrere Reihen von Variabeln. 2. — Ueber die geometrische Darstellung zweier einförmigen Transformationen. 3. — Ueber einige einförmige geometrische Transformationen. 4. — Note über die Homographie 3. Ordnung. — Ueber die Flächen 2. Ordnung. 5.

P. Samuel: Note über ein Instrument zur Beschreibung von Ellipsen. 1. 2.

Folie (gemeinsam mit Le Paige): Ueber die Curven 3. Ordnung. 1. 3.

Catalan: Ueber die Legendre'schen Functionen X_n. — Magisches Quadrat von la Villa Albani (Rom). 2. — Ueber die Addition der ellliptischen Functionen 1. Gattung. — Einige Sätze der elementaren Geometrie. 4. — Note über die Theorie der Kettenbrüche und gewisse Reihen. — Ueber eine Doppelreihe. 5.

Dernyts: Note über die algebraischen Flächen mit mittlerer Krümmung null. 2.

Gomes Teixeira: Ueber eine Classe von Gleichungen mit partiellen Differentialquotienten 2. Ordnung. 2. — Integration einer Classe von Gleichungen mit partiellen Differentialquotienten 2. Ordnung. 3.

Mansion: Fundamentales Princip betreffend die Berührung von Flächen, welche eine gemeinsame Erzeugende haben. 3. — Ueber einen Punkt der Theorie der Fourier'schen Reihen. 5.

E. Weyr: Ueber die Involutionsflächen. 4.

Boblin: Teilung eines Winkels oder Bogens in 3 progressive und proportionale Teile. 4. — Ueber die Verdoppelung des Kubus. 5.

Genocchi: Ueber die Functionen von Prym und Hermite. 4. 5.

Sautreaux: Versuch der Anwendung der Geometrie mit polygonalen und polyedrischen Coordinaten auf die Lösung der Gleichungen 3. und 4. Grades. 4.

Ronkar: Versuch der Bestimmung der Trägheitsmomente des Erdsphäroids. 5.

De Tilly: Ueber den Satz von Chasles bezüglich auf Centralaxen. 5.

Wilmart: Lösung des Euklid'schen Postulats. 5. H.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling natuurkunde. Tweede reeks. Achttiende deel. Amsterdam 1883. Johannes Müller.

Der 18. Teil enthält folgende mathematische Abhandlungen.

Ch. M. Schols: Berechnung des Abstandes und Azimuts aus Länge und Breite. — Ueber den Anschluss eines Dreiecksnetzes von niederer Lage an 3 Punkte eines höhern.

W. Kapteyn: Einige Bemerkungen über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen.

D. Bierens de Haan: Baustoffe für die Geschichte der mathematischen und Natur-Wissenschaften in den Niederlanden.

J. Bueno de Mesquita: Allgemeine Gleichungen für ein centrirtes Linsensystem.

D. J. Korteweg: Allgemeine Sätze betreffend die stationäre Bewegung einer incompressibeln, reibenden Flüssigkeit. H.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, showing the operations, expenditures and condition of the Institution for the year 1881.—1882. Washington 1883—1884.

Der Report enthält unter der Ueberschrift: „Record of recent scientific progress“ einen übersichtlichen Bericht über die jährlichen extensiven Fortschritte in der Erforschung der materiellen Tatsachen. Dieser Teil des Buchs umfasst etwa die Hälfte des Raumes. Der Bericht erstreckt sich auf folgende Wissenschaften: Astronomie, Meteorologie, Physik, Chemie, Botanik, Zoologie und Anthropologie. Die Theorie wird in keiner derselben berührt, daher ist auch die Mathematik gänzlich ausgeschlossen. Es handelt sich allein um neue Beobachtungen und deren Mittel. H.

Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Vol. IV. V. Published by the co-operation of the Smithsonian Institution. Washington 1881. 1883.

Aus dem Namen „philosophische Gesellschaft“ würde man geneigt sein zu entnehmen, dass dieselbe der Pflege der ideellen, theoretischen Wissenschaft gewidmet sei, daher der Mathematik eine vorwaltende Stelle eingeräumt werden müsse. Die Statuten sprechen überhaupt nicht vom Zwecke der Gesellschaft, sondern nur von der Verwaltung, sie beschränken die Gegenstände der Verhandlungen und Publicationen durch keine Festsetzung, nicht einmal auf wissenschaftliche. Die Verhandlungen deuten auf ein gleiches Interesse für ideelle und reale Wissenschaft; das ideelle Interesse lassen die einleitenden Fragen erkennen, auch tritt es in dem ehrenvollen Andenken an den ihr zugehörenden Mathematiker Peirce hervor. Wenn nun gleichwol die Resultate aller publicirten Vorträge auf blosse Ausdehnung materieller Kenntnisse gerichtet sind, so leitet eine Aeusserung von S. Newcomb in einem Vortrag „über die Beziehung der wissenschaftlichen Methode zum socialen Fortschritt“ auf eine Erklärung des Umstandes. Er findet, dass in Amerika eine weit grössere Trennung zwischen Wissenschaft und praktischem Leben als in der übrigen civilisirten Welt gemacht wird, nur schreibt er die geschilderte Ansicht dem gemeinen Manne, nicht dem Gelehrten zu. Ohne Zweifel ist aber auch letzterer nicht von diesem Einflusse frei. In Amerika findet die Realwissenschaft auf ihrem bekannten Standpunkt ohne theoretische Vertiefung so viel Verwertung, dass das ideelle Studium nicht daran denkt etwas nützliches zu schaffen und sich sorglos beliebigen Speculationen hingibt. Im vorliegenden Falle kommt weiter hinzu, dass die grosse Ausdehnung des bearbeiteten Feldes jede Concentration unmöglich macht. In den am je zweiten Sonnabend stattfindenden Sitzungen würde ein theoretischer Vortrag ganz vereinzelt bleiben. H.

Atti della R. Accademia dei Lincei anno CCLXXXI. 1883—84. Serie terza. Transunti. Volume VIII. Roma 1884.

In diesem Bande sind folgende mathematische Abhandlungen oder deren Analysen enthalten.

A. Violi: Die Moleculargeschwindigkeiten der luftförmigen Körper.

S. Robert Paolo: Warum die Gletscher zurückgehen.

G. Trattini: Ueber einige Sätze in der Theorie der Substitutionen. — Die Gruppen zu k Dimensionen.

Ascoli: Die Grenzcurven einer Varietät von Curven.

P. Blaserna: Ueber die der Eisperiode entsprechende Temperatur.

A. Capelli: Ueber die Zusammensetzung der Substitutionsgruppen.

F. Brioschi: Ueber eine Classe von Curven 4. Ordnung.

A. Lugli: Ueber die barometrische Höhenmessung.

C. Segre: Ueber die Theorie der Classification der Homographien in einem Raume von beliebig vielen Dimensionen.

V. Volterra: Ueber das Gleichgewicht der biegsamen und nicht dehnbaren Flächen. — Ueber ein elektrostatisches Problem.

F. Bonatelli: Von einigen psychologischen Schwierigkeiten, die sich mittelst des Begriffs des Unendlichen lösen.

G. Mengarini: Methode der Bestimmung des Ohm in absolutem Masse. H.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen herausgegeben von Dr. Otto Böklen, Rektor der Realanstalt in Reutlingen. Heft I. 1884. Tübingen 1884. Franz Fues. 94 S.

Diese neue Zeitschrift ist zum Organ der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Reallehrerversammlung bestimmt. Jährlich erscheint ein Heft in gleichem Umfange. Das erste enthält 13 Aufsätze, welche zum grössten Teil der reinen Mathematik ohne Beziehung zur Schule angehören; zum Schluss einen litterarischen Bericht mit kurzer Besprechung neu erschienener Werke. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

VI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, M., üb. d. sogenannten Seqt. d. aegypt. Mathematiker. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

Methode und Principien.

Harms, F., Metaphysik. Hrsg. v. H. Wiese. Breslau, Köhler. 2 Mk. 40 Pf.

Secchi, A., die Einheit d. Naturkräfte. Ein Beitr. z. Naturphilosophie. Uebers. v. R. L. Schulze. 2. Afl. 5. Lfg. Leipzig, Frohberg. 2 Mk.

Siemens, Sir W., üb. d. Erhaltung der Sonnen-Energie. Uebers. v. C. E. Worms. Berlin, Springer. 4 Mk.

Weyrauch, J. J., das Princip v. der Erhaltg. d. Energie seit Mayer. Zur Orientirung. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Sammlungen.

Dölp, H., Aufgaben zur Differential- u. Integralrechnung. 4. Afl. Giessen, Ricker. 3 Mk. 40 Pf.

Heis, E., Sammlg. v. Beispielen u. Aufg. aus d. allg. Arithmetik u. Algebra. 66. Afl. Köln, DuMont-Schauberg. 3 Mk.

Kleyer, A., vollst. gelöste Aufg.-Sammlg. a. allen Zweigen der Rechenkunst etc. 141—155. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Kraft, F., Sammlg. v. Problemen d. analyt. Mechanik. 5. u. 6. Lfg. Stuttgart, Metzler's Verl. à 2 Mk.

Lieber, H. u. F. v. Lühmann, geometr. Konstructions-Aufgaben. 7. Afl. Berlin, Simion. 2 Mk. 70 Pf.

Litterarischer Bericht
VII.

Methode und Principien.

Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Von Dr. G. Frege, a. o. Professor an der Universität Jena. Breslau 1884. Wilhelm Koebner. 119 S.

Der Hauptinhalt der Schrift ist Kritik von Meinungen. Sie ist nicht nur die vorzüglichste Leistung, sondern auf ihr wurzelt auch alles übrige. In ihr offenbart sich die seltene Begabung des Verfassers, in durchweg verständlicher Sprache strenge und gründliche Prüfung darzulegen, und das von den äussern logischen Formen freie, auf die Natur des Gegenstands gerichtete Urteil; hier begegnet man auch häufig genug Bemerkungen von Interesse. Wenn sich von der Entwickelung der eigenen Ansicht d s Verfassers nicht ein gleiches sagen lässt, so ergeht es ihm, wie vielen andern Schriftstellern. Die eigene Ansicht ist nicht das Ergebniss einer unabhängigen Untersuchung, sondern nimmt nur das Plätzchen ein, welches der Verfasser nach Verwerfung einer Reihe fremder Urteile als intact hat ausfindig machen können. Gehen wir jetzt das Einzelne durch. In der Einleitung rechtfertigt der Verfasser das Unternehmen, über das Wesen der Zahl eine Untersuchung anzustellen, und zwar dadurch, dass Gelehrte darüber abweichend urteilen. Der Grund möchte wol nicht ausreichend sein, denn dasselbe geschieht oft, wo die Frage schon völlig erledigt ist; überdies kommt es darauf an, ob sie notwendig ist oder doch zur Klärung beiträgt. Letztere Unterscheidung kennt die Schrift nicht; bei aller Schärfe der hier geübten Logik

steht dieselbe noch auf dem Standpunkte, wo ihr die Fähigkeit zu urteilen als Endziel der Erkenntniss erscheint, unbekümmert darum, ob uns das Urteil einen Schritt weiter bringt, wo insbesondere von einer Definition nur gefordert wird, dass die irgend woher zusammengesuchten und ausprobirten Bedingungen alles unter den Begriff fallende ein-, alles andere ausschliessen, gleichviel ob sie mit der Bedeutung des Begriffes etwas zu tun haben oder ihr fremd sind. Der Begriff ist einem solchen Logiker nicht eine Errungenschaft, sondern ein vorgefundenes Stück, das er in Arbeit nimmt, wie der Chemiker das Fossil oder den Meteorstein. Bezeichnend in dieser Beziehung ist die Auslassung der Einleitung auf Seite III. Der Verfasser nennt es betrübend und entmutigend, dass schon errungene Erkenntnisse wieder verloren gehen, weil sich die Schuldoctrin mit ihrer „rohen" Auffassung des Zahlbegriffs begnügt und die von Herbart gegebene Richtigstellung als überflüssig bei Seite lässt, ein Schicksal das hiernach wol auch sein Untersuchungsergebniss treffen werde. Da der Verfasser dem Gedanken nicht Raum giebt, dass die angeblichen Verbesserer die Schuld ganz oder zum Teil selbst tragen, so muss hier an Folgendes erinnert werden, was die Erscheinung wol genügend erklären wird. In der Entwickelungsgeschichte der exacten Begriffe, die der Verfasser gänzlich ignorirt, lassen sich 3 Stadien unterscheiden: 1) bis zur objectiven Gestaltung der Vorstellungen und Begriffe, 2) bis zur Gewinnung exacter Fundamentalbegriffe, 3) von da an die Theorie bis zum heutigen Standpunkte umfassend. Jedes Stadium schliesst mit einer deutlichen, entschiedenen Leistung, die mit der Elimination aller der Merkmale verbunden ist, die im neuen Stadium ausser Anwendung kommen. Als hervorragende Beispiele mögen genannt werden im ersten Stadium die Elimination der ophthalmocentrischen Data bei Bildung des Körper- und Raumbegriffs, im zweiten die Elimination der individuellen Unterschiede bei Bildung des Gattungs- und Zahlbegriffes, durch welchen die articulirte Sprache bedingt ist, im dritten die Elimination des Grössenursprungs in Zahl und Ausdehnung bei Bildung der Begriffe der Analysis. Die Mathematik der Schule bewegt sich im dritten Stadium und setzt die Erzeugnisse des zweiten voraus, wenn auch der Unterricht vielleicht propädeutisch auf das zweite zurückgreift und in Definitionen und Axiomen das Erworbene formulirt. Was eliminirt ist, hat auf den Fortgang der zu lehrenden Theorie keinen Einfluss. Der Anfänger weiss, dass er Aepfel und Glockenschläge mit Hülfe derselben Begriffe (der abstracten 1, 2, 3, etc.) zählen kann, und begegnet beim Erlernen der Arithmetik keiner fundamentalen Lücke seines Wissens. Wenn nun Frege von ihm eine befriedigende Antwort auf die Fragen, was Einheit und was Zahl sei, verlangt, so sind wir doch gewiss ebenso berechtigt ihn zu fragen, was die von ihm geforderten

Urteile über Einheit und Zahl, wie er und Herbart sie geben, zur Bildung beitragen. Wenn Frege geltend macht, dass wir keine blossen mechanischen Rechner ausbilden wollen, so ist doch hinzuzufügen: auch keine Conversationslexika. Nicht bloss richtig, sondern auch instructiv müssten die Urteile sein sie müssten einen Schritt zum Ziele der Erkenntniss, nämlich dem Ziele, das Gegebene im Geiste zu beherrschen, enthalten, wenn der Tadel begründet sein sollte, dass die Schule — oder, um dem Verfasser nicht eine ihm ganz fremde Specialbeziehung zuzuschreiben — die intelligente Menschheit dargebotene Erkenntniss von sich weise und die Forschung vergeblich mache. Treten wir der Sache näher, so wird sich zeigen, dass der Verbesserer Punkt für Punkt, indem er eine vulgäre Vernachlässigung rügt, sich selbst einer weniger verzeihlichen schuldig macht. Die Frage, warum wir es nicht dabei bewenden lassen können, die Bedingungen des Fortschritts einer Fachwissenschaft, wie hier der Arithmetik, zu erfüllen, lässt er unberührt, obwol seine Ansicht darüber nicht so ganz gleichgültig sein würde. Es genügt wol anzuführen, dass die Theorie nicht den Inhalt des Geisteslebens ausmacht, und die Beziehungen der Wissenschaftszweige unter einander und zum Leben eine rückgängige Untersuchung ihrer Principien und damit das Studium der Erkenntniss überhaupt fordern. In diesem Sinne mag die Auffassung der Zahl, welche von der allgemeinen Erkenntnisslehre keine Notiz nimmt, eine rohe genannt werden. Indes verleihen doch der Beschränkung auf das dritte Stadium die unausgesetzten Erfolge eine gewisse Rechtfertigung. Der Logiker dagegen, welcher jene Vernachlässigung rügt und es betrübend und entmutigend nennt, nirgends Sinn für principielle Revision zu finden, und doch, wo es eben auf Gründlichkeit ankäme, seinerseits wieder das erste Stadium ignorirt, indem er nur den objectiven, fertigen Begriff, nicht aber seine Entwickelung und seinen Zweck der Betrachtung für wert hält, möchte schwerlich irgend welche Erfolge seiner logischen Doctrin aufweisen, die ihm keine Zeit liessen über die Grenzen des zweiten Stadiums weiter zurück zu gehen. Im Gegenteil hat diese doctrinäre Logik, deren Sätze aus roher Empirie hervorgehen, aber vom Autor für ewige Denkgesetze ausgegeben werden, weil er nicht anders denken kann, die also aus dem Unvermögen, statt auf ihre Incompetenz, auf die Gewissheit schliesst, nur mehr und mehr Schwierigkeiten gehäuft, statt sie zu lösen — vergl. das etwa 6 Seiten lange Resultat, welches Baumann aus seiner Zusammenstellung der Lehren der Philosophen über Raum und Zeit zieht. In der Tat nimmt sie den ungünstigsten Standpunkt ein, wo sie sich nach unten und nach oben den Blick verschliesst, und darum aller Orientirung entbehrt. Fand also der Verfasser in der Bestimmung des Zahlbegriffs eine Schwierigkeit, so war es zu-

nächst die, sich im Finstern nicht zu stossen. Der Arithmetiker empfindet sie nicht, weil er der Frage den Rücken zukehrt. Aber auch der begegnet keiner Schwierigkeit, welcher die Entwickelung des Begriffs von Anfang an verfolgt. Jedenfalls ist es sehr begreiflich, dass von keiner Seite eine Nachfrage nach der angeblichen Lösung stattfindet, wo sie von der einen leicht entbehrt, von der andern leicht vollständig gegeben werden kann.

Folgende Stelle der Einleitung p. V. scheint auf das Vorstehende Bezug zu haben. „— — Eine gründliche Untersuchung des Zahlbegriffs wird immer etwas philosophisch ausfallen müssen. Diese Aufgabe ist der Mathematik und Philosophie gemeinsam. Wenn das Zusammenarbeiten dieser Wissenschaften trotz mancher Anläufe von beiden Seiten nicht ein so gedeihliches ist, wie es zu wünschen und wol auch möglich wäre, so liegt das, wie mir scheint, an dem Ueberwiegen psychologischer Betrachtungsweisen in der Philosophie, die selbst in die Logik eindringen. Mit dieser Richtung hat die Mathematik gar keine Berührungspunkte, und daraus erklärt sich leicht die Abneigung vieler Mathematiker gegen philosophische Betrachtungen.“ Dies bestätigt zum Teil direct das Gesagte: der Mangel an Erfolgen der philosophischen Mitwirkung wird eingeräumt. Dass der behauptete Grund davon gerade der entgegengesetzte ist, legt jene unklare Begriffsmischung der doctrinären Logiker an den Tag, welche Mittel und Wege der Erkenntniss von ihrem Product nicht unterscheiden können. Allerdings hat die Mathematik als fertiges Product mit psychologischer Betrachtungsweise nichts zu tun; denn dass dasselbe vollkommen objectiv sei, ist eben die Forderung der Wissenschaft. Aber die ganze Arbeit, welche das Product schafft, die Wahl der Transformationen, die Bildung geeigneter Begriffe, die Beweise, überhaupt alles, was einen Zweck verfolgt, sind ihrer Natur nach psychische Vorgänge; wer darüber principiell und allgemein urteilen will, darf gegen die psychische Natur des Gegenstandes nicht blind sein, und das ist es doch, was der Verfasser mit der Abweisung der psychologischen Betrachtung schlechthin fordert. Der doctrinäre Logiker pflegt in der Täuschung befangen zu sein, er könne der Ueberzeugungskraft der Beweise bestimmte Formen der Schlüsse unterlegen. Er wird aber nicht gewahr, dass er sich auf das Allersubjectivste und noch dazu das Unwissenschaftlichste stützt: auf den Glauben an die unverstandene Wunderkraft der Schlussformen und auf seine eigene Unfähigkeit anders zu denken. Hat nun der Verfasser richtig bemerkt, dass die logischen Fragen in neuerer Zeit mehr und mehr psychologisch in Angriff genommen werden, so kann man wol zugeben, dass dies Untersuchungsgebiet dem rein theoretischen Arithmetiker ferner liegt als das der formalen Logik; nur er-

klärt der Umstand nicht, wie die dahin einschlagenden Arbeiten einem gedeihlichen Zusammenwirken hätten im Wege stehen können, wenn die formale Logik sich zu annehmbaren Leistungen fähig gezeigt hätte. Die Schuld an deren Unvermögen schiebt der Verfasser auf die, welche gar nicht daran beteiligt sind.

Nach der Einleitung beginnt die Schrift, nochmals einleitend, mit einer Erörterung der Begriffe „analytisch, synthetisch, apriori, aposteriori". Es ist dies ein Thema, welches gewohnheitsmässig vor jeder logischen Untersuchung behandelt zu werden pflegt, obgleich leicht zu bemerken ist, dass die betreffenden Fragen müssig aufgeworfen werden, indem im weiteren nichts darauf Bezug hat. Im Vorliegenden ist nur eine charakteristische Aeusserung zu erwähnen; zuerst die sehr richtige und sonst wenig beachtete Bemerkung: „Aus einzelnen Tatsachen folgt nichts". Hieraus aber schliesst der Verfasser: „Wenn man überhaupt allgemeine Wahrheiten (poetischer Ausdruck statt: richtige Sätze) anerkennt, so muss man auch zugeben, dass es solche Urgesetze gibt, die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind". Wie defect dieser Schluss ist, liegt am Tage: es fehlt jeder Grund der Ausschliessung weiterer Möglichkeiten. Was dem Bauer unbegreifliches begegnet, muss sein Kobold getan haben. Ebenso stellt sich die obige Aeusserung dar: die Urgesetze sind nur ein Name, der substituirt wird, wo die Erklärung fehlt. Was eine ganz einfache Betrachtung des Zugrundeliegenden ergibt, ist folgendes. Da der Mensch, ohne Wissen geboren, zu allgemeinen Erkenntnissen gelangt, und aus den erlebten Tatsachen nichts folgt, so muss es andre intellectuelle Tätigkeiten geben ausser dem Schliessen. Diese sind denn auch leicht aufzuweisen und bekannt genug: Ordnen, Scheiden, Combiniren, Setzen von Merkzeichen u. s. w. Sie behaupten nichts, sind daher unbestreitbar und bedürfen keines Beweises, führen aber zur Entdeckung ausschliessender Gegensätze, der Basis sicherer Schlüsse, zu der Orientirung, die vor Irrtum mehr schützt als alles andre. Wem es an Orientirung fehlt, dem ist selbst der Identitätssatz eine Quelle von Irrtümern.

Jetzt folgt die Kritik von Meinungen einiger Schriftsteller, zuerst über die Natur der arithmetischen Sätze. Hier, wo sich der Verfasser in der günstigen Lage befindet, ohne Verbindlichkeit für Berichtigung und Lösung nur Mängel fremder Versuche anzeigen zu müssen, zeigt er sich in den engen Grenzen der formulirten Fragen gut orientirt und lässt weder formell noch substantiell den gehörigen Einblick vermissen. Ein Zweifel bleibt nur, ob nicht eben diese Beschränkung eine Misdeutung des Autors enthält. Die erste Frage ist: Sind die Zahlformeln beweisbar? Dass der Beweis für $3+2=5$,

auf blosse recurrente Definition von 2, 3, 5 gestützt, eine Lücke enthält, wird keiner Einwendung begegnen. Wenn hingegen der Verfasser der Behauptung Mill's, dass die Definitionen der Arithmetik beobachtete Tatsachen enthalten, mit der Frage entgegentritt: welche beobachtete Tatsache in der Definition der Zahl 777864 behauptet wird; wenn er ferner es misslich nennt, einen grundsätzlichen Unterschied zwischen kleinen und grossen Zahlen zu machen, so scheint doch alles Verständniss für empirische Erkenntniss zu fehlen. Nehmen wir den Fall, jemand lese eine unendliche Reihe, welche wie oft geschieht durch Angabe der Anfangsglieder ausgedrückt ist; dann wird er in der Tat das millionste Glied auf Grund einer Beobachtung erkennen, aber nicht wie der Verfasser meint der analogen Beobachtung eben dieses Gliedes, sondern etwa des 2ten und 3ten Gliedes, so viele deren genügen das Gesetz des Fortschritts daraus zu entnehmen. Hier ist wirklich ein Unterschied zwischen kleinen und grossen Zahlen vorhanden; die Theorie ist davon frei, aber für ihre Basis ist dieses psychische Element unentbehrlich. Ebenso genügt die Beobachtung an kleinen, vorstellbaren Zahlen zur Entdeckung, dass zur recurrenten Begriffsbestimmung die Specialität der Zahl nicht mitwirkt, mithin zur Gewinnung eines Begriffs von unbegrenzter Ausdehnung. Da Frege, wie aus vielen Aeusserungen hervorgeht, kein Werden der Begriffe kennt, so ist ihm erklärlicherweise der Fall nicht in den Sinn gekommen, dass bei Bildung eines homogenen Begriffs zwischen Anfang und Vollendung ein heterogener Geistesact als notwendiges Glied eintreten, der einfache Begriff auf zusammengesetztem Boden stehen könne, obwol dieser Fall, wie z. B. bei der Function a^x, bekannt genug ist. Frege nennt es ein Vorurteil von Mill, dass alles Wissen empirisch sei. Nach seiner Logik ist es also ein Vorurteil, dass man erklären kann, was er als auf einem Urwissen beruhend unerklärt lässt: analog ist es dann auch ein Vorurteil der Baumeister, dass man Häuser bauen kann! Gewöhnlich aber spricht man von Vorurteil, wo eine Meinung der Erkenntniss hinderlich ist, und das trifft gewiss zu bei Frege's Meinung über die empirischen Wissenschaften, deren wesentliches logisches Organ er irrigerweise im Inductionsschluss sieht, denn diese hindert ihn von der erfolgreichen Logik der Empirie Kenntniss zu nehmen. Aus dem Mitgeteilten lässt sich nicht beurteilen, ob Mill eine richtigere Auffassung der Empirie besass; denn das Wesentliche darin würde doch bei der Wiedergabe unbeachtet geblieben sein. Dass Mill für jede Zahl eine besondere Beobahtung fordere, ist nur Frege's Conjectur aus unzureichenden Gründen, von Mill nicht ausgesprochen.

Die ferneren Fragen sind folgende: Sind die Gesetze der Arith-

metik inductive Wahrheiten? Sind sie syntheticch apriori oder analytisch? Die Fragen über die Anzahl lauten: Ist sie eine Eigenschaft der äussern Dinge? Ist sie etwas subjectives? Die über Einheit und Eins: Drückt das Zahlwort „ein" eine Eigenschaft von Gegenständen aus? Sind die Einheiten einander gleich? Ueberall leidet die Untersuchung bei aller Vielseitigkeit an demselben Mangel, an dem Ausserachtlassen der Genesis. Aus vielem Argumentiren kommt heraus, dass die Anzahl, soviel sie auch subjective Seiten zeigte, doch objectiv sei. Das war nun eigentlich durch die Existenz der Arithmetik vorher bekannt. Vermischt man aber mit diesem auf das dritte Stadium bezüglichen Urteile solche aus den frühern Stadien, so darf man sich nicht wundern, wenn manches unvereinbare zutage kommt. Ein Fall derart liegt vor, wo der Verfasser bei Abschluss der Kritik fremder Meinungen die restirende Schwierigkeit findet: wir müssten denselben zufolge den Einheiten zwei widersprechende Eigenschaften beilegen: die Gleichheit und die Verschiedenheit. In der Tat ist die Verschiedenheit im ersten Stadium notwendig als Motiv zum Zählen, im dritten die Gleichheit der Einheiten als Gegenstand der Theorie; die Verschiedenheit ist im resultirenden Begriff eliminirt, ein Widerspruch weder da noch hier vorhanden. Unter der Ueberschrift: „Lösung der Schwierigkeit" — werden zunächst folgende Urteile über die Zahl zusammengestellt, welche aus den vorhergehenden Betrachtungen stammen. Die Zahl ist nicht in der Weise wie Farbe, Gewicht, Härte von den Dingen abstrahirt, nicht in dem Sinne wie diese Eigenschaft der Dinge. Sie ist nichts physikalisches, aber auch nichts subjectives, keine Vorstellung. Sie entsteht nicht durch Hinzufügung von Ding zu Ding. Die Ausdrücke Vielheit, Menge, Mehrheit sind wegen ihrer Unbestimmtheit ungeeignet zur Erklärung der Zahl zu dienen. Die Abgegrenztheit, die Ungeteiltheit, die Unzerlegbarkeit sind keine brauchbaren Merkmale für das, was wir durch das Wort „Ein" ausdrücken. Wenn man die zu zählenden Dinge Einheiten nennt, so ist die unbedingte Behauptung, dass die Einheiten gleich seien, falsch. Dass sie in gewisser Hinsicht gleich sind, ist richtig aber wertlos. Die Verschiedenheit der Dinge ist sogar notwendig, wenn die Zahl grösser als 1 werden soll. Es ist ein Unterschied zwischen Eins und Einheit zu machen. Das Wort Eins ist als Eigenname eines Gegenstandes der mathematischen Forschung eines Plurals unfähig. Es ist also sinnlos Zahlen durch Zusammenfassen von Einsen entstehen zu lassen. Nach allen diesen negativen Merkmalen, denen keine problematische positive Bestimmung, d. h. Aussage, wozu der Begriff notwendig ist, was er leistet, gegenüber gestellt wird, erwartet man nun wenigstens die Erklärung des Verfassers, welche Stelle er selbst dem Begriffe zuerteilt, womit freilich auch nur eine neue Meinung aufgestellt wäre, während er

schlechthin eine Lösung versprochen hat. Aber diese Erklärung folgt nicht, sie scheint vergessen zu sein; denn nachdem die Schrift in Betrachtungen und Erwägungen noch einige Seiten fortgefahren hat, ist einmal, dann öfters von der Ansicht des Verfassers, als wenn sie vorher ausgesprochen wäre, die Rede. Soviel sich nun aus dem, was zu ihrer Verteidigung gesagt wird, entnehmen lässt, besteht die gedachte Ansicht darin, dass die Zahl als Merkmal am Gattungsbegriff haftet, so dass z. B. die Begriffe Jupitersmond, Angehöriger des deutschen Reichs sich verändern, wenn bzhw. ein fünfter entdeckt, ein neuer geboren wird — Beispiele die der Schrift entlehnt sind. Für diese Ansicht werden allerhand Bestätigungen zusammengesucht, ohne auch nur das Allerbekannteste zu erwähnen, womit sie im Widerstreit steht. Schon aus der Grammatik, wenn sie auf die logischen Verhältnisse etwas näher eingeht, ist bekannt, dass Gattung und Zahl zwei sich einander ergänzende Begriffe sind, deren Leistung durch ihre Sonderung, durch die Fähigkeit unabhängig von einander zu variiren bedingt ist. Dasselbe lehrt der gewöhnliche Gebrauch. In der Isolirung der Bestandteile, welche einzeln variiren können, liegt der Fortschritt der Erkenntniss, indem daraus der constante Bestandteil, der sich als dauernder Begriff festhalten lässt, gewonnen wird. Diesen Forschritt, und damit die ganze Bedeutung der Begriffe Gattung und Zahl macht der vorliegende Versuch zunichte. Erwähnt mag noch sein, dass der Verfasser die Null als diejenige Zahl definirt, welche einem in der Wirklichkeit nicht repräsentirten, vielleicht sogar unsinnigen Begriffe als Merkmal zugehört. Das Genannte wird wol zur Genüge gezeigt haben, dass der Verfasser sehr mit Unrecht die Arithmetiker getadelt hat, welche von seiner Belehrung keinen Gebrauch machen. Hoppe.

Der Grenzbegriff in der Elementar-Mathematik. Von Heinrich Vogt, Programm des Königl. Friedrichs-Gymnasiums zu Breslau 1885. 53 S.

In der Einleitung sagt der Verfasser, das Vorhandensein von Axiomen sei für die Elementarmathematik keine Schwierigkeit; denn der Anfänger könne begreifen, warum sie notwendig sind. Dagegen gebe es Schwierigkeiten in den Grundbegriffen, namentlich im Begriff der Grenze. Es ist schon auffällig, dass er den Doppelsinn dieses Wortes nicht gleich bei erster Nennung hebt, noch mehr aber, dass er wirklich in beiderlei Sinne von Grenze spricht, als ob es dieselbe Sache wäre, so dass man kaum umhin kann anzunehmen, das ihn der gleiche Terminus dazu verführt hat zwei ganz unähnliche Begriffe zu mischen. Dieser Umstand allein würde ihm Grund genug

geben können, Schwierigkeiten da zu finden, wo keine sind. Doch kommen weitere Denkfehler hinzu, die auch bei gehöriger Scheidung bestehen bleiben. In der Einleitung ist mit Grenze offenbar der Grenzwert gemeint. Gleich im Anfang des I. Abschnitts: „Die geometrischen Grundbegriffe" — handelt es sich um die Fläche als Grenze zwischen zwei Raumteilen. Der Verfasser versucht zu beweisen, dass die Grenzfläche undenkbar sei, begeht aber dabei einen so groben logischen Fehler, dass auch nicht ein Schein von Bündigkeit entsteht. Er fragt: Gehört die Grenze einem von beiden Raumteilen oder beiden oder keinem von beiden zu? — überflüssigerweise, denn dass sie beiden zugehört, ist jedermann geläufig; die andern Fälle sind wol nur zur Ablenkung der Aufmerksamkeit herbeigezogen. Beiden, sagt er, könnte die Grenze nicht zugehören, denn als verschiedene Raumteile könnten sie nicht etwas gemeinschaftliches haben. Wie will der Verfasser das jemandem einreden? Haben nicht zwei Brüder ihren Vater, zwei Löffel in einem Kasten diesen Kasten gemeinschaftlich? Hiernach scheint es, als ob der Verfasser Haben und Sein verwechselt. Oder sollen wir vielleicht Unausgesprochenes ergänzen? Hat er etwa mit Zugehören gemeint: als Teil zugehören? Dann würde man sogleich antworten: Die Fläche ist kein Teil eines Raumes; wer ihren Begriff erklären will, darf ihn nicht subsumiren wollen, denn wenn das gienge, so wäre der Flächenbegriff unnütz, und das widerlegt die Geometrie. Um den Eindruck der angeblichen Schwierigkeit noch zu erhöhen, wird weiterhin angeführt, dass die Fläche 2 Seiten hat. Wahrscheinlich verwechselt hier der Verfasser Haben mit In- sich- enthalten; denn sonst sieht man nicht, welche Schwierigkeit er meinen kann. Nachdem sich nun der Verfasser aus einfachen und leicht vorstellbaren Begriffen durch allerhand Vermischungen und Verwechselungen ein recht trübes Medium geschaffen hat, nimmt er Anlass, die scheinbare Oberfläche der aus getrennten Atomen bestehenden Körper in Vergleich mit der ideellen Fläche zu besprechen. Hierauf weiter einzugehen ist unerquicklich, solange die klare logische Basis fehlt. Sehr verschieden von diesem ersten Abschnitt ist der zweite, betitelt: Das Messen und die Irrationalzahl. Zwar beruht auch hier die vermeintliche Schwierigkeit auf einem logischen Fehler, doch beschränkt sich dessen Einfluss auf einige Urteile, während im übrigen die Darstellung die Klarheit nicht vermissen lässt und viel instructives darbietet. Mit gehöriger Umsicht und durchweg treffend wird erst die Aufgabe discutirt, die stetige Grösse durch die Zahlgrösse zu decken. Die Darstellung lässt so lange nichts vermissen, bis (auf Seite 34) der Verfasser in den bekannten, oft gerügten und doch leicht zu berichtigenden Fehler verfällt, die variabele Grösse ihrem Grenzwert gleich zu setzen, indem er sagt; der Begriff der Gleichheit müsse erweitert

werden. Der Fehler entspringt aus dem Vorurteil: Wir dürfen die Wahrheit nicht aussprechen, wo sie unserm Zwecke zuwider ist. Sagen wir, jene Grössen seinen ungleich, so kommen wir erst nach unendlichem Process, d. h. nie zum Ziele. In diesem Irrtum ist der Verfasser, und mit ihm Viele, stecken geblieben. Sie haben vergessen zu fragen: Was ist eigentlich unser Zweck? Nirgends wird die Gleichheit jener zwei Grössen gefordert, sondern stets die Gleichheit zweier Constanten, welche, wie leicht zu beweisen, aus der unendlich kleinen Differenz beider gegen die variabele Grösse folgt. Unter den Schriftstellern indes, welche an dem Irrtume beteiligt sind, unterscheidet sich Vogt durch die für den Leser angenehmere Auskunft, indem er denselben mit allen Versuchen aus der selbstgeschaffenen Schwierigkeit herauszukommen verschont, und die Frage mit der sogenannten Begriffserweiterung der Gleichheit für erledigt ausgibt; nur scheint ihm die Theorie der Grenzwerte nicht auf gleicher Stufe der Klarheit mit der Euklidischen Lehre zu stehen. Dieser Umstand führt ihn auf die Bemerkung, dass Euklid sichtlich alle Infinitesimal-Betrachtungen vermeidet, und auf das, was sie erfordert, verzichtet, während Archimedes die Infinitesimal-Frage durch die Exhaustionsmethode in Angriff nimmt. Nachdem dies eingehend dargelegt, schliessen sich pädagogische Folgerungen an. Der Verfasser befürwortet das Festhalten an der Euklidischen Beschränkung im Bereich der Schuldoctrin. Wo das Unendliche unentbehrlich sei, solle man es auf ein Minimum reduciren. Dem aber setzt er ohne alle Zwischenstufen nur das Betreiben der Differentialrechnung auf der Schule entgegen. Wenn man nun auch mit dem Ausschluss der letztern recht einverstanden sein kann, so liegt der Grund doch am allerwenigstens im Infinitesimalbegriff als solchem, sondern in seiner Complication mit dem Functionsbegriff, der die höhere Mathematik von der Schuldoctrin scheidet. Der Infinitesimalbegriff selbst hingegen und seine einfachern Anwendungen, wie sie in der Elementar-Mathematik ihre Stelle finden, sind so leichtfasslich, dass sie der Klarheit und Strenge keinen Abbruch tun. Gerade im Gegensatz zu dem, was Vogt rät, müssen wir fordern, dass, wo solche Anwendungen stattfinden, auch die ausdrückliche Erklärung nicht fehlt, und dass die Erklärung von dem genannten Fehler frei ist, Variabele und Grenzwert gleich zu setzen oder auf einen unendlichen Process zu verweisen, ferner dass alle symbolischen od.r abgekürzten Redeweisen, die das Unendliche betreffen, aus dem Elementarunterricht verbannt werden. Dann ist gerade die häufige Anwendung, nicht die Beschränkung auf ein Minimum dem Verständnisss günstig.

Hoppe.

Vermischte Schriften.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira, Professor de mathematica na universidade de Coimbra, Socio correspondente da Academia Real das sciencias de Lisboa e da Sociedade de sciencias physicas e naturaes de Bordeaux. Volume V. Coimbra 1883.

Der Inhalt des 5. Bandes ist folgender.

J. A. Martins da Silva: Note über die Unabhängigkeit der Nullwerte der Jacobi'schen Function von normalen Abel'schen Integralen erster Gattung. — Ueber eine Formel bezüglich auf die Theorie der elliptischen Functionen.

B. H. Note über ein Problem der rationalen Mechanik.

A. F. Rocha Peixoto: Ueber die homologischen Trieder.

Duarte Leite Pereira da Silva; Ueber einige bestimmte Integrale.

C. le Paige: Homographien und Involutionen höherer Ordnungen.

L. F. Marecas Ferreira: Ueber die trinomischen Gleichungen.

G. C. Lopes Banhos: Geometriche Bestimmung der Trägheitsmomente der Rotationskörper.

A. Schiappa Monteiro: Untersuchungen bezüglich auf den variabeln Kreis, welcher 2 gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet.

F. Gomes Teixeira: Lösung der Aufgabe 23. Summation der Reihe:

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{kx}{e^{kx}+1} \quad \text{wo} \quad k = 2^i$$

H.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm 1885. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der Inhalt des 5. Bandes ist folgender.

C. J. Malmsten: Ueber die Formel:

$$hu_x' = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u_x' + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta u_x'' - \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}\Delta u_x^{IV} + \text{etc.}$$

E. Phragmén: Beweis eines Satzes aus der Mannichfaltigkeitslehre.

L. Scheefer: Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven. — Zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen.

H. Krey: Einige Anzahlen für Kegelflächen.

E. Goursat: Ueber eine Classe von Doppelintegralen.

E. Picard: Ueber die unbestimmten ternären quadratischen Formen zu conjugirten unbestimmten und über die entsprechenden hyperfuchsischen Functionen.

C. Le Paige: Neue Untersuchungen über die Flächen 3. Ordnung.

H. G. Zeuthen: Ueber die einer kubischen Fläche eingeschriebenen Pentaeder.

H. Schroeter: Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.

H. Poincaré: Abhandlung über die zetafuchsichen Functionen.

Ch. Hermite: Ueber einige arithmetische Folgerungen aus den Formeln der Theorie der elliptischen Functionen.

W. Fiedler: Ueber die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen. H.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Naturkunde. Tweede reeks. Negentiende, twintigste deel. Amsterdam 1884. Johannes Müller. 441 + 452 S.

Der 19. und 20. Teil enthalten folgende mathematische Abhandlungen:

T. J. Stieltjes: Ueber die quadratische Zerlegung von Primzahlen der Form $3n+1$. (19).

C. le Paige: Ueber die Flächen 3. Ordnung. (19).

F. de Boer: Erweiterung des Satzes von Rolle. (19). — Discussion der allgemeinen Gleichung 4. Grades. (20).

P. H. Schoute: Ueber eine specielle Curve 4. Grades mit 3 Doppelpunkten. (19).

J. A. C. Oudemans: Das Problem des Snellius aufgelöst von Ptolemaeus. (19).

D. J. Korteweg: Ueber die Bahnen beschrieben unter dem Einfluss einer centralen Kraft. (20).

G. J. Michaëlis: Ueber die Theorie der Federkraft-Nachwirkung. (20).

D. Bierens de Haan: Baustoffe für die Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften in den Niederlanden. (19. 20.). H.

Litterarischer Bericht
VIII.

Lehrbücher.

Leitfaden zum Unterrichte in der Arithmetik und Algebra an Gymnasien und verwandten Anstalten. Von Dr. Joh. Chr. Walberer, Professor am königlichen Gymnasium in Amberg. Zweite, durchgesehene und mit Uebungsaufgaben versehene Auflage. München 1884. Theodor Ackermann. 152 S.

Die erste Auflage ist im 241. litt. Bericht, S. 4. besprochen. Das Buch steht auch noch jetzt auf dem niedrigsten didaktischen Standpunkt. Die Sätze der Arithmetik werden nur als Auswertungsregeln aufgefasst, und selbst in diesem Sinne bleiben die Erklärungen defect. Die Division ist nur als Messung durch wiederholte Subtraction, nicht aber als Teilung erklärt. Sollte man nach der gegebenen Regel 4 Meter durch 4 dividiren, so hätte man die abstracte 4 so oft davon zu subtrahiren bis kein Rest bleibt. Dass auch sinnlose Aufstellungen, wie $\frac{a}{0} = \infty$, vorkommen, kann kaum auffallen, wo die ganze Behandlungsweise auf gedankenloses Rechnen abzielt.

H.

Leitfaden für den Anfangsunterricht in der Arithmetik an höheren Lehranstalten. Von Prof. H. Köstler, Oberlehrer am Domgymnasium zu Naumburg a. S. Zweite, vermehrte und teilweise umgearbeitete Auflage. Halle a. S. 1885. Louis Nebert. 42 S.

Der Leitfaden enthält auf 15 Seiten diejenigen Sätze, welche der Anfänger erlernen muss, um mit den 4 Species der Buchstabenrechnung vertraut zu werden, nebst Andeutung der Beweise. Die

Formulirung ist deutlich und correct. Was die Grenzen des Lehrstoffs betrifft, so ist die Bedeutung der Buchstaben auf positive ganze Zahlen beschränkt, die algebraische Division nicht zugezogen. Dagegen ist die Rechnung mit algebraischen Summen nicht, wie im Vorwort angegeben, ausgeschlossen, vielmehr + und — als Operations- und Vorzeichen eingeführt, und alles dafür nötige erklärt und in Uebung gebracht. Auch die Addition der Brüche fehlt nicht, und ist in einem Anhang zur Bildung der Generalnenner Anleitung gegeben. Ein zweiter Anhang betrifft die Decimalbrüche. Unrichtig ist in dem Buche nur die anfängliche Definition des Begriffs Rechnen, die mit allem was folgt im Widerspruch steht. Aus zwei oder mehrern Zahlen nach gewissen Regeln eine neue bilden nennt in praxi niemand rechnen, auch im folgenden der Verfasser nie. Vielmehr entsteht durch diesen Act erst ein Rechnungsausdruck, enthaltend eine Rechnungsaufgabe, die unter Umständen ausgeführt werden soll oder kann. Das letztere heisst hier stets ausrechnen, und ein anderes Rechnen kommt nicht vor. Den noch grössern übrigen Teil des Buchs bildet eine Zusammenstellung von 357 Aufgaben zur Einübung der vorher behandelten Rechnungsweisen, nach diesen geordnet.

H.

Vorschule der Geometrie. Von Prof. H. Köstler, Oberlehrer am Domgymnasium zu Naumburg a. S. Dritte, vermehrte und teilweise umgearbeitete, und vierte, verbesserte Auflage. Mit 49 in den Text gedruckten Holzschnitten. Halle a. S. 1884. 1885. Louis Nebert. 24, 21 S.

Diese Vorschule besteht aus 2 Teilen, der Formenlehre und der Constructionslehre. Der actuellen Abfassung nach stellen sich beide als Auswahl aus dem Lehrstoff der elementaren Geometrie ohne merklich verschiedene Gestaltung dar. Die Formenlehre macht den Schülern mit den Gegenständen der Doctrin, also mit den einfachen Gebilden und den gebräuchlichen Festsetzungen bekannt, wendet dazu jedoch auch nur die gleichen Definitionen und Worterklärungen an. Der Verfasser betrachtet als Aufgabe der Formenlehre, den Schüler von der sinnlichen Anschauung zur Abstraction der begrifflichen Erklärung emporzuführen, die Aufstellungen des Buchs als die blossen Resultate, deren Erreichung dem Lehrer überlassen bleibt. Sowol die zu befolgende Methode als auch die Art der Tätigkeit der Schüler wird unbestimmt gelassen. In der Constructionslehre ist letztere von selbst deutlich. Sie soll den Gebrauch von Lineal und Zirkel einüben, es sind zu diesem Zwecke die einfachsten Elementaraufgaben ausgewählt. Am Schluss werden zur Formenlehre Fragen, zur Constructionslehre Aufgaben gestellt. H.

Lehrbuch der ebenen Geometrie. Von Julius Hoch, Lehrer für Mathematik an der von Grossheim'schen Realschule in Lübeck. I. Teil: Linien, Winkel, Kongruenz und Gleichheit der Figuren. Mit 126 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Halle 1884. H. W. Schmidt. 164 S.

Oberster Gesichtspunkt der Abfassung und Motiv zur Herausgabe eines neuen Lehrbuchs ist erklärtermassen die systematische Anordnung des Lehrstoffs. Diese tritt auch in der Tat in einer weiter als gewöhnlich gehenden Gliederung, Nebenstellung der sich ausschliessenden Gegenstände und stufenweisen Folge der einzelnen, jedesmal ganz erledigten Themata deutlich an den Tag. Ob es nun Ansicht des Verfassers sei, dass der Unterricht nach einem so bearbeiteten Lehrbuche, mit Hintansetzung anderer Gesichtspunkte, namentlich der logischen Verknüpfung, dem pädagogischen Zwecke genüge, ist im Vorwort nicht ausgesprochen; doch darf man wol annehmen, dass er sein Buch nicht zu blosser Ergänzung anderer Lehrbücher hat herausgeben wollen. Eine Geringschätzung des logischen Gesichtspunkts ist hier freilich am aufgewandten Fleisse nicht zu bemerken: die Beweise sind stets in extenso und in vorschriftsmässiger Form gegeben; dagegen steht ein principieller Mangel dem logischen Verständniss im Wege. Es ist gesagt, dass der Winkel zur Bestimmung des Richtungsunterschiedes dient, aber nicht, wie dies geschieht. Vom Zusammenlegen der Winkel, ihrer Addition und Messung, von der Vergleichung der Richtungen bei verschiedenem Ausgangspunkt ist nirgends die Rede. Das auf dem Winkelbegriff ruhende Dunkel zieht sich dann durch alle Sätze, die mit Winkeln zu tun haben, fort, und der logische Faden lässt sich nirgends verfolgen. Die Anordnung der Gegenstände ist folgende: zuerst nach den Gebilden: Linien, Winkel, Figuren. Die 2 Hauptabschnitte über die Figuren behandeln die Congruenz und die Gleichheit, ersterer nach der Reihe das Dreieck, das Viereck, das Vieleck, den Kreis, letzterer das Dreieck, Parallelogramm und Trapez nach Höhe und Grundseite, bei Uebereinstimmung in beiden, in einem und in keinem, die Summe, die Verwandlung und Teilung, die Flächenmessung. Dann folgen Uebungssätze, Aufgaben und Constructionen. H.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Von Dr. E. Glinzer, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Erster Theil: Planimetrie mit 185 Figuren und einer Sammlung von 250 Aufgaben. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Hamburg 1884. F. H. Nestler u. Melle. 111 S.

Die erste Auflage ist im 258. litt. Bericht S. 19. besprochen. In der zweiten kommt hinzu ein Anhang über harmonische Teilung.

Die Uebungssätze und Aufgaben sind vermehrt und insbesondere dafür gesorgt, die schwierigeren Aufgaben durch leichtere vorzubereiten. Ferner unterscheidet sich die neue Auflage durch manche Zusätze und Erweiterungen. In der Proportionslehre wird der Fall der Incommensurabilität erwähnt, und die Gültigkeit eines Satzes für denselben in einem Zusatz ohne Beweis ausgesprochen, doch findet er weder verständliche Erörterung noch theoretische Berücksichtigung.

H.

Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und höhere Lehranstalten. Von Dr. F. W. Fischer, Oberlehrer am Gymnasium zu Kempen. Erster Teil: Planimetrie. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Freiburg i. Br. 1884. Herder. 184 S.

Der Inhalt des Buches ist kein abgeschlossener. Obgleich der Lehrgang von seiner Aufgabe der Entwickelung der Grundlagen der Doctrin nie abweicht, so begrenzt er sich doch nach keiner Seite hin auf ein bestimmtes Quantum des Notwendigen, sondern zieht im weitern Fortschritt mehr und mehr Themata und Fragen nach dem Gesichtspunkt des Interesses der Schüler in den Kreis der Betrachtung. Besonders zu nennen sind etwa die Transversalenlehre, Fragen über Maxima, Pol und Polare am Kreise, harmonische Teilung u. a. Die Methode steht auf Euklidischem Boden. Die Darstellung ist ausführlich und darauf eingerichtet dem Schüler als Muster zu dienen. Nicht ausführlich genug ist der Anfang der Lehre von den Winkeln. Der Winkel war durch seine Entstehung erklärt. Zur exacten Auffassung mussten die Consequenzen der Erklärung für die fertig vorliegenden Winkel, d. h. die Sätze über Addition und Grössenvergleichung der Winkel ausgesprochen werden. Unter dem Parallelensatz steht ganz unzutreffend: „Beweis“ — denn es folgt dann nur die wiederholte Behauptung des Satzes in anderer Form. Die Elementaraufgaben sind von den Lehrsätzen getrennt. Ausser ihnen folgen auf jeden Abschnitt viele Aufgaben und Sätze zur Uebung.

H.

Leitfaden für den Unterricht in der Stereometrie mit den Elementen der Projektionslehre. Von Dr. Carl Gusserow, Oberlehrer am Dorotheenstädtischen Realgymnasium in Berlin. Berlin 1885. Julius Springer. 96 S.

Die Lehrmethode dieses Leitfadens ist durchaus originell. Sie unterscheidet sich von der gewöhnlichen durch die anfängliche Ein-

führung und unausgesetzte Anwendung des Projectionsbegriffs. Derselbe dient grösstenteils zur Deduction, während die resultirenden Sätze davon unabhängig auftreten; doch gibt es ausser den Sätzen, welche die Projectionen an sich betreffen, auch Sätze über Raumgebilde, die mit Anwendung des Begriffs formulirt werden; jedenfalls scheint nicht zum Ziele genommen zu sein, die erzeugte Mannichfaltigkeit der Betrachtung, wo sich dies nicht von selbst vollzieht, zu einer einheitlich constanten hinzuführen. Die hier eingeführten Projectionen sind Parallelprojectionen in beliebiger Richtung auf beliebige Ebenen, nicht aber auf feste, gemeinsame Grundebenen, sondern auf solche, die zur Figur gehören. Der Begriff ist also ein ganz flüssiger, beweglicher auf einem Felde von doppelt unendlicher Mannichfaltigkeit. Fragt man nun: kann ein Schüler auf dem so eröffneten Felde der Betrachtung in dem kurzen Laufe des elementaren stereometrischen Lehrcursus orientirt werden und einigermassen einen Ueberblick gewinnen? — so muss man dies wol entschieden verneinen. Nur der Lehrer macht sich seine Aufgabe durch diese Methode leicht, die Schüler werden ganz abhängig von seiner Führung. Dass der bezeichnete Missstand nicht grössere Ausdehnung annehmen kann, bewirkt in der vorliegenden Gestaltung der Doctrin die Reihe feststehender Sätze. Wäre das Ganze so in den Projectionsbegriff verwebt, wie der Anfang, so würde alles Wissen wie an schwimmenden Strohhalmen hangend erscheinen. Der Verfasser empfiehlt die Methode damit, dass sie die zu starken Anforderungen an das Vorstellungsvermögen, welche der Uebergang von der Planimetrie zur Stereometrie auferlegt, durch Vermittlung mildere, indem anfänglich nie mehr als zwei Ebenen in gegenseitiger Lage betrachtet werden. Ausserdem seien manche Vorteile damit verbunden: es werden weniger Figuren erfordert, und die Beziehung der elementaren Stereometrie zur Projectionslehre wirkt vorbereitend für letztere. Rechnen wir beide Vorteile zu dem mancher Erleichterung der Deduction hinzu, so wollen wir das Unternehmen als einen beachtenswerten Versuch der Verbesserung der Methode gern anerkennen; nur müssen wir das, was bisher mit gutem Grunde als Norm gegolten hat, aufrecht halten, dass nämlich alle zur Theorie gehörigen Sätze absolut und ohne Beziehung zu willkürlicher Betrachtung aufgestellt werden. Letzterer kann nur die Bedeutung eines Hülfselementes eingeräumt werden, wie sie den Hülfslinien zukommt. Hier hingegen erscheint der Einführung zufolge die Projection als wirklicher Lehrgegenstand. Noch ist als charakteristisch zu erwähnen, dass den Körpern, den eben- und krummflächigen, insbesondere ihrer Inhaltsbestimmung, eine recht eingehende Behandlung zuteil wird. Auch die Schwerpunkte, rein geometrisch erklärt, bilden einen besonderen Gegenstand. Nach der Einleitung sind die Hauptabschnitte: die Stellung der Ge-

raden zur Ebene; die Lage zweier, dann mehrerer Ebenen zu einander; Polyeder; krummflächige Körper; Schwerpunkt. Der Anhang enthält: das Pyramidenproblem; den Euler'schen Satz und die regelmässigen Polyeder; 2 Lehrsätze. H.

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Von Dr. Th. Spieker, Professor am Realgymnasium zu Potsdam. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Potsdam 1885. Aug. Stein. 134 S.

Das Buch zeigt keine wesentlichen Verschiedenheiten von den gewöhnlichen gleichen Inhalts. Es gibt vollständig das Notwendige und dieses mit Fleiss und Geschick bearbeitet. Die Einleitung enthält die Geschichte der Entstehung der Trigonometrie. Die goniometrischen Functionen werden am rechtwinkligen Dreieck, dann am Kreise erklärt, zuerst als 6 coordinirte, dann in gegenseitiger Beziehung. Nun folgt die Berechnung des rechtwinkligen, dann gleichschenkligen Dreiecks, dann regelmässigen Vielecks, hierauf erst die Additionsformeln mit allen Consequenzen und ihrer Anwendung, dann die Berechnung des beliebigen ebenen Dreiecks, der Vierecke und Vielecke, dazu einige Aufgaben. Die Herleitung der sphärisch trigonometrischen Formeln ist die gewöhnlihhe mit Hülfe des Polardreiecks; hierzu gleichfalls einige Aufgaben. Dann folgen die Formeln über den um- und einbeschriebenen Kreis und den Inhalt des sphärischen Dreiecks, nebst Uebungen. H.

Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. Von Adolf Sickenberger, Professor am k. Maximiliansgymnasium in München. Dritte, umgearbeitete Auflage. München 1885. Theodor Ackermann. 188 S.

Die erste Auflage ist im 288. litt. Bericht S. 33, die zweite im 247. l. B. S. 24. besprochen. Aenderungen in der gegenwärtigen sind nicht angegeben. H.

Lehrbuch der Mathematik. Für den Schul- und Selbst-Unterricht bearbeitet von Dr. Hermann Gerlach, Oberlehrer am Friedrich-Franz-Gymnasium in Parchim. Zweiter Teil. Elemente der Planimetrie. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 134 Figuren in Holzschnitt und 682 Uebungssätzen und Aufgaben. Dessau 1885. Albert Reissner. 158 S.

Die vierte Auflage ist im 245. litt. Bericht S. 6. besprochen. Veränderungen in der neuen Bearbeitung betreffen die Entfernung

eines Punkts von einer Geraden, die gleichschenkligen Dreiecke, die Tangentenvierecke, die Berührung zweier Kreise, die Kreisfläche, das Product zweier Strecken, die proportionirten Linien, die harmonischen Strahlen, die Polaren und die Chordalen. In der Aufgabensammlung sind die 67. und 68. Aufgaben durch neue ersetzt.

H.

Die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse, Proportionen und Progressionen mit Anwendung auf die Zinseszins- und Rentenrechnung (Kursus der Obersekunda des Gymnasii) für den Schulgebrauch bearbeitet von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. Rostock 1885. Wilh. Werther. 44 S.

Das Lehrbuch behandelt in exact euklidischer Form (Definition, Lehrsatz, Beweis, Zusätze, nachfolgende Erläuterungen und Beispiele) nach einander: die arithmetischen Verhältnisse und Proportionen, die geometrischen Verhältnisse und Proportionen, arithmetische Progressionen I. Ordnung, höhere arithmetische Reihen, darunter die figurirten Zahlen, dann die geometrischen Progressionen, nebst Begriff und Kriterien der Convergenz für arithmetische und geometrische Reihen, zuletzt die Zinseszinsrechnung und Rentenrechnung. Es wird vorausgesetzt die Kenntniss der 7 Elementaroperationen und der Gleichungen 1. Grades.

H.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst vielen Uebungsaufgaben. Für Lehrerseminarien und höhere Bürgerschulen, sowie für den Selbstunterricht bearbeitet von A. P. L. Claussen, Königl. Seminarlehrer in Bütow. Potsdam 1884. Aug. Stein. 240 S.

Norm der Abfassung des Buches scheint zu sein, dass sich der Lernende nicht zu sehr mit Denken anstrenge und lieber auf dem Umwege manches Irrens und Missverstehens mit der Zeit zum Ziele gelange. Für die Geistesbildung des einzelnen Autodidakten würde letzteres gewiss kein Schade sein. Erwägt man aber, dass ein Missverständniss, ehe die Klärung eintritt, sich vom Buche auf Hunderte von Seminaristen, von jedem wieder auf Tausende von Kindern übertragen kann, so können uns die Folgen eines ungenauen Ausdrucks doch nicht so gleichgültig sein. Der Vortrag beschränkt sich zum grossen Teil auf blosse kategorische Mitteilung dessen, was dem Rechner geläufig ist. Die Aufstellungen sind bis auf weniges concinn und richtig, obwol mehr in familiärer Sprache ausgedrückt. Sollte ein Leser einen Satz wie den: Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die 3 letzten Ziffern es sind — so verstehen, es müssten die 3 letzten

Ziffern 0 oder 8 sein, so möchte der Irrtum geringfügig scheinen. Schlimmer ist jedenfalls die falsche Aussage, $\frac{a}{0}$ sei unendlich, über deren Sinn es dem Leser nicht verwehrt wird sich Gedanken zu machen, welche er will. Im Verhältniss zu der hier vorausgesetzten niedrigen Entwickelungsstufe des Denkens ist nun der Umfang des Lehrstoffs sehr gross. Er erstreckt sich auf Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, die algebraischen Gleichungen bis zum 3. Grade, diophantische Gleichungen, arithmetische und geometrische Progressionen, Exponentialgleichungen und Zinsrechnung. Uebungsaufgaben sind reichlich beigegeben. H.

Leitfaden der Physik. Von R. H. Hofmeister, Professor an der Kantonschule und ausserordentlicher Professor an der Hochschule in Zürich. Vierte Auflage. Zürich 1884. Orell Füssli u. Co. 195 S.

Das Buch zeigt eine ungemeine Vielseitigkeit, Umsicht und Beherrschung des so vielteiligen, verschiedenartigen Stoffs. Die Abfassung ist so abgekürzt als es ohne Uebergehung irgend eines wichtigen Punktes möglich ist. Jeder Punkt wird eben nur berührt; doch sind die Angaben hinreichend und deutlich, um den Lehrer an alles zu erinnern, was zu erörtern und zu berücksichtigen ist. Es wird uns durch das Buch das Bild einer empirischen Wissenschaft entfaltet, deren Begriffe nicht aus ideellen Principien auf den Gegenstand übertragen, sondern durch die Erfolge der in alle Erscheinungen eindringenden Specialuntersuchungen als feste Haltpunkte gewonnen worden sind, einer Wissenschaft also, welche die Natur nach deren eigener Anleitung zu beherrschen strebt. Wenn je dem Schulunterricht in der Physik die Fähigkeit zugeschrieben worden ist, zur allgemeinen, innern Bildung beizutragen, so kann ihm wol die unersetzliche Stelle darin zuerkannt werden, dass er die Idee einer wissenschaftlichen Empirie erzeugt. Dazu ist aber erforderlich, dass der Schüler, wenn gleich auf viel kürzerem Wege als die Entdecker, mit den Elementen der Empirie vertraut wird, um erst zu lernen für geringen Zuwachs an Realerkenntniss dankbar zu sein, ehe er über die höchsten Resultate der Forschung mitzusprechen anfängt. Aus diesem Geiste scheint auch der vorliegende Leitfaden bearbeitet. Die Erklärungen, auch wenn sie von weiterer Bedeutung sind, schliessen sich meist an die besondern Gegenstände an. Die Hauptteile sind: Physik der Materie, Physik des Aethers; die Gegenstände des ersten, d. i. der Mechanik: Wirkungen der äussern, der innern Kräfte, Wellenbewegung, Akustik. Unter diesen vertritt der zweite die Statik, die 2 letzten die Dynamik der Elasticität, während beim ersten Gleichgewicht und Bewegung die unterste Abteilung bilden.

Die in der Mechanik behandelten Themata beruhen auf Auswahl. Eine Beschränkung auf Anwendung der Schulmathematik lässt sich nicht als massgebend betrachten, sonst hätte manches Thema ausgeschlossen werden müssen, wo doch qualitative Aufstellungen und quantitativ vergleichende Gesichtspunkte sich verständlich geben liessen. Die Physik des Aethers enthält: Wärmelehre, Optik, Reibungselektricität, Galvanismus, Magnetismus, Wirkungen zwischen Strömen und Magneten, Elektromagnetismus, Induction, Thermoelektricität, tierische Elektricität. H.

Lehrbuch der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen. Im Auftrage der Königlichen Kommission für gewerbliche Fortbildungsschulen in Württemberg ausgearbeitet von Dr. Ludwig Blum, Professor an der K. Realanstalt in Stuttgart. Dritte, vermehrte Auflage, bearbeitet von Richard Blum, Professor am K. Lyceum in Esslingen. Leipzig 1885. C. F. Winter. 539 S.

Der Verfasser hat zu gleichzeitigem Gebrauche zwei Bücher herausgegeben, deren eines er bei sonst gleichem Titel „Grundriss", das andere „Lehrbuch" nennt. Ersteres, im 241. und 260. litt. Bericht bzhw. S. 10. und S. 41. besprochen, ist für den Gebrauch der Schüler, letzteres für den Gebrauch des Lehrers bestimmt. Der Vortrag des Lehrbuchs, geteilt in 44 geschlossene Themata, jedes für 1 Stunde berechnet, ist gleichmässig pragmatisch beschreibend, Erscheinung, Erklärung, Gesetze werden in populärer Breite für jeden einzelnen Gegenstand vorgeführt, reichlich durch eingelegte Figuren unterstützt, ohne je den Gedanken einer einheitlichen Theorie anzuregen. So ist z. B. von Beharrung, Centrifugalkraft, Tangentialkraft die Rede, als wenn jedes eine Sache für sich wäre. Manches im Buche nimmt Bezug auf gewerbliche Anwendung; doch selbst dieses geht nur auf Mitteilung von Wissen, nicht aber auf Ausbildung von Fähigkeiten aus. Im ganzen lässt sich kein rechtes pädagogisches Ziel erkennen. H.

Sammlungen.

Aufgaben aus der Stereometrie und Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von K. Jüdt, k. Professor und Rektor der Realschule in Ansbach. Dritte, vermehrte Auflage. Ansbach 1885. Fr. Seybold. 56 S.

Das Buch enthält Uebungsmaterial für den Unterricht in der Stereometrie und Trigonometrie, welches auch für descriptive Geometrie

zu verwenden sein soll, was sich indes nur auf die ersten 28 Aufgaben beziehen kann. Alle übrigen sind Rechnungsaufgaben, und zwar fordern die nächsten 205 Berechnung von Bestimmungsstücken von Körpern. Die folgenden 96 Aufgaben sind goniometrisch, die noch übrigen 76 teils unmittelbar trigonometrisch, teils geometrisch aufgestellt und mit Trigonometrie zu lösen. Die Resultate stehen am Schluss. H.

Tabellen.

Saggio di tavole dei logaritmi quadratici del Co. Antonino di Pampero. Udine 1885. G. B. Doretti e Soci. 55 S.

Quadratische Logarithmen, bezeichnet durch Lq, sind Logarithmen von Logarithmen, definirt durch

$$LqN = x; \qquad N = a^{2^x}$$

Sie sollen die Potenzirung unmittelbar auf Addition zurückführen. Zum Gebrauch dieser Function hat der Verfasser 2 Tafeln berechnet. Die erste gibt auf 1 Seite für jeden Exponenten E, mit dem man potenziren will, den Wert von $\frac{\log E}{\log 2}$. Die zweite hat 15 Columnen überschrieben E, Lq, N_0, N_1, N_2, ... N_{12}, und zwar ist N_{10} die gegebene Zahl, die folgenden stehen dazu in der Beziehung:

$$N_k = N_{k-1}{}^2$$

Natürliche Reihenfolge findet man in der Columne N_{10}, welche von 10 beginnt und durch die Zehntel bis 100 fortschreitet; darüber hinaus geht dann die Columne N_9 von 10 durch die Hundertel bis 11. Ein Anhang gibt die Tafel der Exponenten für die Basen 2 bis 50. H.

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln von Dr. E. F. August. Vierzehnte, verbesserte Auflage besorgt von Dr. F. August, Professor an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule bei Berlin. Leipzig 1884. Veit u. Comp. 204 S.

Die 11. Auflage ist im 239. litt. Bericht, S. 36. besprochen. Nach ihr zeichnet sich zuerst die gegenwärtige durch Vermehrung und Verbesserung aus. Bei der Kreismessung ist die letzte Ziffer einiger Zahlen um 1 erhöht. In den astronomischen Angaben ist das tropische Sonnenjahr und der Sterntag hinzugekommen, die Masse des Mars nach der neuesten Bestimmung durch Hall, die halbe Ro-

tationsaxe der Erde in Uebereinstimmung mit den Tafeln von Gauss und der Berechnung von Becker verbessert, in den Erläuterungen das Verfahren zur Beurteilung der Genauigkeit einfacher und übersichtlicher dargestellt. H.

Logarithmentafeln, sowie Resultate zu den Beispielen und Aufgaben des Lehrbuchs der Arithmetik und Algebra. Von A. P. L. Claussen, Königl. Seminarlehrer in Bütow. Potsdam 1884. Aug. Stein. 47 S.

Die Logarithmen sind fünfstellig, im gewöhnlichen Umfang, mit vollständigen Proportionalteilen der Differenzen. Auf je 2 Nebenseiten stehen die Logarithmen von 1000 Zahlen. Vorher geht eine Tafel der Logarithmen der Zahlen bis 99. Die Resultate betreffend vergl. S. 46. H.

Geodäsie.

Handbuch der niederen Geodäsie. Von Friedrich Hartner, weiland Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien. In V. und VI. Auflage bearbeitet und vermehrt von Josef Wastler, k. k. Regierungsrath und o. ö. Professor der Geodäsie an der k. k. technischen Hochschule in Graz. VI. Auflage. Mit 425 Holzschnitten und 2 Tafeln. Wien 1885. L. W. Seidel u. Sohn. 786 S.

Die 5. Auflage ist im 243. litt. Bericht S. 32. besprochen. Die wichtigsten Vermehrungen der neuen Auflage betreffen die Theodolit-Aufnahmen und die damit im Zusammenhange stehenden Coordinatenrechnungen. Die Capitel über Genauigkeit der Längenmessungen, über Distanzmesser, mikroskopische Ablesevorrichtungen, Sextanten, Winkelcentrirung, Berechnung der Polygonzüge, Detail-Aufnahme, Ausgleichungsrechnung, Planimeter, Aneroid-Messungen, Ausgleichung der Nivellements, Tachymetrie etc. wurden dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechend erweitert. H.

Die Berechnung der trigonometrischen Vermessungen mit Rücksicht auf die sphäroïdische Gestalt der Erde. Von J. G. F. Bohnenberger. Deutsche Bearbeitung der Abhandlung „De computandis etc." Von E. Hammer, Professor am kgl. Polytechnikum in Stuttgart. Mit 13 Figuren im Text. Stuttgart 1885. J. B. Metzler. 65 S.

Der Titel des Originalwerks ist: De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroidica institutis commentatus Joan. Theophil. Frider. Bohnenberger. Es ist 1826 als Programm

der Universität Tübingen erschienen und enthält in einfachster Form einen vollständigen Abriss der elementaren Aufgaben der höhern Geodäsie. Das Vorliegende unterscheidet sich von den zahlreichen Schriften gleichen Inhalts, die sich auf Bohnenberger's Abhandlung stützen, als eine bis auf gewisse Punkte treue Uebersetzung der Urschrift. Da es jedoch zum Hülfsmittel des Studiums der Geodäsie für unsere Zeit bestimmt ist, so waren einige Aenderungen und Vermehrungen unerlässlich. Statt der Toise ist das Meter eingeführt, die Dimensionen der Erde sind nach Bessel's Angaben zugrunde gelegt, die ursprünglich für die würtembergische Landesvermessung bestimmten Tafeln sind soweit ausgedehnt, dass sie für Deutschland ausreichen. Ueber das Nähere gibt das Vorwort des Uebersetzers Rechenschaft.

H.

Revue Suisse de Topographie et d'Arpentage. Organe de la Société Suisse de Topographie et des Géomètres de la Suisse romande. Paraissant à Genève le 15 de chaque mois. 1. année. Nr. 1. 1885.

Diese neue Zeitschrift, redigirt von Oscar Messerly in Genf, soll nach dem dreijährigen Bestehen des Bulletin de la Société Suisse de Topographie an dessen Stelle treten und durch gegenseitige Belehrung ein Band zwischen den Schweizer Topographen und Geometern schaffen. Die erste Nummer enthält: Biographie von Plantamour, Director des Genfer Observatoriums, dem E. Gautier gefolgt ist, Triangulation, Plan der wissenschaftlichen Erforschung des Genfer Sees, polygonometrische Merkzeichen, dann unter Varietäten: Die Tribulationen eines römischen Geometers und die merkwürdige Beobachtung, dass im Augenblick des Erdbebens in Spanien die Brüsseler Sternwarte eine geneigte Stellung angenommen hat, so dass also das Erdbeben von einer Erdeinsenkung in grosser Entfernung begleitet war. Die Mitteilungen in den genannten Artikeln sind sehr spärlich und kaum hinreichend die Aufmerksamkeit auf die Tätigkeit der Gesellschaft zu lenken, viel weniger davon Kenntniss zu geben.

H.

INHALT.

Seite.

XVI. Die Cono-Cunei. Von Carl Pabst 337

XVII. Das Sehnen-Tangentenviereck. Von Dr. J. Schumacher . . 353

XVIII. Trigonometrische Sätze. Von A. H. Anglin 407

XIX. Neue Relationen innerhalb eines Orthogonalcoefficientensystems. Von R. Hoppe 413

XX. Rein analytische Consequenzen der Curventheorie. Von R. Hoppe 417

XXI. Miscellen.

1. Eine Gruppe planimetrischer Maxima und Minima. Von Dr. J. Lange 430
2. Ein Dreieckssatz. Von Emil Hain 435
3. Ein Satz über Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind. Von B. Sporer 437
4. Körper zwischen zwei Rotationsellipsoiden. Von Dr. Albert Bieler 439
5. Wann stehen die von einem Punkte an eine Kegelschnittslinie gezogenen zwei Tangenten auf einander senkrecht? Von Franz Schiffner 442
6. Zur Convergenz der Reihen. Von Dr. Börsch . . . 445
7. Archimedische Kreisquadratur. Von R. Hoppe . . . 447

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.